

1.5 Моделі в умовах невизначеності

Функціонування об'єктів і систем керування ґрунтується на певній *інформації* про стан системи, параметри та мету керування. Але ця інформація ніколи не буває абсолютно повною, точною і достовірною. В результаті системи керування завжди працюють в *умовах* певної *невизначеності*.

Врахування невизначеності приводить до суттєвого ускладнення математичного моделювання об'єктів і систем керування. Оскільки моделі використовуються на всіх етапах життєвого циклу, то протягом всієї історії розвитку теорії керування, особливо у період відсутності великих обчислювальних потужностей, перед дослідниками стояла задача всілякого спрощення математичних моделей. Тому в першу чергу розроблялися методи моделювання детермінованих систем, в яких невизначеністю нехтували.

Але детерміновані моделі не завжди дозволяють прийняти об'єктивне управлінське рішення, оскільки не враховують його ризик, що виникає внаслідок невизначеності обставин його прийняття.

У багатьох випадках нехтування невизначеністю приводить не просто до певних похибок, а до втрати адекватності моделі взагалі. Найкраще це було доведено у теорії інформації, яка стала базовою концептуальною моделлю систем зв'язку.

1.5.1 Джерела і види невизначеності моделей

Невизначеність моделей систем зумовлена багатьма факторами:

- заміною фактичних даних статистичними характеристиками або експертними оцінками;
- похибками вимірювань та завадами при передаванні інформації;
- неможливістю повністю проконтролювати стан великої розподіленої системи;
- прогнозуванням процесів тощо.

Як вже зазначалося раніше, модель системи складається з моделі сигналів і моделі перетворення. В умовах невизначеності модель сигналу характеризує можливі зміни значень сигналу, а модель перетворення характеризує можливі зміни параметрів або структури зв'язків підсистем.

Модель об'єкта, в поданні якої врахована невизначеність, називатимемо невизначеною моделлю. Невизначені моделі розрізняються в залежності від аспекту об'єкта, опис якого здійснюється за допомогою моделі. Основні види невизначених моделей показані на рис. 1.13.

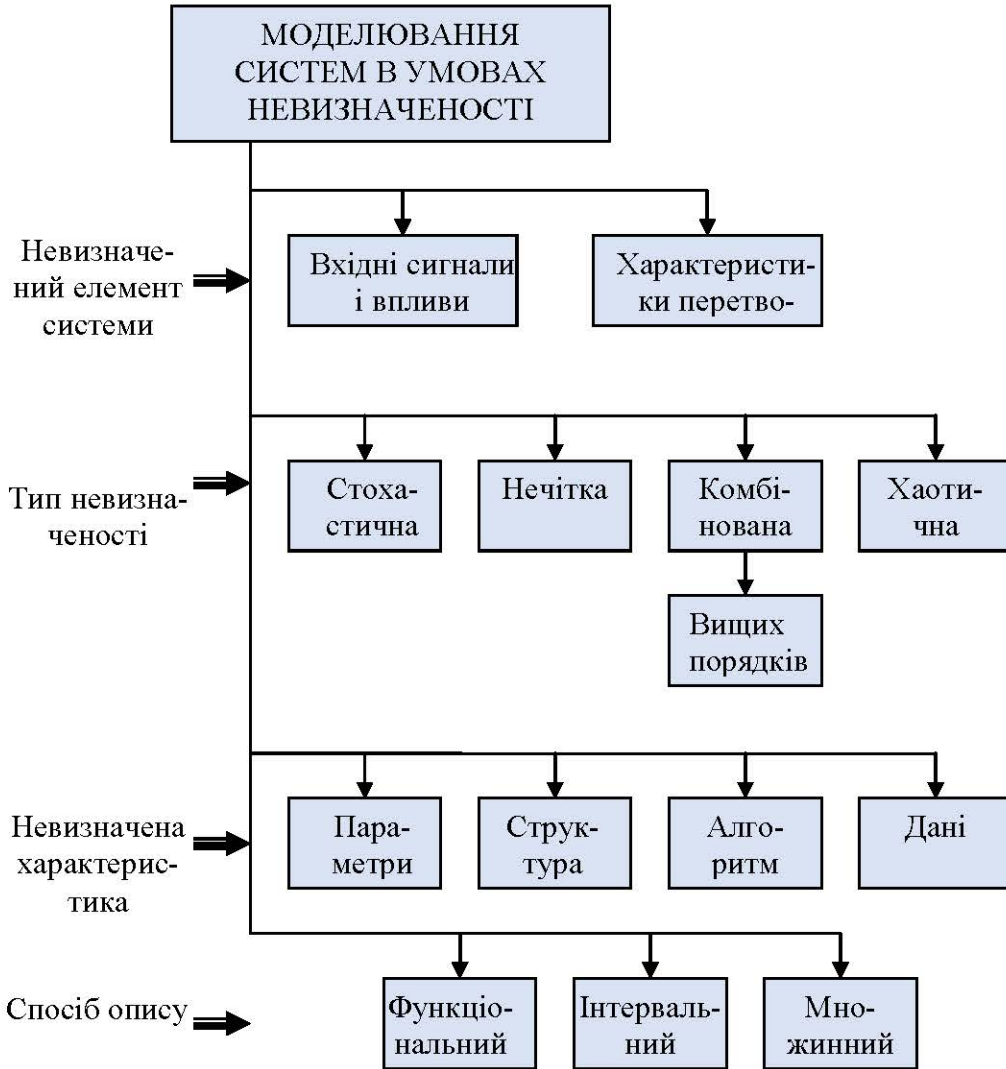


Рисунок 1.13 – Характеристики невизначеності моделей об’єктів і систем керування

1.5.2 Типи невизначеності моделей

1.5.2.1. Стохастична невизначеність

Стохастичною називають невизначеність, яка зумовлена дією випадкових факторів впливу.

Елементарні поняття про випадкові події, величини і функції

Випадковою називається подія, яка може або виникнути при реалізації даного комплексу умов, або не виникнути. Достовірні і неможливі події можуть розглядатися як окремі крайні випадкові події.

Згідно з теоретико-множинним підходом при розгляді поняття «випадкова подія» введемо поняття “елементарна подія”.

Елементарна подія – це один з декількох можливих результатів того чи іншого дослідження (випробування). При вивченні випадкових подій в ході розробки математичних моделей використовується, як правило, не одна, а група подій, між якими існують певні співвідношення.

- Подія A міститься в події B ($A \subset B$).
- Тотожні події ($A = B$).
- Добуток подій (відбуваються обидві події A і B) $C = A \cdot B$ або $C = A \cap B$, $A = A \cdot A$.

- Несумісні події $A \cdot B = \emptyset$.
- Сума подій (об’єднання подій – відбувається хоча б одна з подій A і B або обидві разом) $C = A + B$ або $C = A \cup B$.

– *Повна група подій*. Події A і B складають повну групу подій, якщо при реалізації заданого комплексу умов неодмінно відбудеться хоча б одна з цих подій. Сума всіх таких подій є подія достовірна:

$$C = A + B = U.$$

- *Протилежні події* $A + \bar{A} = U$; $A \cdot \bar{A} = \emptyset$.

Кількісною мірою ступеня можливості появи випадкової події для заданого комплексу умов є *ймовірність події*.

Властивості ймовірностей подій.

1. Ймовірність неможливої події дорівнює нулю, тобто $P(\emptyset) = 0$.
2. Для будь-якої події A ймовірність протилежної події \bar{A} дорівнює: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
3. Якщо подія A тягне за собою подію B , тобто $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$.
4. Ймовірність події A розташована між нулем і одиницею, тобто $0 \leq P(A) \leq 1$.
5. Ймовірність двох подій A і B дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх добутку: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

У ряді випадків доводиться знаходити ймовірності подій при умові, що відбулася деяка подія B . Такі ймовірності називаються *умовними* і позначаються $P(A/B)$.

Подія A називається *незалежною* від іншої події B , якщо ймовірність події A не змінюється від того, настає подія B чи ні. В іншому випадку подія A називається *залежною* від події B . Отже, якщо події A і B незалежні, то $P(A/B) = P(A)$. Ймовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірностей однієї з цих подій на умовну ймовірність іншої за умови, що перша відбулася:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B). \quad (1.40)$$

Ймовірність добутку незалежних подій дорівнює:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \quad (1.41)$$

Якщо події несумісні, то правило додавання ймовірностей приймає вигляд:

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (1.42)$$

Якщо несумісні події складають повну групу, тобто

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = U \text{ і } A_i A_j = \emptyset, i \neq j$$

то:

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) = 1. \quad (1.43)$$

Випадковою називається така *величина*, яка в результаті випробувань може прийняти те чи інше значення.

Випадкові величини поділяються на дискретні і неперервні. Крім дискретної і неперервної випадкових величин зустрічаються *випадкові величини змішаного типу*, для яких, разом з ділянками неперервних значень, є окремі, ізольовані значення.

Для того, щоб задати випадкову величину, необхідно задати множину значень, які вона може приймати, і ймовірності, з якими вона приймає ці значення. Відповідь на це питання дає вичерпна характеристика випадкової величини – *закон розподілу*.

Закон розподілу дозволяє визначити ймовірність появи випадкової величини в будь-якому інтервалі (і, зокрема, ймовірності будь-яких значень дискретної випадкової величини).

Основними формами закону розподілу є: ряд розподілу, функція розподілу і щільність розподілу.

Ряд розподілу є таблицею, в якій перераховані можливі значення випадкової величини і відповідні їм ймовірності. *Ряди розподілу*, утворені зі значень випадкової величини, що характеризують якісну ознаку, називаються *атрибутивними*. Ряди розподілів, утворені зі значень випадкової величини, що характеризують кількісну ознаку явища (події), називаються *варіаційними*.

Для характеристики неперервної випадкової величини визначають ймовірність появи значення випадкової величини меншого x , де x – поточна змінна, тобто визначають ймовірність події $X < x$. Ймовірність цієї події залежить від x , тобто є функцією x . Ця функція називається *функцією розподілу випадкової величини* X і позначається $F(x)$:

$$F(x) = P(X < x). \quad (1.44)$$

Ймовірність потрапляння випадкової величини у напівзамкнений інтервал $[a, b)$

$$P(a \leq x < b) = F(b) - F(a). \quad (1.45)$$

Функція розподілу є неспадна функція, значення якої починаються з нуля і доходять до одиниці, причому, в окремих випадках функція може мати стрибки-розриви.

Функцію розподілу дискретної випадкової величини можна визначити, знаючи її ряд розподілу, за формулою:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(x_i). \quad (1.46)$$

Для неперервної випадкової величини визначають ймовірність появи випадкової величини в межах малого інтервалу $[x, x + \Delta x)$. Розділивши цю ймовірність на довжину інтервалу Δx , знаходять середню щільність ймовірності і при необмеженому зменшенні довжини інтервалу переходять до границі, яка є щільністю розподілу в точці x :

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X < x + \Delta x)}{\Delta x}. \quad (1.47)$$

Ймовірність потрапляння випадкової величини на довільну ділянку $[a, b)$ дорівнює:

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) \cdot dx. \quad (1.48)$$

Інтеграл в нескінченних границях від щільності розподілу дорівнює одиниці, тобто $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = 1$. Це очевидно, оскільки зазначений інтеграл виражає ймовірність достовірної події – потрапляння випадкової величини на ділянку від $-\infty$ до $+\infty$, а тому і дорівнює одиниці.

