

ЧАСТИНА 1. ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ

Поняття „*моделі*”, „*моделювання*”, „*оптимізації*” є одними з базових в усіх галузях наукової та інженерної діяльності. Напевно, саме через різноманітність напрямків в окремих теоретичних дисциплінах під моделюванням розуміють суттєво різні теорії, методи та засоби.

Оптимізація також є базовою процедурою у розв’язанні багатьох прикладних задач. Її використовують при проектуванні і управлінні системами, прийнятті рішень. Моделювання та оптимізація тісно пов’язані.

Розглянемо ці поняття так, як це розуміють в інженерній практиці фахівці з *систем керування*.

1.1 Постановка задачі моделювання та оптимізації систем

1.1.1 Сутність математичного моделювання та оптимізації

Моделювання – це опис певного *об’єкта*. В галузі систем керування об’єктами моделювання є, відповідно, самі об’єкти, системи і процеси керування ними, а також їх складові частини.

Моделювання можна розглядати як *відображення* об’єкта на множину його описів. При цьому, якщо об’єкту O і моделі M властиві певні набори характеристик $O\{\bar{X}\}$ і $M\{\bar{Z}\}$, то повинна існувати відповідність характеристик моделі і об’єкта $x_i \leftrightarrow z_j \quad i \in [1 \dots n], \quad j \in [1 \dots m]$. Найчастіше модель свідомо будують як спрощений опис об’єкта для полегшення його дослідження. Це не дивно, адже природні об’єкти характеризуються безліччю показників, більшість з яких є несуттєвою з точки зору *мети моделювання*. Так, наприклад, при моделюванні системи керування токарним верстатом несуттєвими характеристиками є його колір, рівень шуму тощо. В результаті між моделлю та об’єктом немає повної відповідності.

Отже, задачу моделювання можна сформулювати таким чином: *необхідно для заданого об’єкта підібрати такий опис, який достатньо повною мірою відображає би оригінал з точки зору заданої мети моделювання*.

У найпростішому вигляді це відображає рис. 1.1. Як можна побачити з цього рисунка, у зображенні системи використовуються математичні об’єкти:

Θ_Y – набір характеристик стану системи – модель стану,
 $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$;

Θ_X – набір характеристик вхідних впливів – модель впливів,
 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$;

F – функціонал перетворення – модель системи.

Між цими математичними об'єктами є зв'язок, який можна записати у трьох формах:

$$\Theta_Y = F[\Theta_X] \quad (1.1)$$

$$\Theta_X = F^{-1}[\Theta_Y] \quad (1.2)$$

$$F = A[\Theta_X, \Theta_Y] \quad (1.3)$$

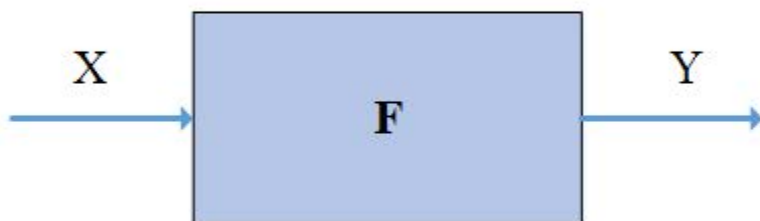


Рисунок 1.1 – Спрощена схема об'єкта моделювання

Форма (1.1) відображає задачу отримання результатів моделювання. Ця задача використовується у більшості задач застосування моделювання: оптимізація процесів, прогнозування характеристик систем, проектування систем управління тощо.

Форма (1.2) відображає задачу знаходження параметрів стану об'єкта за показами вимірювальних приладів, якщо під F розуміти рівняння перетворення цих приладів.

Форма (1.3) відображає задачу ідентифікації, тобто визначення моделі об'єкта F на основі експериментальних даних $[\Theta_X, \Theta_Y]$ за допомогою процедури ідентифікації A .

Якщо об'єктом моделювання є система керування, головним призначенням якої є приведення об'єкта керування у заданий стан, то модель повинна відображати залежність стану об'єкта від керуючого впливу і зовнішніх контрольованих і неконтрольованих збурень з урахуванням структурних характеристик і параметрів системи. Відповідна схема зображена на рис. 1.2. Відповідно, базова форма зв'язку між компонентами моделі матиме вигляд:

$$U = C[X, Y, Z']$$

$$Y = F[U, Z', Z'']$$

де U – вектор керування, Z' – вектор контрольованих збурень, Z'' – вектор неконтрольованих збурень.

