2.2 Графи як узагальнення структурних моделей

При всій різноманітності зображень структурних моделей найпоширенішою і найуніверсальнішою формою є граф *(graph)*.

Граф – це наочне графічне зображення взаємозв'язку елементів деякої множини об'єктів. Формально графова модель $G\{V,P\}$ складається з двох множин – множини V об'єктів (*вершин*, *вузлів*) і множини P зв'язків (*ребер*).

Вершина, **Вузол** – базове поняття: точка, де можуть сходитися/розходитися *ребра* та/або *дуги*. Множина вершин графу G позначається $V(G)$.

Ребро графу (дуга графу) – базове поняття. Ребро з'єднує дві *вершини* графу.

Таке дуже загальне означення наштовхує на думку, що методи і алгоритми теорії графів можуть використовуватись для розв'язування дуже великої кількості задач. Адже поняття множини – це фундамент сучасної математики, а це означає, що практично будь-яка математична модель може бути подана у термінах графів. Теорія графів дуже багата на алгоритми розв’язання найрізноманітніших задач. Питання полягає лише в доцільності такого подання – може існує простіший і ефективніший шлях розв’язання конкретної задачі?

При створенні графової моделі слід в першу чергу визначитися, у якому просторі вона створюється. Залежно від природи елементів множини вершин графи можуть розглядатися у різних просторах:

– в *геометричному просторі* – наприклад, карта автомобільних доріг, план розташування комп’ютерів мережі у приміщенні;

– в *просторі станів* та *перетворень* (у часі) – наприклад, алгоритм (відображає зміну та зв'язок станів комп'ютера), мережний графік (відображає зміну та зв'язок станів технологічного процесу);

– в *просторі відношень* – наприклад, комп'ютерна мережа (відображає інформаційний зв'язок комп'ютерів), схема взаємодії підрозділів підприємства, семантична мережа, мережа логічного висновку.

Графи в просторі відношень є структурними моделями. На практиці часто з ними суміщають елементи функціональних моделей, зокрема ваги у зважених графух можуть відображати величини інформаційних потоків, силу струму тощо у процесі функціонування.

Розмаїття задач, в яких використовуються графи, спричиняє відповідне розмаїття видів графів.

Залежно від симетричності зв’язків між вершинами графи поділяються на *орієнтовані* (рис. 2.3, б, г) і *неорієнтовані* (рис. 2.3, а, в, д, е). Односторонні зв’язки зображаються направленими ребрами, які називають *дугами*. Граф з дугами називають *орієнтованим*, або орграфом. Якщо хоча б одне ребро графу має орієнтацію, то весь граф називається орієнтованим.

Залежно від того, як характеризується кожне ребро графу, графи поділяються на *зважені*(рис. 2.3, в), *незважені*(рис. 2.3, а,б,д,е), *мережні* (рис. 2.3, г). В незважених графах ребра не характеризуються ніякими числовими параметрами і вичерпною характеристикою ребра є сам факт його існування. У зважених графах ребру приписується певний числовий параметр – вага, який може бути відстанню між вершинами у метричному просторі, ймовірністю переходів у просторі станів тощо. У мережних графах кожне ребро характеризується двома параметрами: величиною *потоку* і *пропускною спроможністю*.

Шлях в графі – послідовність вершин і ребер $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., e_k, v_k$, що чергуються, в якій будь-які два сусідні елемента пов'язані (*інцидентні)*. Якщо в графі існує шлях між кожною парою вершин, то граф називається *зв'язним*, у іншому випадку – *незв'язним*.

Петля – ребро, початок і кінець якого знаходяться в одній і тій самій вершині.

Виділяють спеціальні види графів: *дерева* (рис. 2.3.,в,д), *циклічні графи* (рис. 2.3., е).

