1.4 Систематичний підхід до моделювання

Наведена характеристика моделювання дозволяє узагальнити підхід до створення різноманітних моделей об’єктів і систем.

1.4.1 Ізоморфні та гомеоморфні моделі

Наведене вище поняття адекватності – вельми широке, основане на строгих, щодо математики, поняттях ізоморфізму *(isomorphism)* і гомеоморфізму.

Дві системи (в даному випадку об’єкт дослідження і його модель) називаються *ізоморфними,* якщо між ними існує взаємно однозначний зв’язок. *Ізоморфна модель* має всі ознаки, які теоретично належать об’єкту-оригіналу.

В загальному випадку забезпечення ізоморфізму моделі і об’єкта дослідження може бути не тільки важко виконуваним, а й зайвим, оскільки складність моделі при цьому може виявитись настільки значною, що не буде можливим ніяке спрощення вирішуваної задачі. Гомеоморфізм, як і ізоморфізм, передбачає збереження в моделі всіх визначених на об’єктах дослідження властивостей і відношень.

Гомеоморфізм (homeomorphism) визначає таку форму зв’язку між двома подібними об’єктами, при якій однозначне лише в одну сторону перетворення дозволяє звести вихідну систему до більш простої системи, гомеоморфної вихідної. Її називають гомеоморфним образом вихідної системи.

На рис. 1.10 зображена графічна інтерпретація понять ізоморфізму і гомеоморфізму.

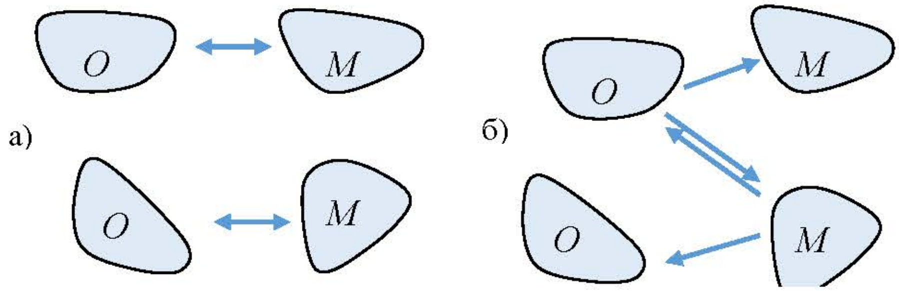


Рисунок 1.10 – Відповідність моделей і об’єктів: а) ізоморфізм; б) гомеоморфізм

Оскільки моделі, в основному, є спрощеним образом об’єкта, то вони переважно гомеоморфні об’єкту і одна одній.

Приклади ізоморфних моделей можна знайти, розглядаючи тотожні перетворення та різні форми запису одних і тих же об’єктів:

1. Системи лінійних рівнянь у звичайній і векторно-матричній формах

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, обидва записи однозначно відповідають один одному;

2. Алгоритм у вигляді графічної схеми і програма алгоритмічною мовою, яка його реалізує.

Приклади гомеоморфізму можна знайти, розглядаючи моделі наближення:

1. Апроксимація функцій

$y_0 = e^x$ і $y_1 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$ – розклад функції e^x у ряд Тейлора з обмеженою кількістю членів. Очевидно, функція $y_1(x)$ може розглядатися як наближення функції $y_0(x)$, а також безлічі інших функцій, наприклад, функції $y_2 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$.

2. Закон Мендєлєєва-Клапейрона є моделлю поведінки газу $PV = \frac{m}{\mu} RT$, але однозначно вона відповідає лише «ідеальному» газу. Щодо до реальних газів вона є гомеоморфною.

Задача встановлення ступеня ідентичності моделі і об’єкта може бути поставлена так: будуємо математичну модель об’єкта таким чином, щоб при подачі однакових вхідних впливів на об’єкт і його модель вихідні сигнали мінімально відрізнялись один від одного.

Ступінь близькості моделі до об’єкта може оцінюватися дисперсійною мірою точності. Але існує клас об’єктів, для яких дисперсійна міра не дає достовірної відповіді на питання про близькість моделі і об’єкта.

Використання дисперсії $D[M(y/x)]$ умовного математичного сподівання припускає однаковість її розмірності з розмірностями дисперсій входів. Тому оцінювання ступеня ідентичності моделі і неоднорідного нелінійного об’єкта, на який діють змінні з різною розмірністю, за допомогою дисперсійної міри не завжди можливе. В таких випадках доцільно підійти до оцінювання ідентичності з точки зору інформаційної теорії систем. Цей підхід придатний для будь-яких систем.