Щільність розподілу є похідною функції розподілу. З іншого боку, $F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x)$, звідки

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) \cdot dx. \quad (1.49)$$

Величину $F(x)$ називають *інтегральною функцією розподілу* величини X . Величина $f(x)$ – *диференціальна функція розподілу* випадкової величини X . Для оцінювання особливостей законів розподілу випадкових величин визначають числові характеристики цих величин.

При моделюванні об'єктів і систем керування переважно розглядаються не окремі випадкові величини, а сукупності випадкових величин; сукупність впливів на об'єкт, сукупність станів об'єкта тощо. Такі сукупності випадкових величин описуються багатовимірними законами розподілу, зокрема, багатовимірною диференціальною функцією розподілу $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Для незалежних випадкових величин $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \dots \cdot f_n(x_n).$$

Для багатовимірної диференціальної функції розподілу ймовірностей виконується базова умова

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1.$$

Числові характеристики випадкових величин

При вирішенні багатьох практичних задач часто досить вказати окремі числові характеристики, що визначають особливості того чи іншого розподілу випадкової величини. Ці характеристики називають *моментами розподілу*.

Моменти розподілу поділяються на початкові і центральні.

В загальному випадку початкові моменти розподілу

$$M_X^{(k_1 \dots k_n)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} f_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad (1.50)$$

а центральні

$$D_X^{(k_1 \dots k_n)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_1)^{k_1} \dots (x_n - m_n)^{k_n} f_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (1.51)$$

де m_i – перший центральний момент (математичне сподівання) випадкової величини x_i .

Для оцінювання ступеня розкиду, розсіювання значень випадкової величини відносно середнього використовують перший початковий і другий центральний моменти:

- математичне сподівання;
- дисперсію

та пов'язані з ними показники:

- середнє квадратичне відхилення;
- коефіцієнт варіації.

Середнє значення, або математичне сподівання дискретної випадкової величини обчислюється за формулою

$$M[x] = m_x = a = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \quad (1.52)$$

де x_i – можливі значення випадкової величини X ; p_i – ймовірність появи можливого значення випадкової величини X .

Математичне сподівання є теоретичною характеристикою випадкової величини при нескінченно великій кількості випробувань.

Емпіричною характеристикою випадкової величини при скінченній кількості випробувань є *емпіричне середнє*, що обчислюється за формулою

$$\bar{X} = M^*[X] = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + \dots + x_n \cdot m_n}{N} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{m_i}{N}, \quad (1.53)$$

або $M^*[X] = \sum_{i=0}^n x_i \cdot p^*(x_i)$, де $p^*(x_i) = \frac{m_i}{N}$ – частота значень x_i при N спостереженнях (випробуваннях); $N = \sum_{i=1}^n m_i$; m_i – кількість появ значень x_i при N спостереженнях.

Емпіричне середнє випадкової величини зі збільшенням числа випробувань (спостережень) наближається до математичного сподівання.

Для неперервної випадкової величини X математичне сподівання визначається інтегралом

$$M[x] = m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Дисперсією називається математичне сподівання квадрата відхилень випадкової величини від свого математичного сподівання. Середнє квадратичне відхилення дорівнює додатному значенню кореня квадратного з дисперсії

$$y_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{M[(X - m_x)^2]}. \quad (1.54)$$

Середнє квадратичне відхилення має однакову розмірність з випадковою величиною, в цьому полягає його перевага.

Дисперсія дискретної випадкової величини обчислюється за формулою

$$D_x = \sigma_x^2 = \sum_{i=1}^n [(x_i - m_x)^2 \cdot p(x_i)]. \quad (1.55)$$

Дисперсія неперервної випадкової величини обчислюється за формулою

$$D_x = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [(x - m_x)^2 \cdot f(x)] dx. \quad (1.56)$$

Емпіричні значення характеристик розсіювання обчислюють за формулами:

дисперсія

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \frac{m_i}{N}; \quad (1.57)$$

середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_x = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \frac{m_i}{N}}. \quad (1.58)$$

Якщо число випробувань (спостережень) $N \geq 30$, то характеристики розсіювання обчислюють за формулами:

дисперсія

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \frac{m_i}{N-1}; \quad (1.59)$$

середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_x = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \frac{m_i}{N-1}}. \quad (1.60)$$

Величини u_x^2 і u_x показують абсолютне відхилення від середнього значення випадкової величини, що недостатньо характеризує рівень її розсіювання. Відносною характеристикою розсіювання є *коефіцієнт варіації*, що обчислюється як відношення середнього квадратичного відхилення до емпіричного середнього

$$V = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \cdot 100\%, \quad (1.61)$$

або

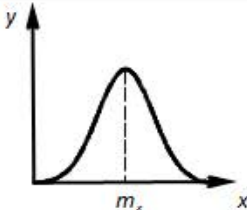
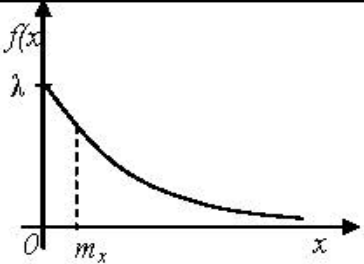
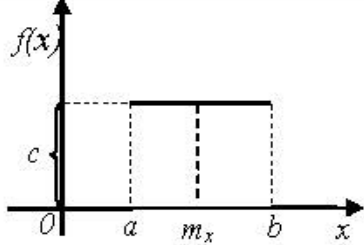
$$V = \frac{\sigma_x}{\bar{x}}. \quad (1.62)$$

Коефіцієнт варіації є безрозмірною величиною і може використовуватися для порівняння міри розсіювання випадкових величин, що мають різну розмірність.

Основні найпоширеніші закони розподілу наведені у таблиці 1.1.

Випадковий процес (стохастичний процес) показує зміни в часі випадкової величини, зокрема, зміни стану системи, які викликані випадковими впливами. Кількісно випадковий процес описується випадковою функцією часу $X(t)$, яка в будь-який момент часу t може приймати різні значення з певним розподілом ймовірностей. Таким чином, для будь-якого $t = t_i$ значення $X_i = X(t_i)$ є випадковою величиною.

Таблиця 1.1 – Типові розподіли ймовірностей

Закон розподілу	Щільність розподілу (ймовірність – для дискретних величин)	Графік щільності розподілу (ймо- вірності)	Моменти розподілу
Нормальний	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \cdot e^{-\frac{(x-b)^2}{a}}$		$m_x = b$ $D_x = a/2$
Експоненційний (показниковий)	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0, \lambda > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \lambda > 0. \end{cases}$		$m_x = \sigma = 1/\lambda$ $D_x = 1/\lambda^2$
Рівномірний	$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a; \\ \frac{1}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b; \\ 0 & \text{при } x > b. \end{cases}$		$m_x = (a+b)/2$ $\sigma_x = (b-a)/2 \sqrt{3}$

<p>Біноміальний</p>	$P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ $(m = 0, 1, \dots, n), q = 1 - p,$ $0 \leq p \leq 1.$		$m_x = np$ $\sigma_x = \sqrt{npq}$
<p>Пуассона</p>	$P(x = m) = \frac{(a^k \cdot e^{-a})}{k!} = \frac{a^k}{k!} \cdot e^{-a}, k =$ $0, 1, 2, \dots,$		$m_x = a$
<p>Гама-розподіл</p>	$f(x; \alpha) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & \text{при } x > 0. \end{cases}$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$		$m_x = \frac{\alpha}{\beta}$ $D_x = \frac{\alpha}{\beta^2}$ $\Gamma(k) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{k-1} dt$
<p>Бета-розподіл</p>	$f(x; \alpha) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, x \geq 1, \\ \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} & \text{при } 0 < x < 1 \end{cases}$ $(\alpha > 0, \beta > 0).$		$m_x = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$ $D_x = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$

У випадку багатократних повторень одного і того ж випадкового процесу (паралельно у багатьох однотипних об'єктах або в різні проміжки часу у одному об'єкті) матимемо сукупність випадкових функцій часу. Випадковий процес визначається сукупністю цих функцій часу та законами, що характеризують властивості сукупності. Кожна з функцій цієї сукупності називається *реалізацією випадкової функції*.

Залежно від можливих значень часу t та реалізації $X(t)$ розрізняють чотири типи випадкових процесів:

- 1) випадковий процес загального типу: t і $X(t)$ можуть приймати будь-які значення на відрізку (чи на всій) дійсній осі;
- 2) дискретний випадковий процес: t неперервне, а величини $X(t)$ дискретні;
- 3) випадкова послідовність загального типу: t дискретно, а $X(t)$ може приймати будь-які значення на відрізку (чи на всій) дійсній осі;
- 1) дискретна випадкова послідовність: t і $X(t)$ обидва дискретні.

Найповнішою характеристикою випадкового процесу є його *багатовимірний розподіл ймовірностей* $f_n(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)$, де x_1, \dots, x_n – значення випадкової величини відповідно у моменти часу t_1, \dots, t_n . Але визначення такого розподілу є досить складною теоретичною і практичною задачею. Тому частіше використовують лише окремі числові характеристики такого розподілу – *моменти розподілу*.

В загальному випадку початкові моменти розподілу і центральні моменти є функціями часу:

$$M_X^{(k_1 \dots k_n)}(t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} f_n(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n, \quad (1.63)$$

$$D_X^{(k_1 \dots k_n)}(t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_1)^{k_1} \dots (x_n - m_n)^{k_n} f_n(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n \quad (1.64)$$

Найчастіше використовуються:

- *середнє* випадкового процесу (або перший початковий момент)

$$m_x(t) = M_X^{(1)} \{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x, t) dx, \quad (1.65)$$

- *дисперсія* випадкового процесу (або другий центральний момент)

$$D_x(t) = \sigma_x^2(t) = M_X^{(2)} \{[X(t) - m_x(t)]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - m_x(t)]^2 f_1(x, t) dx, \quad (1.66)$$

– *коваріаційна функція* випадкового процесу (або змішаний другий початковий момент)

$$K_{x_1x_2}(t_1, t_2) = M_X^{(2)} \{X(t_1) \cdot X(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2; \quad (1.67)$$

– *кореляційна функція* випадкового процесу (або змішаний другий центральний момент)

$$\begin{aligned} R_{x_1x_2}(t_1, t_2) &= M_X^{(2)} \{[X(t_1) - m(t_1)] \cdot [X(t_2) - m(t_2)]\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_1)(x_2 - m_2) f_2(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Легко помітити, що коваріаційна і кореляційна функції тісно пов'язані, тому часто вони заміняють одна одну.