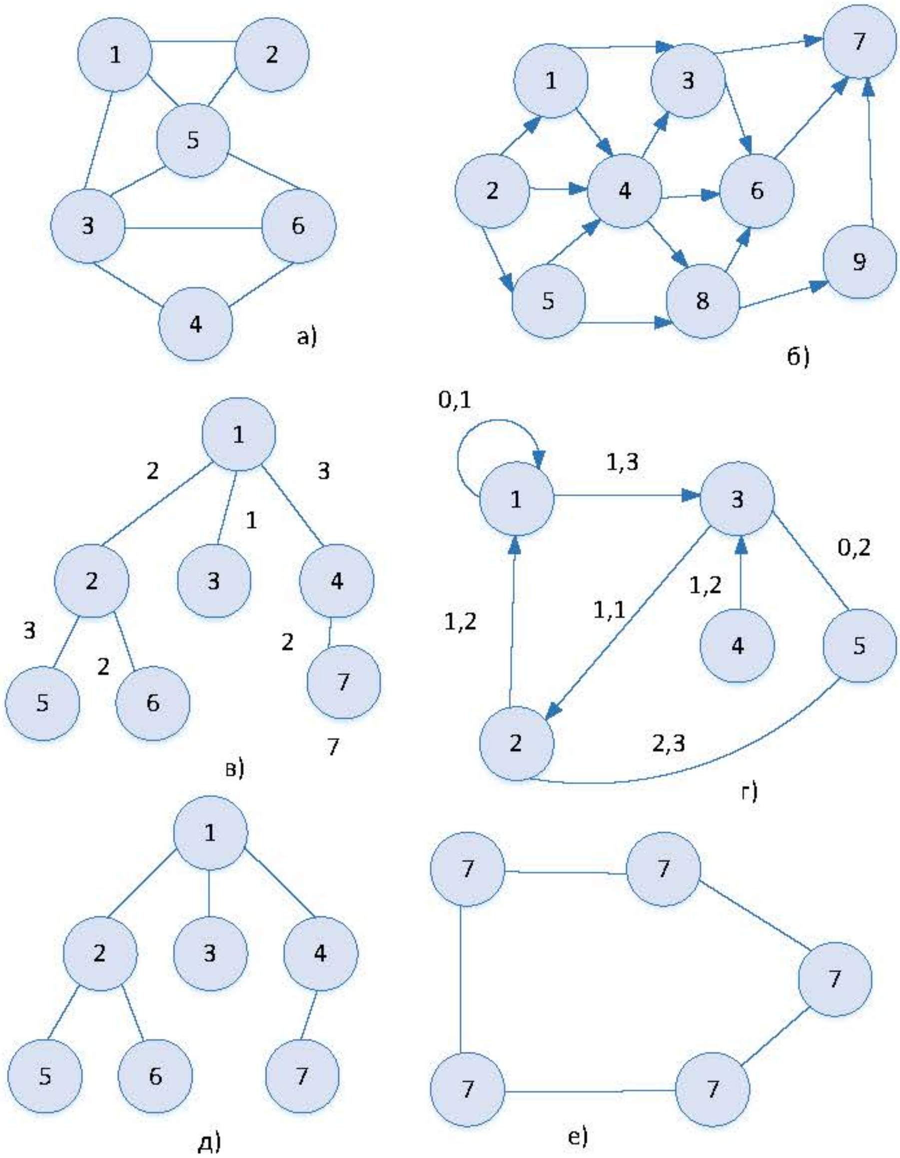

Рисунок 2.3 – Приклади графів різних видів:
а) незважений неорієнтований; б) незважений орієнтований;
в) зважений неорієнтований; г) зважений орієнтований;
д) дерево; е) циклічний граф

Мультиграф – граф, в якому існує пара вершин, що з'єднана більш ніж одним ребром (ненаправленим), або більше ніж двома дугами протилежних напрямків.

Зв'язний граф – граф, в якому всі вершини зв'язані.

Змішаний граф – граф, що містить як орієнтовані, так і неорієнтовані *ребра*.