1.4.2 Теорія подібності

Теорія подібності (similarity theory) – вчення про дослідження різноманітних явищ, основані на понятті про їх схожість.

Два явища подібні, якщо за числовими значеннями характеристик одного явища можна отримати числові значення характеристик іншого явища простим перерахунком, який аналогічний переходу від однієї системи одиниць вимірювання до іншої. Для будь-якої сукупності подібних явищ всі відповідні безрозмірні характеристики (безрозмірні комбінації розмірних величин) мають однакове числове значення. Обернене твердження також правильне, тобто, якщо всі відповідні безрозмірні характеристики для двох явищ однакові, то ці явища фізично подібні.

Аналіз розмірності і теорія подібності тісно пов'язані між собою і покладені в основу експериментів з моделями. В таких експериментах здійснюються заміни вивчення деякого об'єкта в натурі вивченням аналогічного явища на моделі іншої фізичної природи (зазвичай в спеціальних лабораторних умовах).

Математична подібність чи просто *подібність* – математична аналогія при наявності пропорційності між схожими змінними. Два об'єкти подібні, якщо:

1) мають схожий математичний опис у формі рівнянь одного виду:

$$F(z_1, x_{1i}, t_{1s}, D_{1s}, a_{1j}) = 0; \tag{1.14}$$

$$F(z_2, x_{2i}, t_{2s}, D_{2s}, a_{2j}) = 0; \tag{1.15}$$

$$i = 1,2,\dots; \quad j = 1,2,\dots; \quad s = 1,2,\dots .$$

де $D_{1s} = \frac{d}{dt_{1s}}$, $D_{2s} = \frac{d}{dt_{2s}}$ – оператори диференціювання;

2) подібні змінні (z_1 і z_2; x_{1i} і x_{2i}, t_{1s} i , t_{2s}) зв'язані постійними коефіцієнтами – *константами подібності*:

$$C_Z = \frac{z_1}{z_2}; C_{xi} = \frac{x_{1i}}{x_{2i}}; C_Z = \frac{t_{1s}}{t_{2s}} = \frac{dt_{1s}}{dt_{2s}} = \frac{D_{2s}}{D_{1s}}. \tag{1.16}$$

Незмінна пропорційність іноді підкреслюється позначенням $C = idem$ ($idem$ – незмінно). При умовах (1.16) відповідні подібні рівняння, функції і змінні називаються подібними.

Необхідні умови подібності – сумісність рівнянь зв'язує константи подібності певними рівняннями констант, які можна отримати двома методами.

Метод переходу від одного подібного рівняння до іншого

Користуючись константами подібності, заміняють, наприклад, в рівнянні (1.14) величини $z_1, x_{1i}, t_{1s}, D_{1s}$ подібними величинами $z_2, x_{2i}, t_{2s}, D_{2s}$, підставляючи z_1=$C_2 z_2$, $x_{1i} = C_{xi} x_{2i}$, $t_{1s} = C_{ts} t_{2s}$, $D_{1s} = \frac{D_{2s}}{C_{ts}}$. В результаті отримують проміжне рівняння

$$F\left(C_2 z_2, C_{xi} x_{2i}, C_{ts} t_{2s}, \frac{D_{2s}}{C_{ts}}, a_{1j}\right) = 0, \tag{1.17}$$

яке має бути тотожним рівнянню (1.15). Для встановлення умов тотожності, що є рівняннями констант подібності, необхідно зробити однаковими розмірності членів цих рівнянь зрівнюваними способами, внаслідок чого можуть мати різний вид і рівняння констант. Проте завжди кожна можлива форма їх може бути перетворена в будь-яку іншу.

Приклад. Об'єкти описуються диференціальними рівняннями

$$D_1 z_1 + a_{11} z_1 - a_{12} x_1 = 0; \tag{1.18}$$

$$D_2 z_2 + a_{21} z_2 - a_{22} x_2 = 0; \quad (1.19)$$

де $D_1 = \frac{d}{dt_1}$; $D_2 = \frac{d}{dt_2}$.