Випадкові процеси можуть бути стаціонарними і нестаціонарними.

Випадковий процес $x(t)$ називається *стаціонарним*, якщо його функція розподілу $f_n(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)$ довільного порядку n не змінюється при будь-якому зсуві всієї групи точок t_1, t_2, \dots, t_n вздовж осі часу, тобто коли вираз функції розподілу довільного порядку не залежить від положення початку відліку часу

$$f(X, t) = f(X, t + \tau) = f(X). \quad (1.69)$$

Для стаціонарних процесів $m_x(t) = m_x = const$, $D_x(t) = D_x = const$, $K_x(t, t') = K_x(t' - t) = K_x(\Delta t)$.

Ергодичним називається стаціонарний випадковий процес, якщо будь-яка його ймовірнісна характеристика, яка одержана усередненням за множиною можливих реалізацій, дорівнює часовому середньому, яке одержане усередненням за достатньо великий проміжок часу з однієї єдиної реалізації випадкового процесу. Іншими словами, статистичні характеристики ергодичного процесу взагалі не залежать від часу.

Якщо стаціонарний випадковий процес $x(t)$, який заданий на відрізку $[0, T]$, ергодичний, то

$$m_x \approx \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad (1.70)$$

$$D_x \approx \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m_x]^2 dt, \quad (1.71)$$

$$R_{xx}(\tau) \approx \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} [x(t) - m_x][x(t+\tau) - m_x] dt. \quad (1.72)$$

Очевидно, $R_{xx}(0) = D_x$.

Найповнішою характеристикою стаціонарного випадкового процесу є сукупність диференціальної функції (щільності) розподілу ймовірностей і кореляційної функції.

Функціональна і ймовірнісна залежності

Більшість явищ та процесів знаходиться у постійному взаємному і всеохоплювальному об'єктивному зв'язку. Розрізняють два види залежностей між явищами і процесами:

- функціональну;
- стохастичну (ймовірнісну, статистичну).

У випадку функціональної залежності маємо однозначне відображення множини A на множини B . Множину A називають областю визначення функції, а множини B – множиною значень функції.

Функціональна залежність зустрічається рідко. В більшості випадків функція або аргумент випадкові величини. X і Y піддаються дії різних випадкових факторів, серед яких можуть бути фактори, що є спільними для двох випадкових величин.

Якщо на випадкову величину X діють фактори $Z_1, Z_2, \dots, V_1, V_2$, а на Y – $Z_0, Z_2, V_1, V_3, \dots$, то наявність двох спільних факторів Z_2 і V_1 дозволяє говорити про ймовірнісну або статистичну залежність між ними.

Статистичною називають залежність між випадковими величинами, при яких зміна однієї з величин тягне за собою зміну закону розподілу іншої величини. Відповідно до властивості (1.73) така залежність двох випадкових величин може бути записана у вигляді

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y/X) = f_2(y) \cdot f_1(x/Y).$$

Для системи n випадкових величин можна записати

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1) f(x_2 / x_1) f(x_3 / x_1 x_2) \dots f(x_n / x_1 x_2 \dots x_{n-1})$$

Статистична залежність проявляється лише в масовому процесі, при великому числі одиниць сукупності.

Статистичний зв'язок між значеннями випадкового процесу характеризує *кореляційна функція* (1.72). Якщо вона характеризує статистичний зв'язок між значеннями одного і того ж випадкового процесу у моменти t і $(t+\tau)$, то називається автокореляційною. Аналогічно можна охарактеризувати зв'язок двох процесів за допомогою взаємної кореляційної функції

$$R_{xy}(\tau) \approx \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} [x(t) - m_x][y(t+\tau) - m_y] dt. \quad (1.73)$$

З формально-математичної точки зору взаємна кореляційна функція є симетричною відносно осі ординат, тобто $R_{xy}(\phi) = R_{xy}(-\phi)$. Це означає однаковість статистичного зв'язку між значеннями y до моменту фіксації x і після нього. Проте з логічної точки зору якщо вважати X впливом на об'єкт, а Y – станом, який змінюється під дією цього впливу, то є сенс розглядати лише випадок, коли значення Y фіксується тільки після значення X .

Зручним способом опису процесів є їх *спектральне подання*. Але випадкові процеси не відповідають умовам перетворення Фур'є, яке використовується для знаходження *спектра*. Тому для моделювання динаміки стаціонарних систем в умовах невизначеності використовують *спектральну щільність потужності* – зображення за Фур'є не самого процесу, а його кореляційної функції:

$$G_{xx}(\omega) = \int_0^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1.74)$$

і

$$G_{xy}(\omega) = \int_0^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.75)$$

Типові кореляційні функції і спектральні щільності потужності ергодичних процесів показані у табл. 1.2.

З них виділимо випадковий процес, який у системах моделювання використовується як базовий, з якого шляхом достатньо простих перетворень отримують інші, складніші процеси. Цей процес – «білий шум». Така назва дана за аналогією з білим світлом, яке є сумішшю усіх кольорів з приблизно однаковою потужністю. Отже, білий шум має рівномірну спектральну щільність потужності на всій осі частот. Відповідно, автокореляційна функція такого процесу дорівнює нулю на всій осі часу (крім $\tau=0$).

Моделі випадкових процесів можуть використовуватися для опису в умовах невизначеності як сигналів у системі, так і характеристик їх перетворення (параметрів системи, структурних характеристик тощо).

Таблиця 1.2 – Типові кореляційні і спектральні характеристики

Вид процесу	Кореляційна функція		Спектральна щільність	
	Вираз	Графік	Вираз	Графік
Білий шум	$c^2 \delta[\tau]$		c^2	
Результат проходження білого шуму через ідеальний фільтр низьких частот	$\frac{c^2}{\pi \tau} \sin \omega_0 \tau$		$\begin{cases} c^2 & \text{при } \omega \leq \omega_0 \\ 0 & \text{при } \omega > \omega_0 \end{cases}$	

Вид процесу	Кореляційна функція		Спектральна щільність	
	Вираз	Графік	Вираз	Графік
Результат проходження білого шуму через реальний RC-фільтр низьких частот 1 порядку	$c^2 e^{-\alpha \tau }$ де $\alpha = \frac{1}{RC}$		$\frac{2\alpha c^2}{\alpha^2 + \omega^2}$	
Результат проходження білого шуму через резонансну систему	$c^2 \cos(\beta\tau) e^{-\alpha \tau }$		$\alpha c^2 \left[\frac{1}{\alpha^2 + (\beta + \omega)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\beta - \omega)^2} \right]$	

1.5.2.2 Нечітка невизначеність

У складі систем керування часто використовуються підсистеми, що працюють з *експертною інформацією*. Вона використовується на етапах прогнозування, діагностики, проектування, планування, керування тощо для підтримки прийняття рішення.

Експерт – людина, яка за роки навчання та практики навчилася ефективно розв'язувати задачі, що належать до певної предметної області.

Одною з теорій, яка в останній час широко використовується для моделювання з використанням експертних оцінок, є *нечітка логіка*. Основні поняття та визначення були вперше розроблені Л. Заде як узагальнення відповідних властивостей і операцій класичної теорії множин.

Основним поняттям нечіткої логіки є поняття *нечіткої множини*.

Нечітка множина \tilde{A} на *універсальній множині* X – сукупність пар $(\mu_A(x), x)$, де $\mu_A(x)$ – ступінь належності елемента $x \in X$ до нечіткої множини \tilde{A} (зверніть увагу, що для звичайних «чітких» множин елемент або належить до множини – $x \in A$, або не належить – $x \notin A$, відповідно ступінь належності може приймати значення 1 або 0). Ступінь належності знаходиться в діапазоні $[0, 1]$ і може приймати дробові значення. Чим вищий ступінь належності, тим більшою мірою елемент універсальної множини відповідає властивостям нечіткої множини.

Експерти оперують переважно не числовими, а якісними характеристиками об'єктів у словесній формі.

Лінгвістичною змінною називається така змінна, значеннями якої є слова та словосполучення деякої природної чи штучної мови. Множину цих значень називають *терм-множиною*. *Термом* називається елемент терм-множини.

Функцією належності називається така функція, яка дозволяє обчислити ступінь належності довільного елемента універсальної множини до нечіткої множини. Функція належності $\mu^T(x)$ характеризує суб'єктивну міру впевненості експерта в тому, що чітке значення x відповідає нечіткому терму T .

Якщо універсальна множина складається з кінцевого числа елементів $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, тоді нечітка множина є «сукупністю пар» $\{\mu(x), x\}$.

Носій нечіткої множини A – сукупність елементів $x \in X$, для яких $\mu_A(x) > 0$, він позначається $\text{supp } A$.

Фаззифікація (від англ. *fuzzy* – нечіткий) – зіставлення множини значень x з її функцією належності $\mu(x)$, тобто переведення значень x у нечіткий формат.

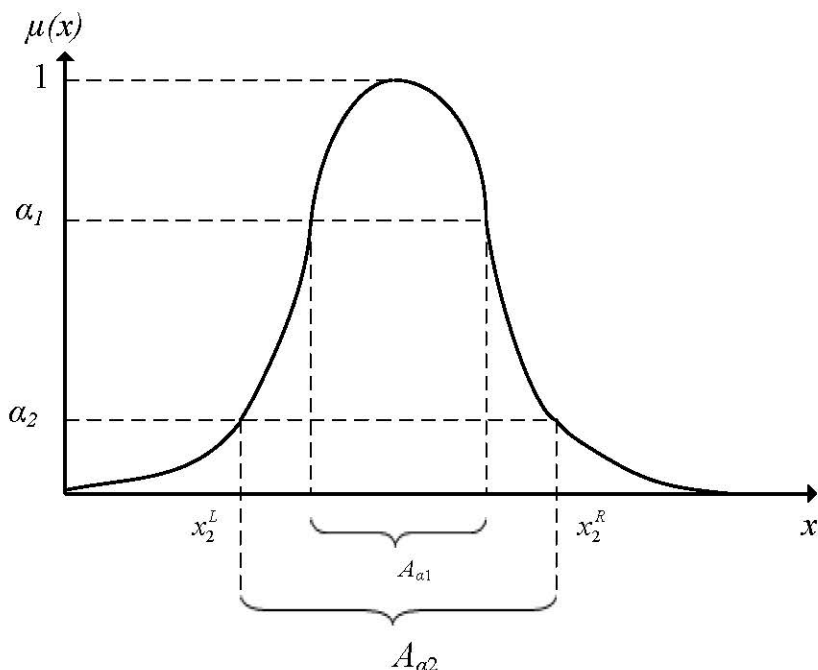
Дефаззифікація – процес, обернений фаззифікації.

Функції належності можуть задаватися як у звичайному функціональному вигляді, так і у вигляді розбиття цієї функції на α -рівні і визначення лівої і правої точок перетину цих рівнів функцією належності.

Формально α -рівнем нечіткої множини $A \subseteq X$, називається множина $A_\alpha \subseteq X$ така, що

$$A_\alpha = \{x \in X : \mu^A(x) \geq \alpha\}. \quad (1.76)$$

Приклади α -рівневого подання нечіткої множини показані на рис. 1.14.



