1.3 Характеристики моделей

Ефективне використання моделей можливе лише за умови, що їх характеристики відповідають певним вимогам. Основними характеристиками моделей є точність, вірогідність, адекватність, складність, універсальність.

1.3.1 Точність моделі

Точність математичної моделі *(accuracy of mathematical model)* – її властивість, яка відбиває ступінь збігу передбачених з її допомогою значень характеристик об’єкта з дійсними значеннями цих характеристик. За дійсне значення характеристики об’єкта звичайно приймають експериментально отримані значення або достовірно відомі факти.

Точність характеризується похибкою і є величиною, оберненою до неї. Похибка – це відхилення модельного значення від дійсного. Точністю або похибкою можна характеризувати не всі моделі, а лише ті, для яких визначено чисельну характеристику відхилення моделі від оригіналу, тобто метрика у просторі моделей. Зокрема, досить просто і природно знаходиться відхилення лише для функціональних моделей, які описують залежність одного параметра стану системи від вектора впливів.

Залежно від призначення моделі розглядають похибки абсолютні, відносні і зведені; максимальні, середні, середні квадратичні:

– абсолютна похибка

$$\Delta_y = y - y^*, \qquad (1.6)$$

де y – модельне значення, y^* – дійсне значення;

– відносна похибка

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta_y}{y^*}; \qquad (1.7)$$

– зведена похибка

$$\delta_y = \frac{\Delta_y}{y^*_{\max} - y^*_{\min}}, \qquad (1.8)$$

де $y^*_{\max} - y^*_{\min}$ – діапазон значень результату моделювання;

– максимальна похибка

$$\Delta_{y\max} = \max_{x_i \in X} (y_i - y_i^*), \qquad (1.9)$$

де $\vec{x}_i = (x_{1i},...,x_{ni})$ – вектор вхідних величин об'єкта/моделі; X – множина можливих значень вектору вхідних величин;

– середня похибка

$$\overline{\Delta_y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[y(x_i) - y^*(x_i)], \tag{1.10}$$

де $N = \prod_{k=1}^{n_k} m_k$; m_k – кількість значень k-ї вхідної величини;

– середня квадратична похибка

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}[y(x_i) - y^*(x_i)]^2}. \tag{1.11}$$

Якщо кількість значень мала ($N < 30$), то

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[y(x_i) - y^*(x_i)]^2}.$$

Похибки моделювання також класифікують за джерелами походження: методичні, обчислювальні, похибки від невизначеності початкових даних тощо.

Методичні похибки можуть бути викликані нехтуванням певними впливовими факторами, помилками у виборі виду функціональної залежності, невідповідністю способу отримання результату моделювання особливостям моделі, неправильним вибором типу моделі тощо.

Обчислювальні похибки викликані особливостями алгоритму отримання результату. При великій кількості послідовних обчислень похибка накопичується і може досягати значної величини. Такі ситуації виникають при розв'язанні диференціальних рівнянь, особливо у частинних похідних, та інших задачах.

Похибки від невизначеності початкових даних відіграють значну роль при використанні алгоритмів, які мають низьку стійкість. Так, наприклад, при обчисленні похідної різницевим методом похибка результату може значно перевищувати похибки початкових даних.

При застосуванні моделювання у діючих системах реального часу з'являється додаткова складова похибки – *динамічна*. Вона зумовлена тим, що протягом часу моделювання початкові дані можуть змінитися, і отримані результати вже не будуть їм відповідати. Очевидно, динамічна похибка залежить від співвідношення швидкості зміни початкових даних і швидкості моделювання.

Якщо визначені окремі похибки, то за умови їх незалежності загальна середня квадратична похибка підраховується за формулою

$$\sigma_{\Sigma} = \sqrt{\sum_i \left(\sigma_y^2\right)_i}\,. \tag{1.12}$$

1.3.2 Вірогідність моделі

Вірогідністю характеризуються моделі, для яких не визначено метрику. Вірогідність *(reliability of mathematical model)* – це ймовірність відсутності помилки при побудові моделі

$$P_0 = 1 - P_{пом}\,. \tag{1.13}$$

Ймовірність помилки розраховується на основі аналізу усіх можливих джерел помилок. Але слід брати до уваги, що у деяких задачах локальна помилка може не привести до загальної помилки моделювання, наприклад у задачах знаходження мінімальних або максимальних шляхів за допомогою структурних моделей у вигляді графів, якщо цей шлях не проходить через помилково визначене ребро.