Констант подібності три:

$$C_z = \frac{z_1}{z_2}; \quad C_x = \frac{x_1}{x_2}; \quad C_t = \frac{t_1}{t_2} = \frac{D_2}{D_1}.$$

Заміна змінних у рівнянні (1.18) дає

$$\frac{D_2}{C_t} C_z z_2 + a_{11} C_z z_2 - a_{12} C_x x_2 = 0. \quad (1.20)$$

Зробивши розмірність членів цього рівняння такою ж, як в рівнянні (1.19), отримаємо

$$D_2 z_2 + a_{11} C_t z_2 - \frac{a_{12} C_x C_t}{C_z} = 0. \quad (1.21)$$

або

$$\frac{a_{22} C_z}{a_{12} C_x C_t} D_2 z_2 + \frac{a_{11} a_{22} C_z}{a_{12} C_x} z_2 - a_{22} x_2 = 0. \quad (1.22)$$

Умови тотожності рівнянь (1.21) і (1.19):

$$a_{11} C_t = a_{21}; \qquad \frac{a_{22} C_x C_t}{C_z} = a_{22}. \quad (1.23)$$

Умови тотожності рівнянь (1.22) і (1.19):

$$\frac{a_{22} C_z}{a_{12} C_x C_t} = 1; \qquad \frac{a_{11} a_{22} C_z}{a_{12} C_x} = a_{21}. \quad (1.24)$$

Перша форма рівнянь констант (1.23) легко перетворюється у другу (1.24) і навпаки.

Метод критеріїв подібності

Після встановлення системи параметрів, що визначають виділений клас явищ, встановлюються *умови подібності* двох явищ. Для подібності двох явищ необхідно і достатньо, щоб числові значення безрозмірних комбінацій, складених з повного переліку параметрів, які утворюють базу, в цих обох явищах були однакові. Умова про постійність *бази абстрактних параметрів*, складених із заданих величин, які визначають явище, називається *критерієм подібності*. В гідродинаміці найважливішим критерієм є число Рейнольдса, яке характеризує співвідношення між інерційними силами і силами в’язкості, число Маха враховує стиснення газу, число Фруда характеризує співвідношення між інерційними силами і силами тяжіння.

Нехай явище визначається *n* незалежними параметрами, деякі з них можуть бути безрозмірними. Нехай розмірність визначається змінними і фізичними постійних виразів через розмірність *k* з цих параметрів з незалежними розмірностями ($k \le n$). Тоді з *n* величин можна скласти лише *n-k* незалежних комбінацій. Всі шукані безрозмірні характеристики явищ можна розглядати як функцію від цих *n-k* незалежних безрозмірних комбінацій, складених з певних параметрів. Серед цих безрозмірних величин, складених з певних характеристик явищ, завжди можна вказати деяку базу, тобто систему безрозмірних величин, які визначають собою всі інші.

Подібні рівняння (1.14) і (1.15) приводяться до безрозмірної форми, при якій всі їх члени мають розмірність, що дорівнює одиниці:

$$\Phi\left(z_1, x_{1i}, t_{1s}, D_{1s}, a_{1j}\right) \pm 1 = 0; \tag{1.25}$$

$$\Phi\left(z_2, x_{2i}, t_{2s}, D_{2s}, a_{2j}\right) \pm 1 = 0; \tag{1.26}$$

Добутки сталих коефіцієнтів і степенів різних величин об’єднуються в **безрозмірні степеневі комплекси** – **критерії подібності** виду

$$\pi_{1r} = a_{1r} z_1^{\alpha_r} x_{1i}^{\beta_{ir}} t_{1s}^{\gamma_{sr}} D_{1s}^{\delta_{sr}}; \tag{1.27}$$

$$\pi_{2r} = a_{2r} z_2^{\alpha_r} x_{2i}^{\beta_{ir}} t_{2s}^{\gamma_{sr}} D_{2s}^{\delta_{sr}}, \tag{1.28}$$

де $\alpha_r, \beta_{ir}, \gamma_{sr}, \delta_{sr}$ – деякі сталі.

В результаті безрозмірні функції подаються *критеріальними функціями*

$$\Phi\left(z_1, x_{1i}, t_{1s}, D_{1s}, a_{1j}\right) = \varphi(\pi_{1r}); \tag{1.29}$$

$$\Phi\left(z_2, x_{2i}, t_{2s}, D_{2s}, a_{2j}\right) = \varphi(\pi_{2r}), \tag{1.30}$$

а рівняння (1.25) і (1.26) – **критеріальні рівняння**

$$\varphi(\pi_{1r}) \pm 1 = 0; \tag{1.31}$$

$$\varphi(\pi_{2r}) \pm 1 = 0. \tag{1.32}$$

У випадку подібності подібні критерії рівні:

$$\pi_{1r} = \pi_{2r}, \tag{1.33}$$

що іноді записується у символьному вигляді $\mathrm{p}_{r=}$idem.