1.14 - α -рівні нечіткої величини

Таким чином в α -рівневому поданні нечітка множина задається сукупністю пар $\{X^L, X^R\}$ (ліва і права границі інтервалу) на рівні $0 \leq \alpha \leq 1$. На рис. 1.14 на рівнях α_1 і α_2 ці інтервали (множини значень) позначені відповідно A_{α_1} і A_{α_2} .

Операція знаходження відповідності «якщо $A' \subseteq X$ то $B \subseteq Y$ » для нечітких множин A' і B називається *нечітким логічним висновком* і виконується за формулою:

$$B' = \sum_{j=1}^m \sup_{i=1,1} [\inf(\{\mu^{A'}(x_i), \mu^B(x_i, y_j)\} / y_j)], \quad (1.77)$$

де $A, A' \subseteq X$, $B, B' \subseteq Y$; \sup – верхня границя (максимальне значення), \inf – нижня границя (мінімальне значення).

Формула (1.77) називається *max-min-композицією* нечітких множин.

Останнім часом поняття теорії нечітких множин та нечіткої логіки розповсюджені на операції з числами в умовах невизначеності. В результаті створений і активно розвивається новий фундаментальний напрямок математичного моделювання – *нечітка математика*.

Поняття нечіткого числа

Теорія нечітких чисел введена Дюбуа і Прейдом. Використання нечітких змінних і правил їх обробки допомагає значно покращити опис функціонування складних систем з невизначеностями і підвищити якість рішень, які приймаються щодо таких систем.

Нечітке число – це нечітка множина A , що визначена на множині дійсних чисел R , якщо його функція належності нормальна, неперервна і опукла, тобто

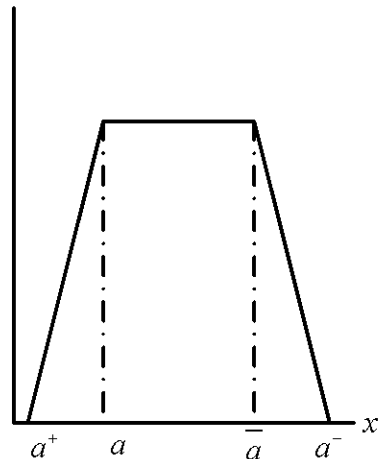
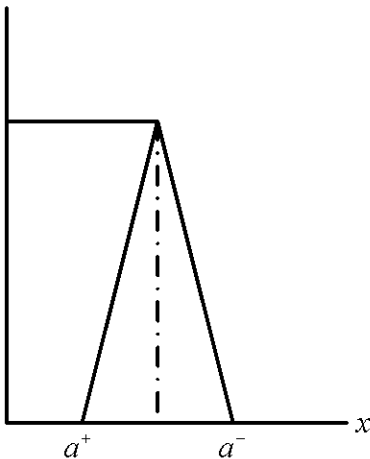
$$\sup_{x \in R} \mu^A(x) = 1, \quad (1.78)$$

$$x \leq y \leq z \Rightarrow \mu^A(y) \geq \inf(\mu^A(x), \mu^A(z)) \quad (1.79)$$

Нечіткі числа можуть задаватися функціями належності різної форми.

Трикутні нечіткі числа (рис. 1.15, а) мають функцію належності вигляду

$$\mu^A(x) = \begin{cases} (x - a^-) / (a - a^-), & a^- \leq x \leq a \\ (a^+ - x) / (a^+ - a), & a \leq x \leq a^+ \end{cases} \quad (1.80)$$



Крім того, функція належності може мати трапецієподібну форму (рис. 1.15, б)

$$\mu^A(x) = \begin{cases} (x - a^-) / (\underline{a} - a^-), & a^- \leq x \leq \underline{a} \\ 1, & \underline{a} \leq x \leq \bar{a} \\ (a^+ - x) / (a^+ - \bar{a}), & \bar{a} \leq x \leq a^+ \end{cases} \quad (1.81)$$

Останнім часом найчастіше використовуються дзвоноподібні функції належності

$$\mu^A(x) = e^{-\frac{(x-a)^2}{b^2}}, \quad (1.82)$$

де a – медіана функції належності, b – її розкид на рівні $e = 2,718$.

1.5.2.3 Хаотична невизначеність

Теорія хаосу – математичний апарат, що описує поведінку деяких нелінійних динамічних систем, у яких спостерігається явище, відоме як хаос. Поведінка такої системи здається випадковою навіть якщо моделі, що описують усі елементи системи, є детермінованими. Прикладами подібних систем є атмосфера, турбулентні потоки, біологічні популяції, суспільство як система комунікацій та його підсистеми: економічні, політичні та інші соціальні системи.

Теорія хаосу свідчить, що складні системи надзвичайно залежні від початкових умов і невеликі зміни в навколишньому середовищі ведуть до непередбачуваних наслідків. Теорія вводить поняття атракторів, стійких траєкторій системи.

Атрактор (англ. attract – залучати, притягати) – множина станів динамічної системи, до яких вона наближається з плином часу. Найпростішими варіантами атрактора є нерухома точка стійкої рівноваги (наприклад, в задачі про маятник з тертям).

Для того, щоб динамічна система була хаотичною, вона повинна бути нелінійною. Чутливість до початкових умов в такій системі означає, що всі траєкторії, спочатку близько розташовані одна до одної, в майбутньому можуть значно відрізнятись. Таким чином, маленька зміна поточної траєкторії може призвести до значної зміни у її майбутній поведінці. Модель хаотичної системи подається жорсткими рівняннями (див. вище). Приклад такої системи зображено на рис. 1.16.

Чутливість до початкових умов більш відома як «Ефект метелика». Помах крил метелика символізує дрібні зміни в початковому стані системи, які викликають ланцюжок подій, які ведуть до великомасштабних змін.

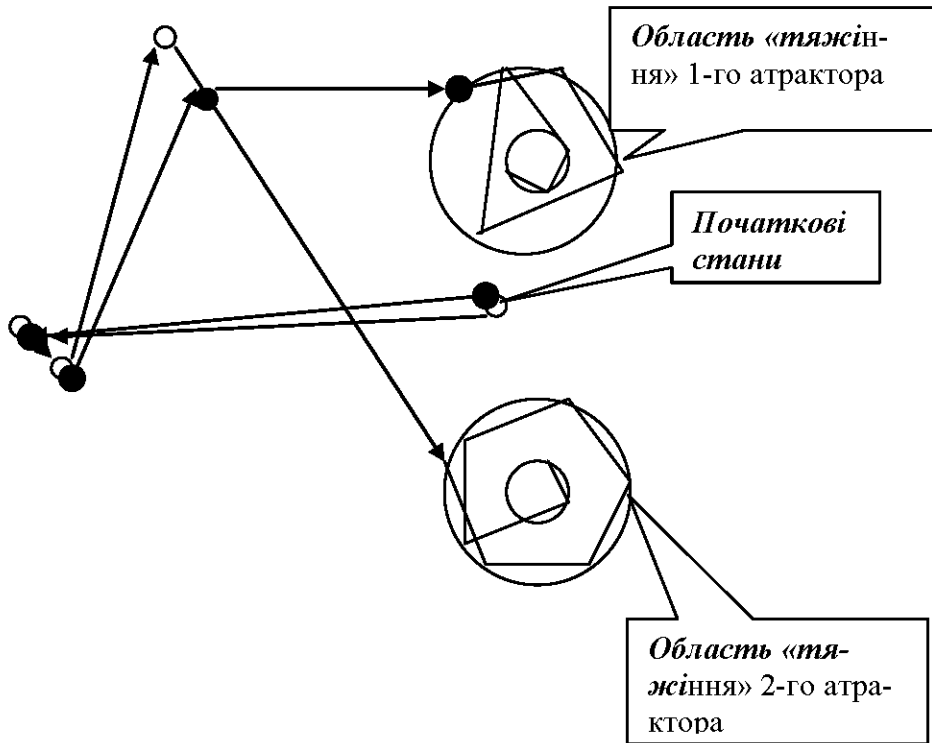


Рисунок 1.16 – В нелінійній системі, яка має два аттрактора, невелика різниця у початкових даних може привести до переходу системи у зовсім різні кінцеві стани.

Теорія хаосу застосовується в багатьох наукових дисциплінах. У технологічних об'єктах хаотичну поведінку можна спостерігати в різних системах, наприклад, великі електричні системи, хімічні реакції, турбулентні потоки рідин тощо.

Тільки за вихідними даними важко сказати, яким є спостережуваний процес – випадковим або хаотичним. Цьому перешкоджають випадкові похибки вимірювань, які завжди виникають в процесі експериментальних досліджень систем. Наявність хаотичної складової найчастіше визначають або теоретичним аналізом, або як різницю між загальною невизначеністю стану системи і сумарною невизначеністю випадкових складових.

1.5.2.4 Узагальнена невизначеність

В системах контролю та керування одночасно можуть існувати причини виникнення різних типів невизначеності, основні з яких наведені у табл. 1.3.

В сучасних роботах запропоновано багато засобів формалізації комбінованої невизначеності. Прикладом такого формалізму є об'єднання імовір-

нісних моделей, моделей, заснованих на функціях довіри, нечітких моделей на базі логічних основ теорії Карнапа.

Таблиця 1.3 – Характеристики невизначеності основних підсистем

Підсистема	Характерні причини невизначеності			Характер невизначеності
	Вплив зовнішніх факторів	Передбачених	Мало факторів	
Об'єкт керування			Мало факторів	Стохастична
			Багато факторів, нелінійний об'єкт	Хаотична
		Непередбачених	Нечітка	
Виконавча підсистема	Адитивна похибка			Стохастична
	Мультиплікативна похибка			Стохастична
	Динамічна похибка			Нечітка або стохастична
Підсистема контролю	Адитивна похибка			Стохастична
	Мультиплікативна похибка			Стохастична
	Методична похибка			Нечітка
Підсистема формування закону керування	Обчислювальна похибка			Стохастична
	Припущення про рівень складності системи			Нечітка
	Залежність часу розрахунків від стану системи			Стохастична
Інтерфейс та передавання даних	затримка сигналу			Стохастична
	Невідповідність дисципліни обслуговування реальному стану процесу			Нечітка
Людина-оператор	Залежність швидкості реакції від психофізичного стану			Стохастична
	Залежність помилкових дій від психофізичного стану			Нечітка, хаотична або стохастична

Одним з підходів до створення єдиної нечітко-ймовірнісної концепції є нечітко-значна імовірнісна логіка.

В основі ще одного з підходів до узагальнення лежать узагальнені оператори кон'юнкції і диз'юнкції, які називають T-нормою і T-конормою.