1.3.3 Адекватність моделі

Необхідна умова для переходу від дослідження об'єкта до дослідження моделі і подальшого перенесення результатів на об'єкт дослідження – вимога адекватності моделі і об'єкта.

Адекватність (adequacy of mathematical model) – це правильне відтворення моделлю з необхідною повнотою всіх властивостей об'єкта, важливих для цілей даного дослідження.

Будь-яка система чи підсистема може бути подана різними способами, які значно відрізняються один від одного за складністю і деталізацією. В більшості випадків в результаті дослідження з'являється декілька різних моделей одної і тої ж системи. При цьому, залежно від глибини аналізу прості моделі послідовно заміняються все більш складними.

Оскільки будь-яка модель простіша за оригінал, ніколи не можна говорити про абсолютну адекватність, при якій модель за всіма характеристиками відповідає оригіналу. Відповідно, оцінювання ступеня подібності може спиратися тільки на оцінювання точності або відмінності від оригіналу. Оцінювання відмінності стикається природним чином з великими труднощами, оскільки звичайно неможливо використовувати для порівняння об'єкт у всій його дійсній цілісності.

Можна виділити декілька евристичних критеріїв адекватності моделей:

1. *Достатня точність за граничних умов моделювання і у особливих точках.*

Для кожної моделі бажано вказувати границі значень параметрів, в яких вона адекватна об'єкту. Чим ширший цей діапазон, тим вищим є ступінь адекватності моделі.

Часто граничними умовами є характерні «точки»: нуль та нескінченність. Поведінка об'єкта при наближенні до таких значень звичайно є зрозумілою (наприклад, відомо, що струм з нульовою частотою, тобто постійний струм, не проходить через конденсатор, а зі зростанням частоти, тобто при наближенні частоти до НВЧ і частоти коливань світла, струм перестає проходити через провідники). Перевірка адекватності моделі у таких випадках здійснюється за допомогою граничного переходу.

2. *Достатня точність збігу з відомими випадками.*

Піонерські дослідження, тобто такі, яким досі не було аналогів, зустрічаються зрідка. Тому у літературних джерелах найчастіше можна знайти результати, які відповідають окремим випадкам застосування моделі.

3. *Підвищення або, принаймні, збереження точності при врахуванні додаткових факторів.*

Вище відзначалося, що одна з головних причин низької точності моделі – методична похибка, яка зумовлена нехтуванням певними факторами заради спрощення моделі. Очевидно, врахування додаткових факторів повинно зменшувати методичну похибку, отже, підвищувати точність моделі. Але це справедливо лише для адекватних моделей. Для неадекватних моделей врахування додаткових факторів найчастіше дозволяє краще виявити розбіжність моделі з оригіналом. Приклад застосування цього критерію адекватності показаний на рис. 1.6.