Рівняння констант подібності мають вид:

$$\frac{\pi_{1r}}{\mathrm{p}_{2r}} = \frac{a_{1r}}{a_{2r}} C_z^{\alpha_r} C_{x_i}^{\beta_{ir}} C_{t_s}^{\gamma_{sr-\text{д}sr}} = 1. \tag{1.34}$$

Приведення рівнянь (1.14) і (1.15) до безрозмірної форми (1.25), (1.26) може бути виконано різними способами. Внаслідок цього різний вид можуть мати і критерії подібності, а значить – і рівняння констант. Проте, як і в методі переходу від одного рівняння до іншого, кожна можлива форма їх перетворюється в будь-яку іншу.

Приклад. Об’єкти описуються рівняннями (1.18), (1.19). Приводимо їх до безрозмірної форми, наприклад виду

$$\frac{a_{11}}{D_1} - \frac{a_{12} x_1}{D_1 z_1} + 1 = 0; \qquad \frac{a_{21}}{D_2} - \frac{a_{22} x_2}{D_2 z_2} + 1 = 0; \tag{1.35}$$

або

$$\frac{D_1 z_1}{a_{12} x_1} + \frac{a_{11} z_1}{a_{12} x_1} - 1 = 0; \quad \frac{D_2 z_2}{a_{22} x_2} + \frac{a_{21} z_2}{a_{22} x_2} - 1 = 0; \tag{1.36}$$

В першому випадку (1.35) отримуємо критеріальне рівняння

$$\pi'_{11} - \pi'_{12} + 1 = 0; \qquad \pi'_{21} - \pi'_{22} + 1 = 0; \tag{1.37}$$

причому

$$\pi'_{11} = \frac{a_{11}}{D_1}; \qquad \pi'_{12} = \frac{a_{12} x_1}{D_1 z_1}; \quad \pi'_{21} = \frac{a_{21}}{D_2}; \qquad \pi'_{22} = \frac{a_{22} x_2}{D_2 z_2}$$

і рівняння констант

$$\frac{\mathrm{p}'_{11}}{\pi'_{21}} = \frac{a_{11} C_t}{a_{21}} = 1; \ \frac{\pi'_{12}}{\pi'_{22}} = \frac{a_{12}\, C_x C_t}{a_{21}\, C_z} = 1, \tag{1.38}$$

рівносильні (1.23).

У другому випадку (1.36) отримуємо критеріальне рівняння

$$\pi''_{11} + \pi''_{12} - 1 = 0; \qquad \pi''_{21} + \pi''_{22} - 1 = 0;$$

причому

$$\pi''_{11} = \frac{D_1 z_1}{a_{12} x_1}; \qquad \pi''_{12} = \frac{a_{11} z_1}{a_{12} x_1}; \quad \pi''_{21} = \frac{D_2 z_2}{a_{22} x_2}; \quad \pi''_{22} = \frac{a_{21} z_2}{a_{22} x_2}$$

і рівняння констант

$$\frac{\pi''_{11}}{\pi''_{21}} = \frac{a_{22} C_z}{a_{12} C_x C_t} = 1; \qquad \frac{\pi''_{12}}{\pi''_{22}} = \frac{a_{11}\, a_{22} C_z}{a_{12}\, a_{21} C_x} = 1,$$

рівносильні (1.24).

Рівняння констант подібності повинні бути сумісні і незалежні. Залежні рівняння можуть бути із системи усунуті. Число незалежних рівнянь констант дорівнює числу m незалежних критеріїв подібності p_r, яке визначає основна в теорії подібності р-теорема:

Залежність $F(x_1, x_2, \dots x_k, X_1, X_2, \dots X_m) = 0$, що зв'язує $n = k + m$ змінних і постійних розмірних величин, серед яких k величин $x_1, x_2, \dots x_k$ мають незалежні розмірності, може бути перетворена в залежність

$$f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m) = 0$$

між $m = n - k$ незалежними безрозмірними степеневими комплексами p_r величин $x_1, x_2, \dots x_k,\ X_1, X_2, \dots X_m$.