Триангулярною нормою (T-нормою) називається функція $T: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, така, що для всіх $x, y, z \in [0,1]$ виконуються аксіоми:

комутативності :

$$(x, y) = T(x, y),$$

асоціативності:

$$T(y, z) = T(T(x, y), z),$$

монотонності:

$$T(y, z) = T(x, z) \text{ для будь-якого } y \leq z.$$

Граничні умови:

$$T(x, 1) = x \text{ або } T(x, 0) = 0 \text{ тобто, усі Т-норми збі-}$$

гаються на границі одиничного квадрата $[0, 1]^2$.

T-норма $T(x, y)$ є узагальненням оператора кон'юнкції у булевій логіці і операції *min* в нечіткій логіці.

T-конорма $S: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ задається як

$$S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y). \quad (1.83)$$

T-конорма $T(x, y)$ є узагальненням оператора диз'юнкції в булевій логіці і операції *max* в нечіткій логіці.

Окремі випадки *T-норми* і *T-конорми*.

а) Мінімум T_M і максимум S_M (операції нечіткої логіки):

$$T_\mu(\mu_x, \mu_y) = \min(\mu_x, \mu_y),$$

$$S_\mu(\mu_x, \mu_y) = \max(\mu_x, \mu_y);$$

б) Добуток T_P і ймовірнісна сума S_P (операції ймовірнісної логіки):

$$T_P(p_x, p_y) = p_x \cdot p_y;$$

$$S_P(p_x, p_y) = p_x + p_y - p_x \cdot p_y.$$

Для систем керування з *комбінованою невизначеністю* розроблено *метод узагальнювальних функцій (УФ)*.

Для стохастичного даного *УФ* збігається за властивостями зі щільністю розподілу ймовірностей $\beta(x) = f_X(x)$, рис. 1.17, а.

Для достовірного даного *УФ* (рис. 1.17, б) визначається як

$$\beta(x) = \delta(x), \quad (1.84)$$

де $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака.

Для нечіткого даного *УФ* визначається нормованою за площею функцією належності рис. 1.17, в

$$\beta(x) = \mu_H(x), \quad (1.85)$$

де $\mu_n(x)$ – нормована функція належності $\mu_n(x) = \frac{\mu(x)}{\int \mu(x) dx}$,

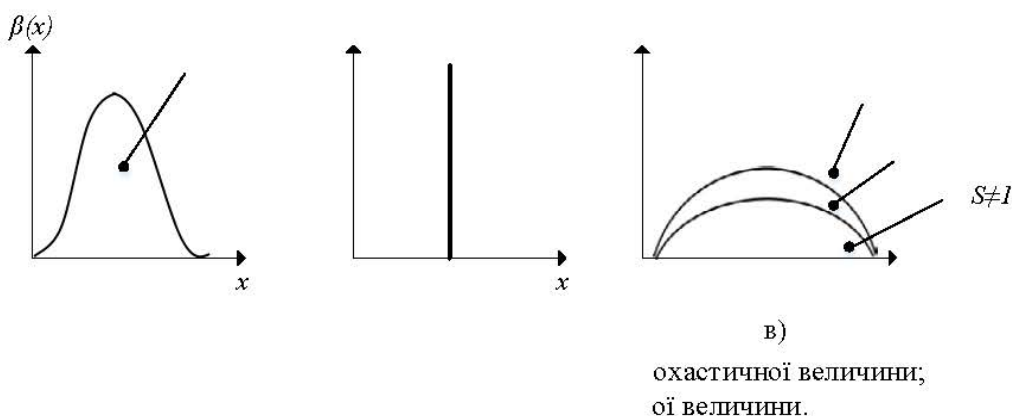
$\mu(x)$ – функція належності нечіткого числа з операцією диз'юнкції

$$\mu\left[\left(x \in \{\underline{x}_1, \bar{x}_1\}\right) \cup \left(x \in \{\underline{x}_2, \bar{x}_2\}\right)\right] = \mu\left(x \in \{\underline{x}_1, \bar{x}_1\}\right) + \mu\left(x \in \{\underline{x}_2, \bar{x}_2\}\right) \quad (1.86)$$

і операцією кон'юнкції

$$\mu\left[\left(x_1 \in \{\underline{x}_1, \bar{x}_1\}\right) \cap \left(x_2 \in \{\underline{x}_2, \bar{x}_2\}\right)\right] = \mu\left[x_1 \in \{\underline{x}_1, \bar{x}_1\}\right] * \mu\left[x_2 \in \{\underline{x}_2, \bar{x}_2\}, \mu^R\right] \quad (1.87)$$

де μ^R – характеристика взаємозв'язку нечітких змінних x_1 і x_2 .



1.5.2.5 Невизначеність вищих порядків

Існує широкий клас задач, в яких відомі методи можуть використовуватися лише зі значними обмеженнями і застереженнями. Це задачі перетворення невизначених вхідних даних, в яких параметри перетворення теж є невизначеними. Такі перетворення породжують невизначеність другого порядку, яка полягає у тому, що параметри підсумкової функції розподілу, функції належності або границі інтервалу, в свою чергу, описуються певними функціями невизначеності. Можна також уявити послідовність перетворень, яка породжуватиме невизначеність третього і більших порядків.

Окремі питання, пов'язані з поданням невизначеності вищих порядків, розглядаються у теорії нестационарних процесів та у нещодавно започаткованій теорії слабких множин, але системний підхід до аналізу невизначеностей вищих порядків досі не сформувався.

Додаткові проблеми виникають в умовах одночасної присутності нечіткої та стохастичної невизначеностей даних. Так, відсутні методи для моде-

лювання перетворень стохастичних даних перетворювачем з нечіткими параметрами і навпаки.

Способом розв'язання проблеми є розвиток операторного методу перетворення узагальнювальних функцій невизначеності в напрямку застосування і дослідження нелінійних інтегральних перетворень, які породжуються задачами з комбінованою невизначеністю вищих порядків. Ідея такого розвитку ґрунтується на міркуваннях:

– підвищення порядку невизначеності може бути подане як результат послідовної дії не повністю визначених операторів;

– не повністю визначений оператор перетворення невизначених даних, який є джерелом невизначеності другого порядку, може розглядатися як модель реального фізичного перетворювача, в якому невизначеність параметрів зумовлена невизначеністю зовнішніх впливів, отже невизначеність другого порядку може бути подана як взаємодія двох невизначених потоків даних.

При розв'язанні проблеми прийняття рішень в умовах невизначеності вищих порядків виникає задача оптимізації не повністю визначеного функціонала.

Розглянемо поняття квазістаціонарного процесу. Квазістаціонарним будемо називати процес, стаціонарний на кінцевому проміжку часу (t_1, t_2) .

Якщо на проміжку стаціонарності невизначений процес $X(t)$ описується функцією невизначеності $\beta_0(x, \xi)$, де ξ – невизначений параметр, що описується УФН $\beta_\xi(\xi)$, то усереднене значення УФН процесу на всій часовій осі.

$$\beta(x) = \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \beta_0(x, \xi) \beta_\xi(\xi) d\xi. \quad (1.88)$$

В результаті проведених досліджень узагальнена постановка задачі прийняття рішень для умов комбінованої невизначеності.

Аналіз аксіоматичної основи прийняття рішень в умовах комбінованої стохастичної та нечіткої невизначеності дозволив визначити систему аксіом, яка задовольняє умови незалежності, повноти і відсутності протиріч. Вона є підґрунтям для розробки теорії прийняття оптимальних рішень в умовах комбінованої невизначеності.

Для прийняття рішень в умовах комбінованої невизначеності узагальнено критерій мінімального ризику.

Запропонована концепція невизначеності вищих порядків дозволяє подавати не повністю визначений оператор перетворення невизначених даних, який є джерелом невизначеності другого порядку, як модель реального фізичного перетворювача, в якому невизначеність параметрів зумовлена невизначеністю зовнішніх впливів, тобто як взаємодія двох невизначених потоків даних.

1.5.3 Невизначені характеристики моделі

Відповідно до основних типів моделей виділяють параметричну, структурну, алгоритмічну і інформаційну невизначеності.

Параметрична невизначеність (не визначені параметри моделі)

Параметрична невизначеність характерна для об'єктів, моделі яких переважно подаються у вигляді різноманітних функціональних залежностей (разом з тим слід зазначити, що внаслідок гомеоморфізму невизначеність більшості моделей – структурних, алгоритмічних, інформаційних – може бути подана у параметричному вигляді).

В умовах параметричної невизначеності узагальнена модель системи (1.1) може бути подана у вигляді

$$\beta_Y = \Phi(\beta_{Z_1}, Z_2, X, Y)[\beta_X], \quad (1.89)$$

де $Z = Z_1 \cup Z_2$ – множина параметрів; Z_1 – підмножина невизначених параметрів; Z_2 – підмножина визначених параметрів; β_X – узагальнювальна функція вектора вхідних сигналів системи; де β_Y – узагальнювальна функція вектора вихідних сигналів системи; Φ – оператор перетворення.

Структурна невизначеність (невизначені графи)

Оскільки модель структури системи зображується графом, то структурна невизначеність означає невизначеність графа системи керування.

Як відзначалося у розділі 2.2, граф $G(S, A)$ характеризується множиною вершин і множиною зв'язків і описується матрицями суміжності, інциденції, ваг (для зважених графів), потоків і пропускних спроможностей (для мереж). Отже, невизначеність графу системи керування характеризується невизначеністю розмірності матриць, які описують граф, та значень їх елементів.

Найпоширенішою причиною структурної невизначеності є ненадійність зв'язків між елементами системи. Якщо для опису структури використовується матриця суміжності, то функція невизначеності структури системи $\beta(G)$ теж подається у матричному вигляді. Відповідно, вважаючи всі зв'язки однаково ненадійними, можна записати

$$\beta(a_{ij}) = 2[2P(t) - 1]a_{ij} + 2[1 - P(t)] \quad (1.90)$$

де $P(t) = e^{-\lambda t}$ – ймовірність безвідмовної роботи зв'язку; a_{ij} – елемент матриці суміжності.

Алгоритмічна невизначеність (невизначені алгоритми)

Алгоритмічна невизначеність охоплює:

- невизначеність вхідних даних алгоритму;

- невизначеність деяких параметрів алгоритму;
- невизначеність результату операції вибору послідовності дій.

Особливо актуальним є використання невизначених алгоритмів як моделей реальних систем, де часто вибір послідовності дій або значень величин здійснюється не детерміновано, а з певною ймовірністю (стохастичні алгоритми) або можливістю (нечіткі алгоритми).

Стохастичні алгоритми

Теорія стохастичних алгоритмів розвивалася поетапно. На першому етапі розглядалися лише алгоритми, в яких стохастичність створювалася навмисно за допомогою спеціальних програмних або апаратних генераторів випадкових чисел або сигналів. Це робилося для реалізації стохастичних методів.

Стохастичними методами прийнято називати методи, прямо або опосередковано основані на використанні генераторів псевдовипадкових послідовностей (ПВП).