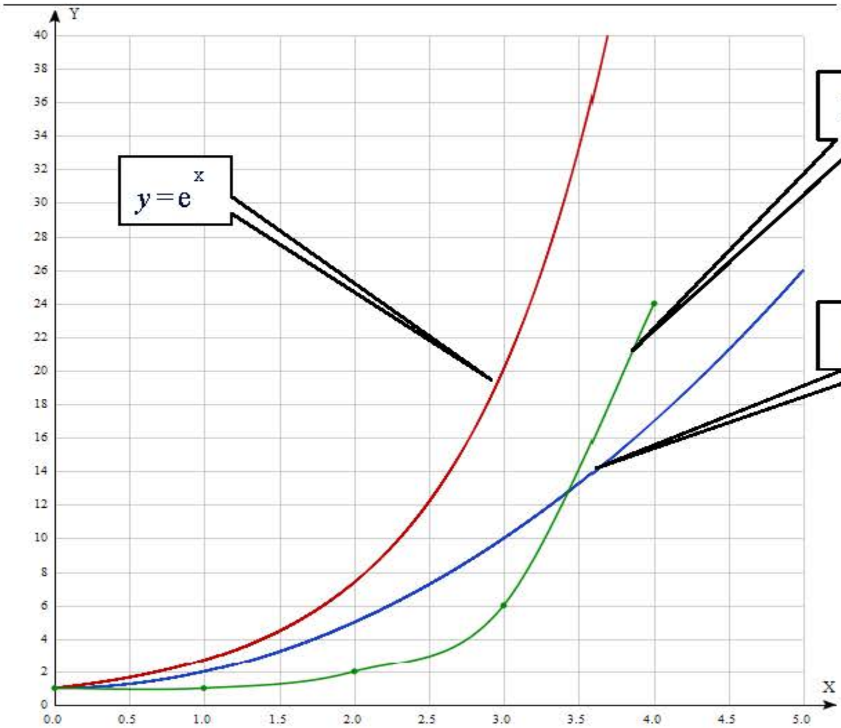

Рисунок 1.6 – Вплив кількості факторів на висновок про адекватність моделі

На рис. 1.6 оригіналом є функція «факторіал». Але ця функція незручна для дослідження, оскільки розраховується лише для дискретних значень, і для неї неможливо розрахувати деякі характеристики, наприклад, похідну. З рисунка видно, що ця функція подана у вигляді двох моделей: поліноміальної і експоненціальної. Якщо враховувати лише три фактори (три значення аргумента: 0, 1 і 2), то можна зробити висновок, що поліноміальна модель є адекватною. Але збільшення кількості точок ясно показує, що більш адекватною є експоненціальна модель.

4. *Збереження точності на контрольній вибірці*.

При побудові моделі на основі експериментальних даних ці дані розбивають на дві підмножини: ті, що використовуються для отримання параметрів моделі, і ті, що використовуються для перевірки її адекватності, – контрольна група. Головною умовою такого розбиття є рівномірне покриття кожною з підмножин усього простору даних.

1.3.4 Складність моделі

Вже відзначалося, що будь-яка модель є спрощеним описом об’єкта.

Складність моделі є комплексною характеристикою, яка переважно сприймається інтуїтивно. Залежно від виду моделі розрізняють декілька видів складності.

Структурна складність визначається кількістю елементів, зв'язків між ними та показником нерегулярності цих зв'язків.

Функціональна складність визначається кількістю вхідних і вихідних даних, обчислювальною складністю моделі.

Найглибше пророблені методи визначення складності для алгоритмічних моделей. Обчислювальна складність алгоритму – поняття в інформатиці та теорії алгоритмів, що позначає функцію залежності обсягу роботи, виконуваної деякими алгоритмом. При оцінюванні складності алгоритмів враховують кількість вхідних і вихідних даних, кількість операцій, кількість циклів і викликів зовнішніх функцій тощо.

Зі складністю тісно пов'язана інша характеристика – економічність моделі. *Економічність* математичної моделі визначається, перш за все, витратами ресурсів на моделювання: машинного часу, зусиль на отримання і введення початкових даних, необхідної потужності комп'ютерів тощо.

Для адекватних моделей збільшення складності приводить до зменшення методичної похибки, але, разом із тим, призводить до збільшення обчислювальної похибки (чим складніша модель – тим більше дій слід виконати при її практичному використанні, а кожна дія вносить додаткову обчислювальну похибку) і до збільшення витрат часу на отримання результату. Приклад типових залежностей похибок від складності моделі показано на рис. 1.7.