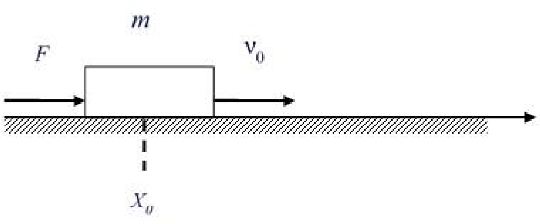
Якщо число констант подібності q дорівнює числу незалежних рівнянь m, то всі константи однозначно визначаються із системи рівнянь констант. Якщо $q > m$, то $q - m$ констант вибираються довільно. Випадок $q < m$ неможливий.

Окремими випадками математичної подібності є: геометрична (подібність геометричних образів), часова (подібність функцій часу, при цьому часова константа показує, в якому відношенні знаходяться такі параметри функцій, як період, часова затримка і т. д.), фізична (подібність об'єктів при наявності їх фізичної аналогії; при цьому всі константи подібності – безрозмірні величини). При фізичній подібності критерії подібності можуть бути отримані без математичного опису об’єктів, на основі аналізу розмірності.

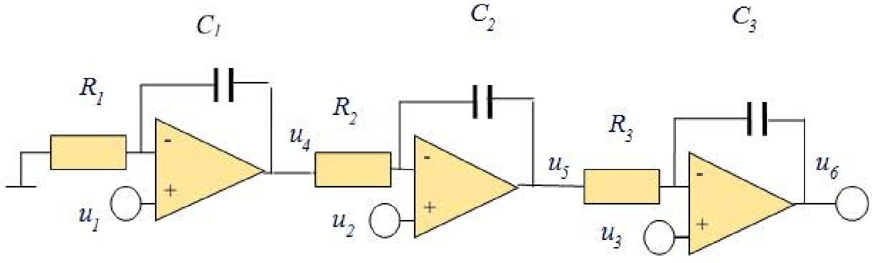
Аналіз подібності двох об’єктів полягає у: 1) встановленні подібності рівнянь, що їх описують; 2) визначенні констант подібності; 3) виведенні рівнянь констант; 4) встановленні відповідності констант подібності рівнянням констант; 5) встановленні подібності умов однозначності.

Синтез подібності складається з: 1) вибору відповідного об’єкта, який описується рівняннями, подібними до рівнянь, що описують даний об’єкт; 2) введення рівнянь констант; 3) вибору констант подібності, що задовольняють рівняння констант; 4) забезпечення подібності умов однозначності.

На рис. 1.11 наведений приклад двох подібних моделей різної фізичної природи.



а)



б)

Рисунок 1.11 - Подібні моделі: а) механічна, б) електрична

Механічна модель описується системою

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 t + \dfrac{F}{m} \cdot \dfrac{t^2}{2} \\ v = \dfrac{dx}{dt} = v_0 + \dfrac{F}{m} t \\ a = \dfrac{d^2 x}{dt^2} = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{F}{m} \end{cases} .$$

Електрична модель описується системою інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} u_4 = \dfrac{1}{R_1C_1}\int\limits_0^t u_1 dt \\ u_5 = \dfrac{1}{R_2C_2}\int\limits_0^t (u_2 - u_4) dt \\ u_6 = u_3 - u_5 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \dfrac{du_4}{dt} = \dfrac{1}{R_1C_1}u_1 \\ \dfrac{du_5}{dt} = \dfrac{1}{R_2C_2}(u_2 - u_4) \\ u_6 = u_3 - u_5 \end{cases}$$

Між параметрами двох моделей існує відповідність

$$-u_1 \longleftrightarrow a$$

$$u_2 \longleftrightarrow v_0$$

$$u_3 \longleftrightarrow x_0$$

$$u_4 \longleftrightarrow \frac{F}{m}t$$

$$u_2 - u_4 \longleftrightarrow v_0 + \frac{F}{m}t$$

$$-u_5 \longleftrightarrow v_0 t + \frac{F}{m}\cdot\frac{t^2}{2}$$

$$u_6 \longleftrightarrow x_0 + v_0 t + \frac{F}{m}\cdot\frac{t^2}{2}$$

Якщо умови подібності виконуються, то для фактичного розрахунку всіх характеристик об’єкта за даними про розмірні характеристики на моделі необхідно знати перехідні коефіцієнти для всіх відповідних величин. Якщо явище визначається n параметрами, з яких k мають незалежну розмірність, то для величини з незалежними розмірностями перехідні коефіцієнти можуть бути довільні і їх потрібно задати з урахуванням умови задачі, а при експериментах – і з урахуванням умов досліду. Перехідні коефіцієнти для всіх інших розмірних величин отримують з формул, які виражають розмірність кожної розмірної величини через розмірність k величин з незалежними розмірностями, для яких коефіцієнти підказані умовами досліду і постановкою задачі.