Методи, які використовують елементи випадковості, стали з'являтися відносно недавно. В основі першого з таких методів лежить випадковий пошук в просторі параметрів задачі із збереженням найкращого отриманого результату. Випадковий пошук забезпечує добір вихідних точок для проведення локальної оптимізації. Отже, рішення покращуються не тільки шляхом локальної оптимізації, але й шляхом випадкового пошуку кращого з локально оптимальних рішень. У деяких випадках стохастичні алгоритми забезпечують також і швидшу збіжність, ніж детерміновані.

Застосування такого методу не гарантує отримання оптимального рішення. Результат роботи стохастичного алгоритму точно не визначений. Можна лише говорити про ймовірності того або іншого результату.

Крім того, результат роботи методу не може бути кращим, ніж при інших методах пошуку, оскільки в обох випадках розглядаються одні й ті ж дискретні точки простору пошуку задачі.

Нечіткі алгоритми

Нечіткий алгоритм визначається впорядкованою множиною нечітких інструкцій, які містять поняття, що формалізуються нечіткими множинами.

Інструкції в нечітких алгоритмах можна розділити на три класи.

1. Нечіткі присвоювання значень, наприклад, « x = великий».
2. Нечіткі висловлення типу «якщо A , тоді B ». У таких висловленнях або A , або B , або обидва можуть бути нечіткими множинами, наприклад, «якщо A = великий, тоді B = нижче середнього».
3. Безумовні активні висловлення, наприклад, «набагато зменшити x ».

Основні задачі, які розв'язують за допомогою нечітких алгоритмів.

– Алгоритми визначення складного нечіткого поняття A через більш прості поняття, які легко описати нечіткими множинами; результатом застосування таких алгоритмів до деякого елемента u буде ступінь належності u поняттю A (ступінь, з яким елемент u може характеризуватися поняттям A).

– Алгоритми породження, в результаті виконання яких породжується один з елементів нечіткої множини, що описує поняття, яке цікавить нас (наприклад, алгоритм породження зразків почерку, рецептів готування їжі, твору, музики, речень у природній мові).

– Алгоритми опису відношень між нечіткими змінними, наприклад, у вигляді послідовності нечітких інструкцій; такі алгоритми дозволяють приблизно описувати поведження систем, вхідні й вихідні сигнали яких є нечіткими підмножинами.

– Алгоритми прийняття рішення, що дозволяють приблизно описувати стратегію або найважливіше правило, наприклад, алгоритм проїзду перехрестя, що містить послідовність дій, які необхідно виконати. При цьому описи цих дій складаються з нечітких понять типу: нормальна швидкість, кілька секунд, повільно наближатися.

Інформаційна невизначеність (невизначені дані)

Інформаційна невизначеність зустрічається найчастіше з усіх видів невизначеності. Вона полягає у невизначеності певних даних про об'єкт моделювання. У побуті ми часто зустрічаємося з висловами: «Чоловік віком близько 40 років», «нормальне значення рівня гемоглобіну 120-140» тощо. Перший з прикладів відповідає нечіткій невизначеності, оскільки тут мова йде про експертну оцінку певної характеристики конкретної людини. Другий приклад відповідає стохастичній невизначеності, оскільки дані про нормальний вміст гемоглобіну отримані як результат усереднення показників багатьох тисяч аналізів крові здорових людей.

На жаль, подання інформаційних моделей з урахуванням невизначеності стандартизоване лише для деяких окремих випадків. Так, наприклад, метрологічні стандарти вимагають подання результатів вимірювань із зазначенням похибок (вважається, що виміряне значення відповідає математичному сподіванню, а похибка – середньому квадратичному відхиленню, причому невизначеність характеризується нормальним розподілом ймовірностей). У конструкторській документації на механічні конструкції також вказують зону допуску на розміри й інші параметри, розуміючи під ними граничні відхилення.

Особливості оцінювання невизначеності результатів управління

Одною з головних задач, заради розв'язання якої досліджують невизначеність моделі, є оцінювання ризику керування. У загальному розумінні ризиком вважають ймовірність несприятливої події. У байєсівських задачах теорії керування (задачах, де кожному результату керування може бути зіставлене деяке значення виграшів/штрафів) як характеристику ризику використовують зважене значення ймовірності

$$R = \int_Y q(y)f(y)dy, \quad (1.91)$$

де R – ризик; y – результат керування; $q(y)$ – вагова функція або функція штрафів/виграшів; $f(y)$ – функція розподілу ймовірностей; Y – область значень результату керування.

У системах з комбінованою невизначеністю використовують узагальнений ризик, для розрахунку якого у вираз (1.91) замість функції розподілу ймовірностей $f(y)$ підставляють узагальнювальну функцію невизначеності $\beta(y)$.

В системах керування найчастіше як функцію штрафів використовують головний показник якості керування – похибку

$$q(y) = \Delta = y - y_0.$$

Врахування особливостей систем управління часто дозволяє спростити визначення функції розподілу ймовірностей $f(y)$ або узагальнювальну функцію невизначеності $\beta(y)$. Інерційність та замкненість структури збільшують порядок оператора моделі системи (1.89). Збільшення порядку оператора в свою чергу приводить до наближення результату перетворення до гауссіана, який визначається лише першим і другим моментами (математичним сподіванням і дисперсією). Отже, при моделюванні систем управління найчастіше достатньо визначити ці два моменти для повної характеристики результату в умовах невизначеності.

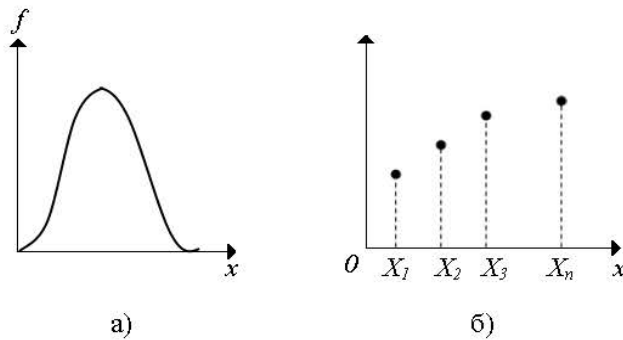
1.5.4 Форми подання невизначеності

Необхідність врахування невизначеності моделей у різноманітних задачах керування зумовила використання багатьох форм опису невизначеності. Але за усіма формами опису ховається одна й та ж об'єктивна реальність – можливість того, що деяка характеристика набуває різних (і невідомих спостерігачу!) значень. Це зумовлює певний гомеоморфізм різних форм опису невизначеності.

Функціональна форма

Функціональна форма широко використовується для опису невизначеності. При функціональному способі кожному можливному значенню невизначеної характеристики ставиться у відповідність обрана міра невизначеності. Оскільки мірою невизначеності стохастичних даних є ймовірність, а нечітких даних – належність, то, відповідно, функціональною формою опису невизначених даних є розподіл ймовірностей стохастичних даних і функція належності нечітких даних.

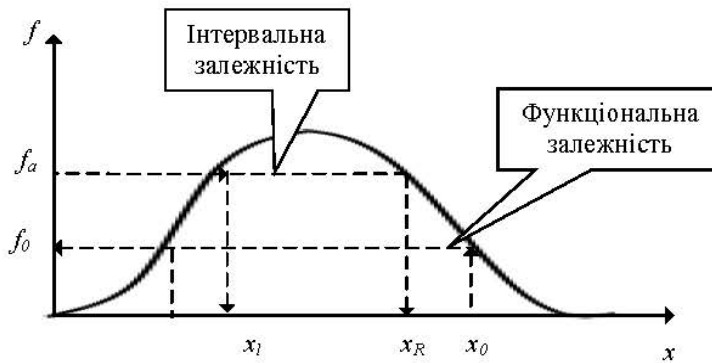
Графічне зображення функціонального опису невизначеності наведено на рис. 1.18.



визначеності: а) неперервних
їх величин

Інтервальна форма

Інтервальна форма подання невизначеності тісно пов'язана з функціональною формою. Цей зв'язок показаний на рис. 1.19.



Якщо при функціональному способі подання невизначеності встановлюється рівень невизначеності для кожного значення даного

$$x_0 \rightarrow f_0,$$

то при інтервальному способі для кожного рівня невизначеності встановлюється ліва і права границя відповідного інтервалу

$$f_\alpha \rightarrow (x_L, x_R).$$

У практиці моделювання процесів і систем керування інколи використовується інтервальне подання невизначеності (x_L, x_R) без зазначення рівня довіри f_α . Таке подання опосередковано передбачає, що вихід параметра x за межі інтервалу неможливий. Цей підхід до моделювання називають методом гарантованого результату.

Множинна форма

Множинна форма опису невизначеності використовується у випадках, коли відомий лише перелік значень, які може приймати дане. Прикладом такої невизначеності є твердження щодо типу невідомої завади, яка впливає на систему керування (тепловий шум, дробовий шум, імпульсна електромагнітна завада, наведений сигнал електромережі живлення тощо).

1.5.5 Моделі перетворення характеристик сигналів з різною формою невизначеності

Моделювання в умовах невизначеності передбачає моделювання як сигналів, так і їх перетворень у системі.

1.5.5.1 Моделювання перетворення стохастичних даних

Задача *перетворення стохастичних даних* може бути сформульована таким чином.

Нехай задане перетворення $y = F(x_1 \dots x_n)$, де x_i – випадкові величини (процеси), які задані певною множиною C_x своїх характеристик. Необхідно знайти відповідні характеристики C_y результату перетворення.

Залежно від вигляду перетворення F розрізняють нелінійні статичні, лінійні динамічні і нелінійні динамічні перетворення. *Нелінійне статичне перетворення* – це таке, що може бути подане у вигляді функціональної залежності. *Лінійне динамічне перетворення* – це таке, що може бути подане лінійним диференціальним рівнянням.

При нелінійних статичних перетвореннях відносно просто визначити функції розподілу ймовірностей результату та їх характеристики і важко визначити кореляційні і спектральні характеристики, а при лінійних динамічних перетвореннях навпаки. Найбільші проблеми складає моделювання *нелінійних динамічних перетворень*. Найчастіше такі перетворення подаються сукупністю нелінійних статичних і лінійних динамічних перетворень. Результати лінійного статичного перетворення деяких характеристик сигналів наведені в табл. 1.4.

Таблиця 1.4 – Лінійне перетворення характеристик випадкових сигналів

Характеристика	Рівняння перетворення сигналу	Рівняння перетворення характеристики
Математичне сподівання m	$y = ax + b$	$m_y = am_x + b$
	$y = ax_1 + bx_2$	$m_{x_2/x_1} = m_{x_2} + r_{x_1x_2} \sqrt{\frac{D_{x_1}}{D_{x_2}}}(x_1 - m_{x_1})$ $m_y = am_{x_1} + bm_{x_2/x_1}$
Дисперсія D	$y = ax + b$	$D_y = a^2 D_x$
	$y = ax_1 + bx_2$	$D_y = a^2 D_{x_1} + b^2 D_{x_2} - 2abr_{x_1x_2} \sqrt{D_{x_1} D_{x_2}}$
Кореляційна функція $R_{y_1x_2}$	$y = ax_1 + b$	$R_{y_1x_2}(\tau) = aR_{x_1x_2}(\tau)$
Спектральна щільність потужності $S_{y_1x_2}$	$y = ax_1 + b$	$S_{y_1x_2}(\omega) = aS_{x_1x_2}(\omega)$
Щільність розподілу ймовірностей f_y	$y = ax + b$	$f_y = \frac{1}{a} f_x \left(\frac{y-b}{a} \right)$

Для моделювання перетворення стохастичних даних в динамічних процесах існує багато методів. Найпоширенішими серед них є рівняння Колмогорова, прямий метод визначення кореляційної функції, метод контурних інтегралів, метод похідних, метод твірних функцій.