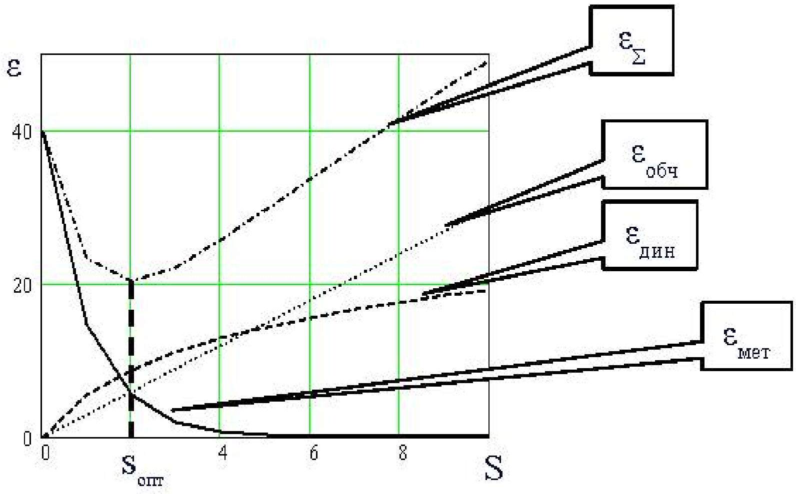

Рисунок 1.7 – Залежності похибок від складності моделі: S – складність, $ε_{мет}$ – методична похибка, $ε_{дин}$ – динамічна похибка, $ε_{обч}$ – обчислювальна похибка, $ε_Σ$ – сумарна похибка

Очевидно, існує оптимальна складність, яка забезпечує найбільшу точність адекватної моделі.

1.3.5 Універсальність моделі

Ступінь універсальності математичної моделі визначається її застосуванням до аналізу чисельної групи однотипних об'єктів, до їх аналізу в одному чи багатьох режимах функціонування.

Як приклад найуніверсальніших моделей можна навести модель гравітаційної взаємодії («закон всесвітнього тяжіння» Ньютона). Меншу універсальність мають потокові моделі (закони Кірхгофа) – вони справедливі лише для лінійних систем. Ще вужче застосування мають моделі конкретних об'єктів – їх універсальність проявляється при розгляді об'єкта за різноманітних умов (різних вхідних даних, впливів тощо). Підсумовуючи сказане, слід зазначити, що математичне моделювання та ідентифікації об'єктів і систем є складним багатоетапним процесом, який передбачає створення моделі, виконання розрахунків відповідно до моделі та використання отриманих результатів. І на кожному етапі крім формальних математичних методів необхідний ще й досвід інженера, дослідника.

При цьому слід брати до уваги вплив точності і складності не тільки на перший етап, а й, що є найголовнішим, на остаточний результат застосування моделі. Адже дуже часто висока точність моделі зводиться нанівець похибками розрахунків при застосуванні моделі в задачах оптимізації, оцінювання тощо через велику складність. І тільки значний досвід дослідника дозволяє вже з самого початку моделювання досягти цього компромісу.

1.3.6 Поняття «жорстких» та «м'яких» математичних моделей

Математичні моделі можуть бути «жорсткими» і «м'якими». У жорстких моделях невеликі зміни початкових даних можуть призводити до істотно якісно іншого результату. М'які моделі допускають зміни, причому зміни результату при цьому будуть носити тільки кількісний характер.

Прикладом жорсткої моделі є модель війни або битви.

У простій моделі боротьби двох супротивників (скажімо, двох армій) – моделі Ланкастера – стан системи описується точкою (x, y). Координати цієї точки, x і y – це чисельності протиборчих армій. Модель має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x} = -by, \\ \dot{y} = -ax. \end{cases}$$

Тут a – потужність зброї армії x, b – армії y. Попросту кажучи, передбачається, що кожен солдат армії x вбиває за одиницю часу a солдат армії y і, відповідно, кожен солдат армії y вбиває b солдатів армії x. Точка над буквою тут і далі означає похідну за часом t, тобто швидкість зміни величини.

Це жорстка модель, яка допускає розв'язання

$$\frac{dx}{dy} = \frac{by}{ax}, \quad ax \cdot dx = by \cdot dy, \quad ax^2 - by^2 = const.$$

Еволюція чисельності армій x і y відбувається уздовж гіперболи, заданої цим рівнянням (рис. 1.8). За якою саме гіперболою йтиме війна, залежить від початкової точки.