Теорія подібності є логічною основою самої ідеї моделювання, коли на основі дослідження математичних залежностей, параметрів та властивостей одних об’єктів (як реальних, фізичних, так і формальних, математичних) роблять висновки щодо поведінки інших об’єктів.

1.4.3 Взаємний зв'язок та перетворення моделей

Моделі різних типів тісно пов'язані між собою і можуть перетворюватися одна в одну (повністю у випадку ізоморфних моделей і частково у випадку гомеоморфних).

Цей підхід ґрунтується на усвідомленні того, що всі моделі об'єктів відображають одну й ту ж об'єктивну реальність різними методами і у різних формах. Отже, між ними повинен бути тісний зв'язок. Схематично цей зв'язок зображений на рис. 1.12.

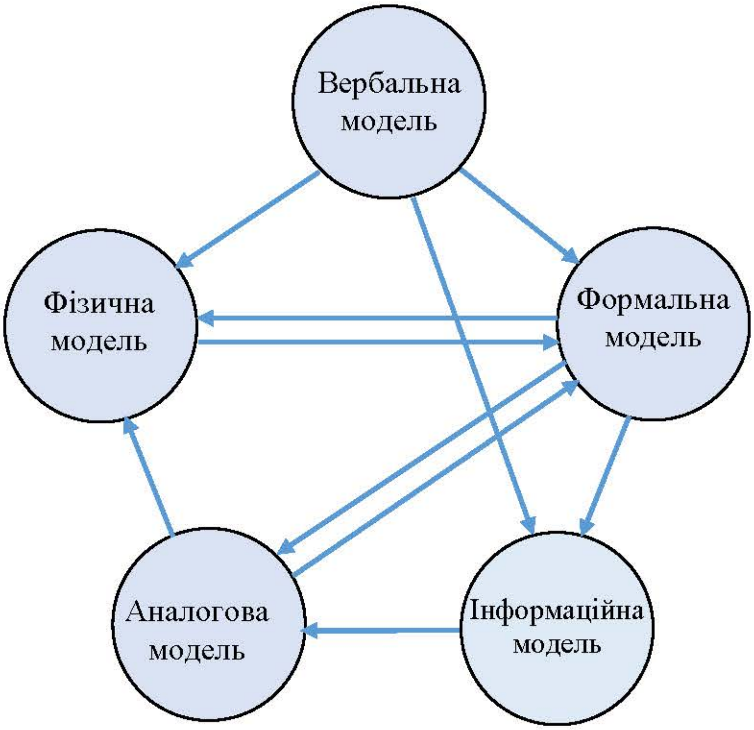


Рисунок 1.12 – Система моделей

Кожна з моделей має свої переваги і недоліки, а обрання за основу тої чи іншої моделі зумовлене метою та смаками дослідника.

1.4.4 Аналіз і синтез моделей

Слід відзначити, створювана модель системи S, з точки зору системного підходу, також є системою S' і може розглядатися відносно зовнішнього середовища E. Найпростіші за поданням є моделі, в яких немає ніякої деталізації, а зберігаються лише фундаментальні закони і загальні закономірності поведінки елементів системи. Правильне розуміння взаємозв'язків як всередині самої моделі M, так і взаємодії її з зовнішнім середовищем E, значною мірою визначається тим, на якому рівні знаходиться спостерігач.

В основі системного підходу лежить розгляд системи як інтегрованого цілого, причому цей розгляд при розробці починається з головного: формулювання загальної мети моделювання. Моделі окремих підсистем, якщо така деталізація необхідна, отримуються шляхом *аналізу* загальної мети і моделі системи. Розробка моделі означає *синтез* окремих компонент в єдину модель, причому кожна з компонент вирішує свої власні задачі та ізольована від інших частин моделі.

На базі системного підходу може бути запропонована і деяка послідовність розробки моделей, коли виділяють дві основні стадії проектування: *макропроектування* і *мікропроектування*.