Плоский граф – *геометричний граф*, в якому жодні два ребра не мають спільних точок крім інцидентних їм обом вершинам (не перетинаються), є *укладеним* графом на площині.

Планарний граф – граф, що може бути нарисований (*укладений*) на площині без перетину ребер. *Ізоморфний* плоскому графу, тобто, є графом із перетинаннями, але таким, що допускає плоске укладання, через це може відрізнятися від *плоского графу* зображенням на площині. Таким чином, може бути різниця між плоским і планарним графами у зображенні на площині.

Двоїстий граф. Граф *A* називається двоїстим до планарного графу *B*, якщо вершини графу *A* відповідають граням графу *B*, і дві вершини графу *A* з'єднані ребром тоді і тільки тоді, коли відповідні грані графу *B* мають хоча б одне спільне ребро.

Повним графом називається граф, в якому для кожної пари вершин v_1, v_2 існує ребро, інцидентне v_1 і інцидентне v_2 (кожна вершина з'єднана ребром з будь-якою іншою вершиною).

Суграф (частковий граф) початкового графу – граф, що містить всі вершини початкового графу і підмножину його *ребер*.

Регулярний граф – граф, *степені* всіх вершин якого рівні.

Степінь вершини – кількість ребер графу *G*, що *інцидентні* вершині *x*. Позначається $d(x)$. *Мінімальний* степінь вершини графу *G* позначається $\delta(G)$, а *максимальний* – $\Delta(G)$

Дводольний граф (або **біграф**, або **парний граф**) – граф $G(V, E)$, такий що множина вершин *V* розбита на дві підмножини V_1 і V_2, що не перетинаються, причому кожне ребро *E* інцидентне вершині з V_1 і вершині з V_2 (тобто з'єднує вершину з V_1 з вершиною з V_2). Множини V_1 і V_2 називають «долями» дводольного графу. Дводольний граф називається «повним», якщо будь-які дві вершини з V_1 і V_2 виявляться суміжними. Якщо $|V_1| = a$, $|V_2| = b$, то повний дводольний граф позначається $K_{a,b}$.

Цикл – замкнений *ланцюг*. Для *орграфів* цикл називають *контуром*.

Гамільтонів шлях – *простий шлях* в графі, що містить всі *вершини* графу точно по одному разу.

Гамільтонів цикл – *простий цикл* в графі, що містить всі вершини графу точно по одному разу.

Грань – область, обмежена ребрами в *плоскому графі* і така, що не містить всередині себе вершин і ребер графу. Зовнішня частина площини також утворює грань.

Дерево – *зв'язний граф*, що не містить *циклів*.

Ліс – неорієнтований граф без циклів. *Компонентами зв'язності* лісу є *дерева*.

Кістяковим (каркасним) лісом незв'язного графу $G=(V,E)$ називають сукупність *кістякових (каркасних) дерев компонент зв'язності графу* $G^{[2]}$.

Ейлерів граф – граф, в якому існує *цикл*, що містить усі ребра графу по одному разу, вершини можуть повторюватися.

Ейлерів ланцюг (або **Ейлерів цикл**) – *ланцюг* (*цикл*), що містить всі ребра графу, вершини можуть повторюватися.

Переріз графу – множина ребер, видалення яких ділить граф на два ізольованих підграфу.

Кліка – підмножина вершин графу, повністю з'єднаних кожна з кожною, тобто підграф, що являє собою *повний граф*.

Обхват – довжина найменшого *циклу* в графі.

Довжина маршруту – кількість ребер в маршруті (з повтореннями). Якщо маршрут $M=v_0,e_1,v_1,e_2,v_2,...,e_k,v_k$, то довжина M дорівнює k (позначається $|M|=k$).

Зв'язність. Дві вершини в графі **зв'язні**, якщо існує (простий) *ланцюг*, що їх з'єднує.