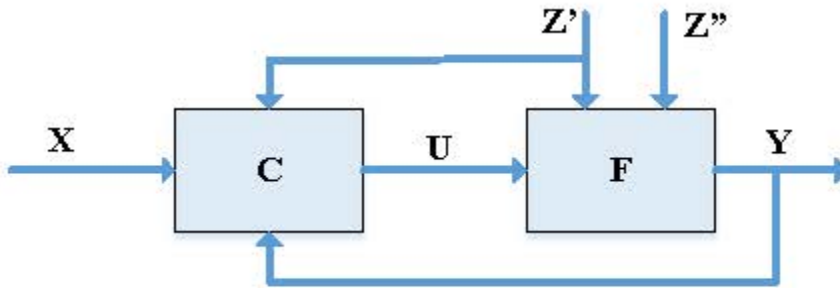


Рисунок 1.2 – Схема системи керування

Наявність неконтрольованих збурень зумовлює часткову невизначеність моделі.

Модель, як і будь-який предмет діяльності людини, проходить певний цикл свого існування, який звичайно називають “життєвим циклом”. Життєвий цикл моделі містить етапи:

- *вибір виду (класу) моделі*, який найбільше відповідає меті моделювання;
- *ідентифікація (identification) об'єкта моделювання*, тобто встановлення однозначної відповідності між моделями вибраного виду (класу) і конкретним об'єктом моделювання;
- *отримання результатів моделювання*, тобто виконання тих математичних (логічних, функціональних та інших) перетворень, які містяться у моделі;
- *використання результатів моделювання* для розв'язання задач проектування, прогнозування, керування об'єктами.

Кожен з цих етапів є істотним для досягнення мети моделювання, але ми виділимо з них найскладніший, а саме етап ідентифікації. Адже в результаті саме цього етапу фактично отримується модель, яка і дає можливість досягти мети моделювання. Але не тільки результати ідентифікації визначають виконання інших етапів. Життєвий цикл моделі не дарма називається «циклом». В ході виконання кожного етапу можуть виникнути обставини, які змусять повернутися до попередніх етапів і внести певні корективи.

Модель системи є основою постановки і розв'язання *задачі оптимізації*. Під оптимізацією розуміють знаходження найкращої, з усіх можливих, сукупності структури, параметрів або алгоритмів поведінки системи.

Задача оптимізації складається з таких елементів:

- критерію оптимальності K , максимум або мінімум якого необхідно забезпечити;
- характеристик системи U , за допомогою зміни яких і забезпечується досягнення оптимуму;
- обмежень на параметри і характеристики системи $I(U, \Theta_X)$, які повинні задовольняти оптимальний розв'язок;
- моделі $F[U, \Theta_X, K]$, яка встановлює залежність між характеристиками системи, параметрами оптимізації і критеріями;
- умови оптимізації, які визначають спосіб подання решти компонент постановки задачі.

Критерій оптимальності – найважливіший компонент задачі оптимізації – найчастіше є композицією багатьох характеристик системи. Якби ці характеристики були незалежними, задача пошуку оптимального розв'язку була б тривіальною. Але характеристики реальної системи пов'язані між собою моделлю F .

Також і інші компоненти задачі оптимізації пов'язані з моделлю. Так наприклад, область визначення критерію оптимізації визначається обмеженнями на параметри системи, а залежність між ними визначає вигляд цієї області. Якщо залежність лінійна, то область визначення матиме вигляд багатогранника, а якщо нелінійна, то область визначення матиме вигляд тіла з непласкою поверхнею.

1.1.2 Еволюція задач моделювання

Математичне моделювання є динамічною галуззю науки, яка тісно пов'язана з розвитком цивілізації. В процесі досліджень вчені вдаються до математичної формалізації все більш складних явищ. Умовна ієрархія моделей наведена на рис. 1.3. Створені моделі стають основою для нового кроку розвитку. Поступово те, що нещодавно зустрічалося лише у фантастичних романах, отримує математичне обґрунтування і стає реальністю. Сьогодні ряд вчених вже працюють над створенням математичних моделей того, що на рис. 1.3 позначено “?”.