На стадії макропроектування на основі даних про реальну систему і зовнішнє середовище будується модель зовнішнього середовища, виявляються ресурси і обмеження для побудови моделі системи, вибирається модель системи і критерії, які дозволяють оцінити адекватність моделі реальній системі.

На стадії мікропроектування визначаються деталі внутрішньої структури і параметри моделі, створюються засоби її реалізації. На цій стадії можна встановити основні характеристики створеної моделі, оцінити час роботи з нею і витрати ресурсів для отримання заданої якості моделі системи.

1.4.5 Модель як σ-алгебра

Фундаментальною основою математичного моделювання є *теорія моделей*. Виникла на початку 30-х років XX ст. на основі семантичних досліджень в математичній логіці і розвитку *теорії універсальних алгебр*. Основи теорії моделей розроблені в роботах Д. Гільберта, А. Тарского, А. І. Майцева, К. Геделя, Е. Лося та інших. В теорії моделей досліджуються загальні властивості *алгебраїчних систем*, аксіоматизація класів алгебраїчних систем тощо.

Відповідно до загального підходу модель можна розглядати як певну алгебраїчну систему, яка складається з множини об’єктів, що описуються даною моделлю, набору операцій, які можуть з ними виконуватися, та властивостей, які вони мають.

У практиці моделювання загальна теорія моделей знайшла втілення у технології об’єктно-орієнтованого програмування. Ця технологія ґрунтується на поняттях об’єкта та класу. Фактично *клас* – це програмна реалізація алгебраїчної системи, яка містить визначення множини об’єктів,– “типу даних”, та операцій, які можуть до них застосовуватися – “методів”. Програмна модель, написана за технологією об’єктно-орієнтованого програмування, є системою об’єктів, що взаємодіють один з одним.

1.4.6 Метричний простір моделей

Ще одним аспектом загальної теорії моделей є використання поняття *топологічного і метричного простору*. Ці поняття вкрай важливі для обґрунтування методів оцінювання точності, вірогідності і адекватності моделей.

Топологічний простір – основний об'єкт вивчення топології. Поняття топологічного простору можна розглядати як узагальнення поняття геометричної фігури, в якому ми відволікаємося від властивостей на зразок розміру або точного положення частин фігури в просторі і зосереджуємося тільки на взаємному розташуванні частин. Топологічні простори виникають природно майже в усіх розділах застосувань математичного моделювання.

Наведемо основні означення.

Нехай дана множина X. Система T її підмножин називається ***топологією на X***, якщо виконані такі властивості:

1) об'єднання довільного сімейства множин, що належать T, належить T;

2) перетин кінцевого сімейства множин, що належать T, належить T;

3) X і $\varnothing$ належать T.

Множина X разом із заданою на ній топологією T називається ***топологічним простором***. Множини, що належать T, називаються відкритими множинами.

Якщо не вдаватися до чітких математичних означень теорії множин, то топологічний простір – це множина об’єктів, для яких визначене поняття гомеоморфізму моделей. Якщо розглядати систему як множину взаємопов’язаних підсистем, то наявність безпосередніх зв’язків можна інтерпретувати як найближче оточення. Таким чином, структурна модель системи ще може розглядатись як *топологічний простір*.

Метричним простором називається множина, у якій визначена відстань між будь-якою парою елементів.

Метричний простір M є множиною точок з функцією відстані (також називається метрикою) $d: M \times M \to R$, де R позначає множину реальних чисел. Для будь-яких точок x, y, z з M ця функція повинна відповідати таким умовам (аксіомам метрики):

$$
\begin{aligned}
&d(x, y) \geq 0; \\
&d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y; \\
&d(x, y) = d(y, x) \ \text{(симетрія)}; \\
&d(x, y) \leq d(x, y) + d(y,z) \ \text{(нерівність трикутника)}.
\end{aligned}
\tag{1.39}
$$

Ці аксіоми відображають інтуїтивне поняття відстані. Наприклад, відстань повинна бути додатною; відстань від x до y така ж, як і від y до x. Нерівність трикутника означає, що пройти від x до z можна коротше, або хоча б не довше, ніж спочатку пройти від x до y, а потім від y до z.

З іншого боку, кожну множину гомеоморфних моделей можна вважати “найближчим оточенням” деякого елемента, в ідеальному випадку – абсолютно адекватної моделі. Якщо у такому топологічному просторі задана *метрика*, то адекватність може бути охарактеризована кількісно величиною відхилення моделі, або точністю.