2.4 Формальні перетворення структурних моделей

Перетворення структурних моделей є важливим етапом моделювання систем. Вони виконуються в процесі аналізу, синтезу і дослідження структури систем.

Евристичне поняття операцій над графами

Перетворення графів, які зображають структурні моделі, відповідають природним уявленням про перетворення структури об'єктів і систем керування. Розмаїття видів об'єктів і систем зумовлює велику кількість операцій над їх структурою. Але усі операції можна розбити на дві групи:

– операції композиції, які виконуються переважно в процесі синтезу систем;

– операції декомпозиції, які виконуються переважно в процесі аналізу систем.

Конкретний зміст операцій над графами залежить від типу графу. Так, розрізняють правила виконання операцій над орієнтованими і неорієнтованими графами, зваженими і незваженими графами. Найпростішими є правила виконання операцій над неорієнтованими незваженими графами, оскільки такі графи характеризуються мінімальною кількістю даних, а усі вершини і ребра є рівнозначущими.

Формальний опис на основі теорії множин

Із структурними моделями, які зображуються графами, можуть виконуватися алгебраїчні перетворення. Спосіб виконання цих перетворень визначається тим, що граф за означенням є сукупністю множин вершин та ребер. Відповідно, до графів можуть застосовуватися всі операції над множинами.

1. Операція вилучення ребра

Нехай $G=(V,E)$ – граф і $e\in E$ – деяке його ребро. Говорять, що граф $G_1=G-e$ одержано з графу G внаслідок операції вилучення ребра *e*, якщо $G_1=(V,\ E\setminus\{e\})$. Отже, вершини-кінці ребра *e* не вилучаються з множини *V*.

Неважко показати, що для довільних ребер *e* і e_1 графу G виконується така тотожність:

$$(G-e)-e_1=(G-e_1)-e. \tag{2.3}$$

Отже, якщо виконується підряд кілька операцій вилучення ребра, то результат не залежить від порядку вилучення ребер з графу (рис. 2.5).

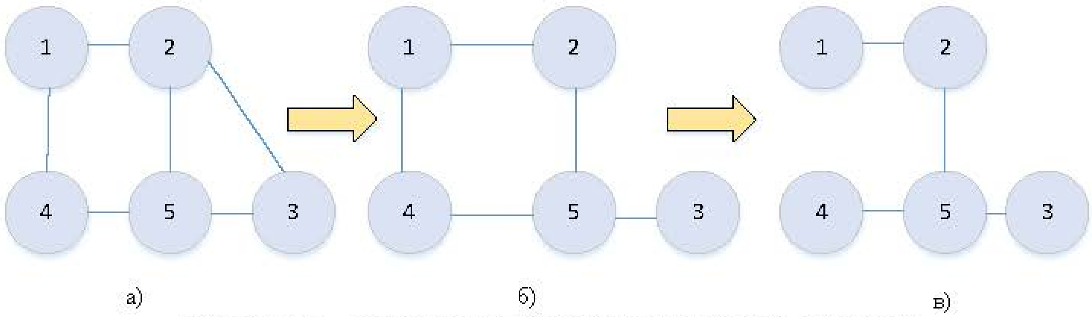
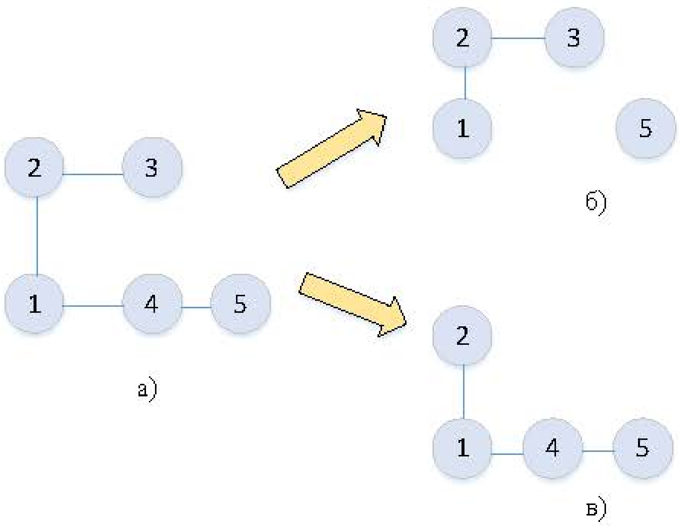


Рисунок 2.5 – Вилучення ребра: а) граф G; б) граф $G\backslash\{(2,3)\}$;
в) граф $(G\backslash\{(2,3)\})\backslash\{(1,4)\}$

2. Операція вилучення вершини

Нехай $G=(V,E)$ – граф, і $v \in V$ – його вершина. Говорять, що граф $G_1 = G - v$ одержаний з графу G внаслідок операції вилучення вершини *v*, якщо вершина *v* вилучена з V, а з E вилучені всі ребра, інцидентні з вершиною *v*.