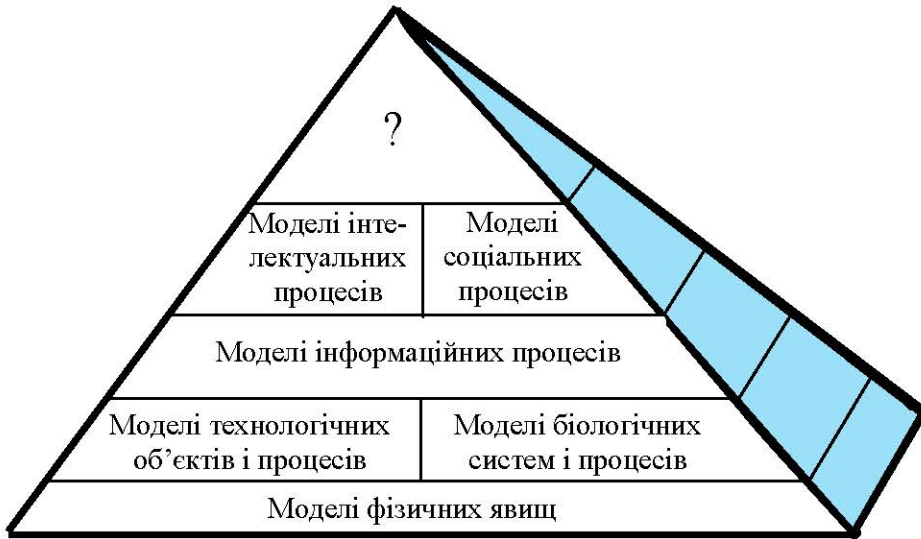


Рисунок 1.3 – Історична ієрархія моделей

З розвитком та проникненням в усі сфери життя комп'ютерної техніки суттєво змінилася постановка задач моделювання. Якщо раніше головною метою математичного моделювання було отримання аналітичної форми моделі (у вигляді певних формул), то наразі перевага віддається алгоритмічній формі моделювання, яка є зручною для перетворення на комп'ютерну програму.

На верхніх рівнях піраміди, які активно розвиваються останнім часом, моделі характеризуються принциповою невизначеністю (*uncertainty*), що теж впливає на їх форму та засоби подання. Тут переважно використовуються моделі у вигляді різноманітних евристичних правил, які не можуть розглядатися з позицій класичних алгоритмічних моделей, до яких висуюються вимоги детермінованості і результативності.

1.1.3 Роль моделювання та оптимізації в системах управління

Роль моделювання та оптимізації в системах управління доцільно розглядати з урахуванням життєвого циклу СУ. Основні етапи життєвого циклу показані на рис. 1.4.