Кореляційна функція результату лінійного динамічного перетворення знаходиться за допомогою рівняння Вінера-Хопфа, яке аналогічне інтегралу Дюамеля

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^{\infty} R_{xx}(\tau_1) g(\tau - \tau_1) d\tau_1. \quad (1.92)$$

Відповідна енергетична характеристика – спектральна щільність потужності – знаходиться через частотну передаточну функцію $W(j\omega)$, яка є Фур'є-зображенням імпульсної перехідної характеристики

$$W(j\omega) = \int_0^{\infty} g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Звідки

$$S_{xy}(j\omega) = S_{xx}(j\omega) \cdot W(j\omega). \quad (1.93)$$

Функція розподілу результату нелінійного статичного перетворення для монотонної функції $y=N(x)$

$$f_y(y) = \dot{N}^{(-1)}(y) f_x[N^{(-1)}(y)], \quad (1.94)$$

де $N^{(-1)}$ – обернена функція, $\dot{N}^{(-1)}$ – її похідна.

Методи знаходження кореляційної функції та енергетичного спектра процесу на виході нелінійного елемента переважно призначені для нормальних розподілів імовірностей вхідних процесів.

Рівняння Колмогорова застосовується для знаходження розподілу імовірності переходу дифузійного марковського процесу. Оскільки нормальний випадковий процес з експоненціальною кореляційною функцією є дифузійним марковським процесом, то рівняння Колмогорова для нього теж виконуються. *Перше рівняння Колмогорова* має вигляд:

$$\frac{\partial f_{X_1 X_2}(t, t_1)}{\partial t} + m_{dx(t+dt)/x_1(t)}^{(1)} \frac{\partial f_{X_1 X_2}(t, t_1)}{\partial x_1} + \frac{1}{2} m_{dx(t+dt)/x_1(t)}^{(2)} \frac{\partial^2 f_{X_1 X_2}(t, t_1)}{\partial x_1^2} = 0, \quad (1.95)$$

де $m_{dx(t+dt)/x_1(t)}^{(k)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} (x_3 - x_1)^k f_{X_1 X_2}(t, t_2) dx_3$, $m_{dx(t+dt)/x_2(t)}^{(1)}$ і

$m_{dx(t+dt)/x_2(t)}^{(2)}$ скінченні ($m_{dx(t+dt)/x_2(t)}^{(2)}$ відмінно від нуля) та $m_{dx(t+dt)/x_2(t)}^{(k)} \equiv 0$ при $k \geq 3$, $f_{X_1 X_2}(t, t_1)$ – двовимірна функція розподілу.

Друге рівняння Колмогорова, відоме також як *рівняння Фоккера–Планка*, має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{X_1 X_2}(t, t_1)}{\partial t_1} = & - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[m_{dx(t_1+dt)/x_2(t_1)}^{(1)} f_{X_1 X_2}(t, t_1) \right] \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[m_{dx(t_1+dt)/x_2(t_1)}^{(2)} f_{X_1 X_2}(t, t_1) \right] \end{aligned} \quad (1.96)$$

де $m_{dx(t_1+dt)/x_2(t_1)}^{(1)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} (x_3 - x_2) f_{X_1 X_2}(t_1, t_2) dx_3$ є коефіцієнт зносу,

$m_{dx(t_1+dt)/x_2(t_1)}^{(2)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} (x_3 - x_2)^2 f_{X_1 X_2}(t_1, t_2) dx_3$ – коефіцієнт дифузії.

Обидва рівняння (1.95) і (1.96) належать до класу параболічних диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Для нормального випадкового процесу умовна функція розподілу з нульовим середнім, дисперсією σ^2 і коефіцієнтом кореляції r має вигляд:

$$f_{X \cap X \cap}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi(1-r^2_{x_1 x_2})}} \exp \left[-\frac{(rx_1 - x_2)^2}{2\sigma^2(1-r^2_{x_1 x_2})} \right], \quad (1.97)$$

$$f_{X \cap X \cap}(0, t_1) = \delta(x_2, x_1). \quad (1.98)$$

Головним недоліком рівнянь Колмогорова є те, що вони призначені лише для нормальних розподілів з експоненціальною кореляційною функцією.

Операторний метод моделювання перетворень стохастичних даних дозволяє наближено оцінити закон розподілу вихідного сигналу $f_y(y)$, якщо відомі закони розподілу вхідних сигналів $f_{x_1}(x_1)$, $f_{x_2}(x_2)$ та їх перший і другий моменти, також і взаємна кореляційна функція $R_{X_1 X_2}(t)$.

Нехай вхідні дані $\{X_1 \dots X_n\}$ розподілені за законами $\{f_{x_1}(x_1) \dots f_{x_n}(x_n)\}$ та їх взаємна парна кореляційна функція – $\{R_{x_i x_j}(t)\}$. Диференціальний закон розподілу вихідного даного $f_y(y)$ може бути знайдений як *інтегральний оператор* вигляду:

$$f_Y(y) = \Phi_{XY}(f_X(\bar{x}), A, W) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(\bar{x}) \varphi(x, y, A, W) d\bar{x}, \quad (1.99)$$

де Φ_{XY} – інтегральний оператор, n – кількість вхідних величин, A та W – параметри алгебраїчного й інтегро-диференціального перетворень.

Вираз ядра оператора $\varphi^{(1)}(x, y)$ для нелінійної алгебраїчної операції ґрунтується на відомій в теорії випадкових процесів формулі нелінійного перетворення випадкового процесу і рівнянні регресії. Вираз ядра для інтегро-диференціального перетворення ґрунтується на поданні такого перетворення інтегральною сумою (інтегралом Дюамеля). Опис операторів для основних типів операцій наведений у таблиці 1.5.

Таблиця 1.5 – Інтегральні оператори перетворення щільності розподілу

Операція	Оператор	Параметри
$y = N(x)$	$f_y = \int_{\Omega_x} f_x(x) \delta[y - N(x)] dx$	Ω_x – область визначення f_x δ – дельта-функція Дірака
$y = N(x_1, x_2)$	$f_y = \int_{\Omega_{x_1}} \int_{\Omega_{x_2}^{-\infty}^{+\infty}} f_{x_1}(x_1) f_{x_2}(x_2) \delta[y - N(x_1, x_2)] \delta[x_2 + ax_1 + b\xi + c] d\xi dx_1 dx_2$	$a = -r_{x_1 x_2} \sqrt{\frac{D_{x_2}}{D_{z_1}}}$ $b = -\sqrt{1 - r^2_{x_1 x_2}}$ $c = r_{x_1 x_2} m_{x_1} \sqrt{\frac{D_{x_2}}{D_{z_1}}} + (\sqrt{1 - r^2_{x_1 x_2}} - 1) m_{x_2}$
$y = \int_0^t x(t - \tau) g(\tau) d\tau$	$f_y = \int_{\Omega_x} \prod_{i=1}^n f_x(x_i - m_x) \delta[y - (1 - a)m_y - a \sum_{i=1}^n x_{n-1}(t - i\tau) \cdot g_0(i\tau)] dx_1 \dots dx_n$	$\tau = \frac{S_{xx \max}}{D_x}$ $T_{np} = \frac{\pi W_{\max}}{\int_0^\infty W(\omega) d\omega}$ $g_0(i\tau) = \int_{i\tau}^{(i+1)\tau} g(\tau) d\tau$ $n = \text{ent} \left[\frac{T_{np}}{\tau} \right]$ $a = \sqrt{\frac{D_y}{D_x \sum_{i=1}^n g_0(i\tau)}}$

1.5.5.2. Методи моделювання перетворень нечітких даних

Нечіткі дані можна поділити на лінгвістичні і числові. Над лінгвістичними даними виконуються переважно множинні операції.

Операції над нечіткими множинами.

а) *Доповненням* нечіткої множини A називається нечітка множина $\neg A$, функція належності якої дорівнює:

$$\mu^{\neg A}(x) = 1 - \mu^A(x), \quad \forall x \in X. \tag{1.100}$$

б) *Перетином* двох нечітких множин A і $B \subseteq X$ називається нечітка множина $A \cap B$, функція належності якої дорівнює:

$$\mu^{A \cap B}(x) = \min[\mu^A(x), \mu^B(x)] \quad \forall x \in X. \quad (1.101)$$

в) *Об'єднанням* двох нечітких множин A і $B \subseteq X$ називається нечітка множина $A \cup B$, функція належності якої дорівнює:

$$\mu^{A \cup B}(x) = \max[\mu^A(x), \mu^B(x)] \quad \forall x \in X. \quad (1.102)$$

Кардинальне число (потужність) нечіткої множини

$$A = \mu^A(x_1)/x_1 + \mu^A(x_2)/x_2 + \dots + \mu^A(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^n \mu^A(x_i)/x_i \quad (1.103)$$

знаходиться таким чином: $\text{card } A = |A| = \sum_{i=1}^n \mu^A(x_i)$.

Принципи узагальнення математичних операцій на нечіткі дані були зроблені для того, щоб для нечітких чисел можна було застосовувати арифметичні та алгебраїчні операції, які використовуються для звичайних чітких даних. Базовий принцип узагальнення – це *принцип узагальнення Заде*, який полягає в нижчевикладеному.

Якщо задана функція від k змінних $y = g(x_1, x_2, \dots, x_k)$ і аргументи x_i – нечіткі числа \tilde{x}_i з носіями $\text{supp } \tilde{x}_i = [x_i^-, x_i^+]$, $i = \overline{1, k}$, то нечітке число $\tilde{y} = g(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k)$ визначається в такий спосіб:

$$\mu_{\tilde{y}}(y^*) = \sup_{\substack{g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) = y^* \\ x_i^* \in \text{supp } \tilde{x}_i, \quad i = \overline{1, k}}} \inf(\mu_{\tilde{x}_1}(x_1^*), \dots, \mu_{\tilde{x}_k}(x_k^*)) \quad (1.104)$$

Алгоритм реалізації принципу узагальнення Заде:

1. Фіксується значення $y = y^*$;
2. Знаходяться всі k -ті $\{x_{1j}^*, x_{2j}^*, \dots, x_{kj}^*\}$, що задовольняють умови:

$$y^* = g(x_{1j}^*, x_{2j}^*, \dots, x_{kj}^*), \quad x_{ij}^* \in [x_j^-, x_j^+], \quad i = \overline{1, k}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (1.105)$$

3. Визначається ступінь належності елемента y^* нечіткому числу \tilde{y} за формулою:

$$\mu_{\tilde{y}}(y^*) = \sup_{j=1, m} \inf(\mu_{\tilde{x}_1}(x_{1j}^*), \mu_{\tilde{x}_2}(x_{2j}^*), \dots, \mu_{\tilde{x}_n}(x_{nj}^*)) \quad (1.106)$$

4. Перевіряється умова чи взяті всі елементи y^* . Якщо “так”, то переходять до кроку 5, інакше фіксують нове значення y^* і переходять до кроку 2;

5. Кінець.