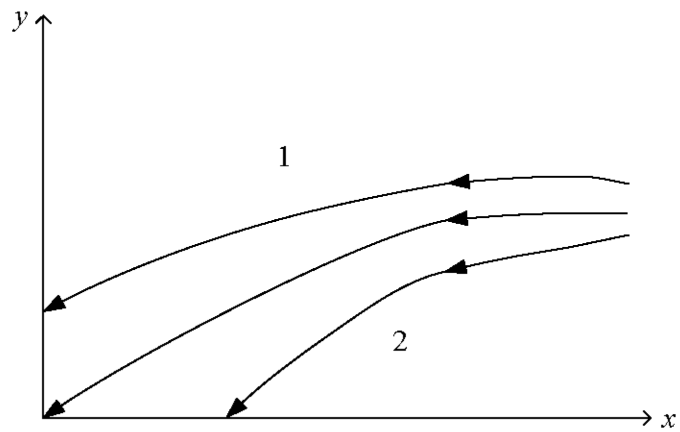

Рисунок 1.8 – Жорстка модель війни

Ці гіперболи розділені прямою $\sqrt{ax} = \sqrt{by}$. Якщо початкова точка лежить вище цієї прямої (випадок 1 на рис. 1.8), то гіпербола виходить на вісь y. Це означає, що в ході війни чисельність армії x зменшується до нуля (за кінцевий час). Армія y виграє, суперник знищений.

Якщо початкова точка лежить нижче (випадок 2); то виграє армія x. У стані, що розділяє ці випадки, війна призводить до винищення обох армій. Але на це потрібно нескінченно великий час: конфлікт продовжує тліти, коли обидва супротивники вже знесилені.

Висновок моделі такий: для боротьби з удвічі більш чисельними супротивником потрібно в чотири рази більш потужна зброя, втроє більшою чисельністю – в дев'ять разів і т. д. (на це вказують квадратні корені в рівнянні прямої).

Виникне питання – як зміниться висновок, якщо модель буде дещо іншою. Наприклад, коефіцієнти a і b можуть бути не строго постійними, а можуть, скажімо, залежати від x і від y. І точний вигляд цієї залежності нам може бути невідомий. Розглянемо м'яку модель війни (рис. 1.9).

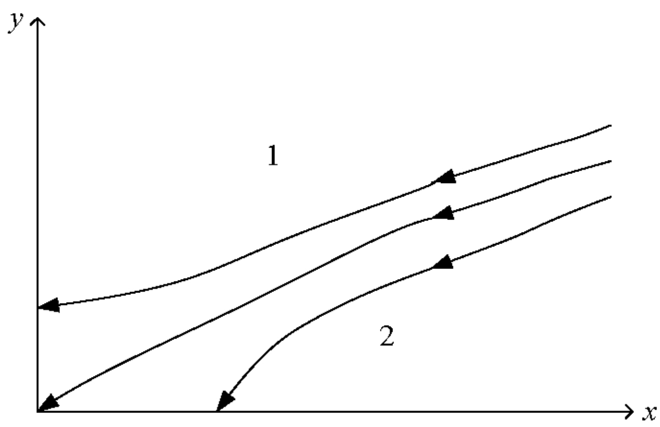

Рисунок 1.9 - М’яка модель війни

У цьому випадку мова йде про систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -b(x,\ y)y, \\ \dot{y} = -a(x,\ y)x, \end{cases}$$

яка вже не розв’язується явно. Однак в математиці розроблені методи, що дозволяють зробити висновки загального характеру, не знаючи явного виду функцій a і b.

У цій ситуації прийнято говорити про м'яку модель – модель, що піддається змінам (за рахунок вибору функцій у нашому прикладі).

Таким чином, жорсткі моделі можуть призводити до помилкових передбачень, оптимізація на основі жорсткої моделі може призводити до колапсу системи.

М'яка модель дозволяє запропонувати спосіб боротьби із зазначеним злом. Для отримання достовірних передбачень (прогнозів) важливо, щоб модель була структурно стійкою, тобто щоб висновки витримували малу зміну параметрів і функцій, що описують модель.