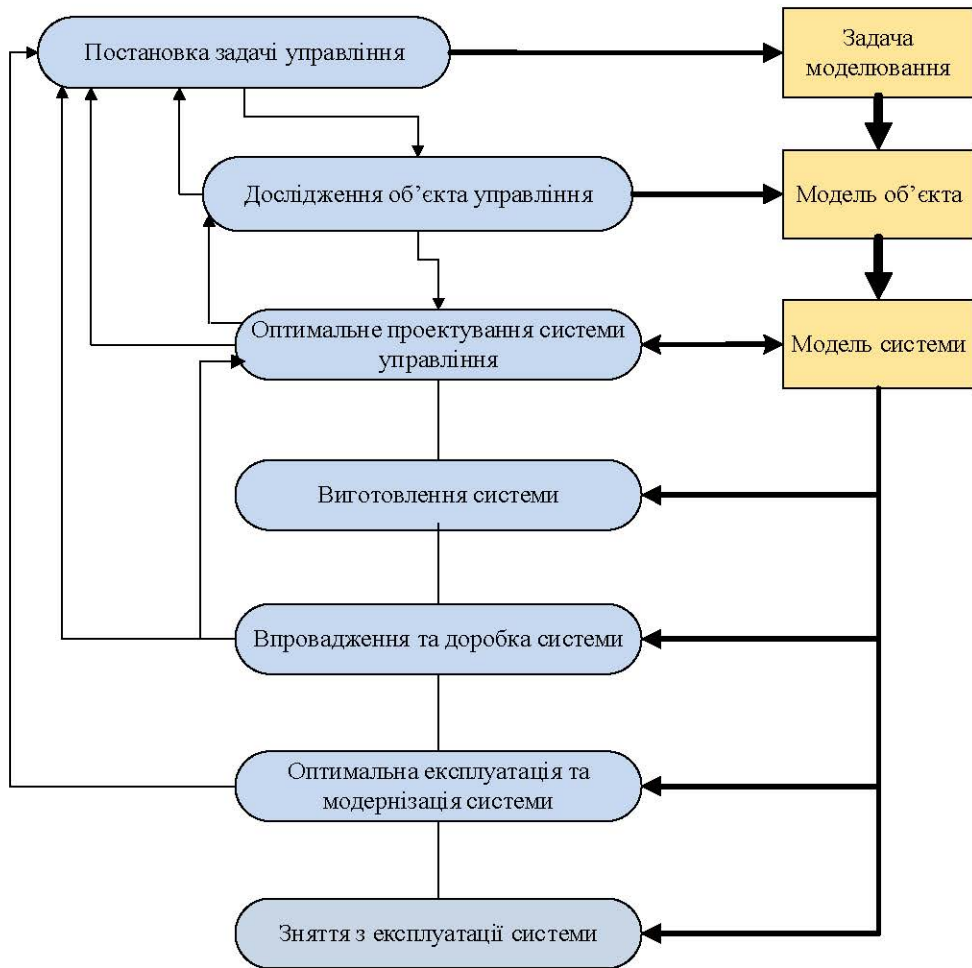


Рисунок 1.4 – Життєвий цикл системи управління

Метою робіт на стадіях постановки задач і дослідження об'єкта управління є отримання моделі об'єкта. Така модель необхідна як для проектування системи, так і для формалізації завдання, на основі якого у подальшому здійснюватиметься перевірка відповідності системи вимогам замовника.

На **стадії проектування** модель є основою створення системи. За її допомогою розробляють структуру і алгоритм (*algorithm*) роботи системи, прогнозують її характеристики, розраховують параметри елементів. Результатом цього етапу є проект СУ, який фактично є її моделлю.

Процес проектування систем управління є ітераційною оптимізаційною процедурою поступової деталізації і доповнення комплексу моделей системи, в якій чергуються етапи аналізу і синтезу.

Аналіз (analysis) – операція уявного або реального розчленування цілого (речі, властивості, процесу або відношення між предметами) на складові частини, яка виконується в процесі пізнання або предметно-практичної діяльності людини.

На першому і другому етапах здійснюється аналіз об'єкта і задачі управління з метою отримання інформації про структуру об'єкта дослідження, а також виділення із загальної маси параметрів тих, які безпосередньо стосуються мети управління, дозволяють спостерігати стан об'єкта (контрольовані параметри) і впливати на нього (керовані параметри).

Синтез (synthesis) – процес (як правило, цілеспрямований) з'єднання або об'єднання раніше розрізнених речей або понять у ціле або набір. У кібернетиці процес синтезу – побудова складних систем із заздалегідь підготовлених блоків або модулів різних типів, причому в процесі синтезу обов'язково застосовують математичні методи оптимізації.

Синтез поділяється на структурний і параметричний. На другому етапі на основі результатів аналізу здійснюється синтез найпростішої структури системи управління за обраним принципом управління, причому керованими і контрольованими параметрами є ті, що виділені на етапі аналізу. Результатом синтезу є комплексна модель системи.

На наступному етапі знов здійснюється аналіз, тепер вже моделі об'єкта у комплексі з системою керування, з метою оцінювання характеристик системи і визначення причин можливих проблем і недоліків.

Потім знов здійснюється синтез, цього разу – елементів корекції і реалізації складніших законів керування і т. д.

На *стадії виготовлення* системи на основі моделі (у формі проекту) виготовляють СУ. Наразі з розвитком комп'ютерної техніки моделі у формі комп'ютерних програм стали безпосередньою частиною СУ.

На *стадії впровадження* і доробки на практиці перевіряють якість розробленої системи і достовірність моделі, вносять необхідні уточнення і корективи.

В *процесі експлуатації* модель у вигляді технічної документації системи є керівним документом для персоналу як при обслуговуванні, ремонті і модернізації СУ, так і при з'ясуванні усіх поточних питань. Важливим компонентом процесу експлуатації є оптимальне управління системою, яке забезпечує високі техніко-економічні показники.

На заключній стадії здійснюється зняття системи з експлуатації. Найчастіше це досить складний процес, який вимагає ретельного дослідження наслідків зняття СУ з експлуатації. Для такого аналізу також необхідна модель СУ