Основні арифметичні операції над нечіткими числами відповідно до принципу узагальнення мають вигляд:

- додавання $\mu^{A+B}(z) = \max_{z=x+y} \min[\mu^A(x), \mu^B(y)]$, $\forall x, y, z \in \mathfrak{R}$;
- віднімання $\mu^{A-B}(z) = \max_{z=x-y} \min[\mu^A(x), \mu^B(y)]$, $\forall x, y, z \in \mathfrak{R}$;
- множення $\mu^{A*B}(z) = \max_{z=x*y} \min[\mu^A(x), \mu^B(y)]$, $\forall x, y, z \in \mathfrak{R}$;
- ділення $\mu^{A/B}(z) = \max_{z=x/y, y \neq 0} \min[\mu^A(x), \mu^B(y)]$, $\forall x, y, z \in \mathfrak{R}$.

Якщо $y = g(x_1, x_2, \dots, x_k)$ – функція від k нечітких аргументів \tilde{x}_i , кожний із яких задається функцією належності в n точках універсальної множини

$$\tilde{x}_i = \sum_{j=1}^n \mu_{\tilde{x}_i}(x_{ij}) / x_{ij}, \quad i = \overline{1, k}, \quad (1.107)$$

то для визначення нечіткого числа \tilde{y} за принципом узагальнення Заде необхідно перебрати $N = n^k$ варіантів.

Крім принципу узагальнення Заде в літературі зустрічаються й інші принципи узагальнення.

1. Правило типу minimum (правило Мамдані)

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \mu_R(x, y) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y) = \min[\mu_A(x), \mu_B(y)].$$

2. Правило типу «добуток» (правило Ларсена)

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \mu_R(x, y) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(y).$$

3. Правило Лукашевича

$$\begin{aligned} \mu_{A \rightarrow B}(x, y) &= \mu_R(x, y) = 1 \wedge [1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)] = \\ &= \min[1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)]. \end{aligned}$$

4. Бінарне правило

$$\begin{aligned}\mu_{A \rightarrow B}(x, y) &= \mu_R(x, y) = [1 - \mu_A(x)] \vee \mu_B(y) = \\ &= \max[1 - \mu_A(x), \mu_B(y)].\end{aligned}$$

5. Правило Гогуена

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \mu_R(x, y) = 1 \wedge \frac{\mu_A(x)}{\mu_B(y)} = \min\left\{1, \frac{\mu_A(x)}{\mu_B(y)}\right\}.$$

6. Правило Шарпа

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \mu_R(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \mu_A(x) \leq \mu_B(y) \\ 0, & \text{якщо } \mu_A(x) > \mu_B(y) \end{cases}.$$

7. Правило Геделя

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \mu_R(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \mu_A(x) \leq \mu_B(y) \\ \mu_B(y), & \text{якщо } \mu_A(x) > \mu_B(y) \end{cases}.$$

8. Ймовірнісне правило

$$\begin{aligned}\mu_{A \rightarrow B}(x, y) &= \mu_R(x, y) = 1 \wedge [1 - \mu_A(x) + \mu_A(x)\mu_B(y)] = \\ &= \min[1, 1 - \mu_A(x) + \mu_A(x)\mu_B(y)].\end{aligned}$$

9. Правило обмеженої суми

$$\begin{aligned}\mu_{A \rightarrow B}(x, y) &= \mu_R(x, y) = 1 \wedge [1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)] = \\ &= \min\{1, [\mu_A(x) + \mu_B(y)]\}\end{aligned}$$

та інші.

1.5.5.3 Перетворення узагальнювальної функції

У випадку комбінованої невизначеності модель процесу керування може бути подана у вигляді

$$\beta(Y) = \overline{\Phi^{(n)}}[\beta(X)] \quad (1.108)$$

або у розгорнутому вигляді

$$\beta(y_i) = \Phi_i^{(n)}[\beta(x_1, x_2, \dots, x_m)], \quad i = 1 \dots k,$$

де Y – вектор станів (вихідних сигналів) системи розмірністю k ; X – вектор вхідних впливів (керувань та збурень) розмірністю m ; $\overline{\Phi^{(n)}}$ – модель системи керування (вектор операторів перетворення узагальнювальних функцій невизначеності розмірністю k); n – порядок операторів моделі системи.

Оператори моделі (1.108) реалізуються за допомогою інтегральних перетворень

$$\beta(y_i) = \int_{\Omega_1} \dots \int_{\Omega_m} \phi \left[y_i, X, \left\| R_{x_i x_j} \right\| \right] \beta(x_1, x_2, \dots, x_m) (dx_1)^{n_1} \dots (dx_m)^{n_m},$$

де $n = \sum_{j=1}^m n_j$ – порядок оператора (кратність інтегрування); $\phi[\bullet]$ – ядро перетворення (модель системи); $\left\| R_{x_i x_j} \right\|$ – кореляційна матриця.

Визначені операції з узагальнювальною функцією – унарна, бінарна операції, операції порівняння невизначених даних та загострення.

Означення 1. Результатом унарної операції \circ над невизначеним даним $x_1 \in B_1$ є таке невизначене дане, для якого

$$\int_{B_2} \beta(x_2) dx_2 = \int_{B_1} \beta(x_1) dx_1, \quad (1.109)$$

причому $B_1 \subset B, B_2 \subset B, B_1 : \forall x_1 \rightarrow x_2 = o(x_1)$.

Означення 2. Результатом бінарної операції \circ над невизначеними даними $x_1 \in B_1$ і $x_2 \in B_2$ є таке невизначене дане $x_3 \in B_3$, для якого

$$\int_{B_3} \beta(x_3) dx_3 = \int_{B_1} \int_{B_2} \beta(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (1.110)$$

причому $B_1 \subset B, B_2 \subset B, B_3 \subset B, B_3 : \forall x_1, x_2 \rightarrow x_3 = x_1 \circ x_2$.

Означення 3. Відношення рівності: невизначені дані x, y вважаються рівними $X \stackrel{=}{=} Y$ якщо $\beta_X = \beta_Y$.

Означення 4. Відношення нерівності: для невизначених даних $X \stackrel{>}{=} Y$, якщо $Z = X - Y$ і

$$\int_0^{+\infty} \beta_Z dz > \int_{-\infty}^0 \beta_Z dz. \quad (1.111)$$

Означення 5. Невизначене дане x' є загостренням невизначеного даного x , якщо:

1. $X_{x'} = X_x$, де X – невизначеності даного (область визначення УФ);
2. $M_{x'} = M_x$, де M – мода УФ;
3. $\exists [a, b]: M_{x'} \in [a, b]; \forall x \in (a, b) \rightarrow \beta_{x'}(x) \beta_x(x); (x = a) \vee (x = b) \rightarrow \beta_{x'}(x) = \beta_x(x)$.

Визначені також правила виконання операцій з УФ. За основу визначення цих операцій прийнятий *операторний метод* перетворення законів розподілу ймовірностей, загальний вигляд якого поданий моделлю (1.108).

Нелінійна операція

$$\beta_y(y) = \Phi^{(1)}[\beta_x(x), N(x, y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_x(x) \varphi(x, y) dx, \quad (1.112)$$

де ядро $\varphi(x, y) = \delta[y - N(x)]$ – дельта-функція Дірака.

Бінарна операція

$$\beta_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_X(\bar{x}_1) \beta_X(\bar{x}_2) \varphi^{(2)}(x_1, x_2, y) dx_1 dx_2, \quad (1.113)$$

де $\varphi^{(2)}(x_1, x_2, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta[y - N(x_1, \zeta)] \delta\left[\zeta - r_{X_1, X_2} \sqrt{\frac{D_{X_2}^{(2)}}{D_{X_1}^{(2)}}(x_1 - m_{X_1}^{(1)}) - \sqrt{1 - r_{X_1, X_2}^2}(x_2 - m_{X_2}^{(1)})} - m_{X_2}^{(1)}\right] d\zeta;$

m_{x_1} – перший початковий момент X_1 ; m_{x_2} – перший початковий момент X_2 ;
 D_{x_1} – другий центральний момент X_1 ; D_{x_2} – другий центральний момент X_2 ;
 r_{X_1, X_2} – другий змішаний нормований центральний момент X_1 та X_2 .

Інтегро-диференціальна операція

$$\beta_Y(y) = \Phi^{(n)} \beta_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_X(x_n - m_X^{(1)}(t)) \varphi^{(n)}(x_n, y, \omega) dx_n, \quad (1.114)$$

$$\varphi^{(n)}(x, y, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^{n-1} \beta_X(x_i - m_X^{(1)}) \times \delta\left[y - (1-a)m_Y^{(1)} - a \sum_{i=1}^{n-1} x_{n-1}(t-i\tau)g(i\tau)\right] dx_1 \dots dx_{n-1};$$

де $n = \text{ent}[t/\Delta\tau]$; $a = \sqrt{\frac{D_Y^{(2)}}{\tau D_X^{(2)} \sum_{i=1}^{n-1} g_0^2(i\tau)}}$; $g(t)$ – імпульсна перехідна характеристика;

$g_0(i\Delta\tau) = \frac{1}{\Delta\tau} \int_{i\Delta\tau}^{(i+1)\Delta\tau} g(\tau) d\tau$; $\Delta\tau$ – інтервал дискретизації.

Більш складні перетворення визначаються шляхом декомпозиції на розглянуті три типи перетворень.

Властивості алгебри узагальнювальних функцій.

1. Невизначене дане x_0 , якому відповідає узагальнювальна функція $\delta[x - x_0]$, еквівалентне достовірному даному відносно операцій системи G .
2. Операціям над невизначеними даними властива асоціативність

$$\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 = \Phi_1 [\Phi_2 \Phi_3]. \quad (1.115)$$

3. Операції над невизначеними даними не комутативні

$$\Phi_1\Phi_2 \neq \Phi_2\Phi_1. \quad (1.116)$$

4. Послідовність унарних операцій подається добутком операторів.

5. Бінарна операція над двома функціями невизначеної змінної подається добутком оператора другого порядку на добуток операторів гілок.

6. Існує одиничний оператор **1**, що задовольняє правило множення

$$\Phi_1 \cdot 1 = \Phi_1. \quad (1.117)$$

7. Існує обернений оператор Φ^{-1}

$$\Phi \cdot \Phi^{-1} = 1. \quad (1.128)$$

Узагальнена модель СК в умовах невизначеності враховує алгоритмічну, параметричну і структурну невизначеності, які присутні в системі керування.