Неважко переконатися, що операція вилучення вершини не залежить від порядку, в якому вилучаються вершини з графу (рис. 2.6.).



Формально операція вилучення вершини може бути записана у вигляді

$$G_1(V_1,E_1)=G(V,E)\backslash G_0\left(\{v_0\},\left\{\underset{i}{\forall}\left[e_{i0},e_{0i}\right]\right\}\right). \qquad (2.4)$$

3. Операція введення ребра

Якщо вершини $u,v \in V$ і ребро $(u,v) \notin E$ в графі G=(V,E), то операція введення ребра

$$G+e=(V,\ E\cup\{e\}), \tag{2.5}$$

де $e=(u,v)$.

Внаслідок комутативності операції об'єднання множин можна стверджувати, що послідовність операцій введення ребер у граф G не залежить від порядку, в якому ці ребра вводяться в граф G. Іншими словами, справедлива тотожність

$$\forall e, e_1 \in E \quad ((G+e)+e_1=(G+e_1)+e). \tag{2.6}$$

4. Операція введення вершини в ребро

Нехай (u,v) — деяке ребро графу G. *Введенням вершини w в ребро* (u,v) називається операція, внаслідок якої одержуємо два ребра (u,w) і (w,v), а ребро (u,v) при цьому вилучається з графу G.

5. Операція об'єднання графів

Граф F називається об'єднанням графів $G=(V,E)$ і $H=(V_1,E_1)$, якщо $F=(V\cup V_1,\ E\cup E_1)$. Граф F позначається $G\cup H$. Об'єднання графів $F=G\cup H$ називається *диз'юнктивним*, якщо $V\cap V_1=\varnothing$.

Безпосередньо з означення операції об'єднання графів випливає, що $(\forall\, G, H)(G\cup H = H\cup G)$.

Операція диз'юнктивного об'єднання графів дає можливість ввести до розгляду ще один важливий тип графів.

Граф є *зв'язним,* якщо його не можна подати у вигляді диз'юнктивного об'єднання двох підграфів, і *незв'язним* — у протилежному випадку. На рис. 2.7 показані ці два випадки об'єднання графів.

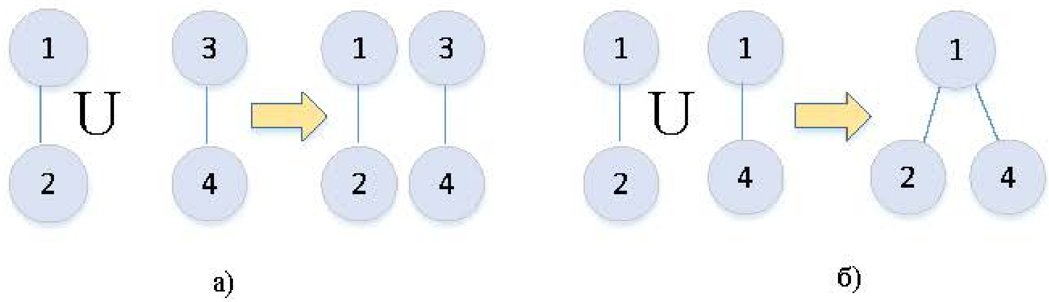


Рисунок 2.7 – Об'єднання графів: а) диз'юнктивне; б) недиз'юнктивне

Отже, будь-який незв'язний граф можна зобразити у вигляді диз'юнктивного об'єднання скінченного числа зв'язних підграфів. Кожний із таких зв'язних підграфів називається *компонентом зв'язності*.

6. Добуток графів

Добутком графів $G=(V,E)$ *і* $H=(V_1,E_1)$ називається граф $F=G\times H$, у якого $V = V \times V_1$, а E визначається таким чином: вершини (u, u_1) і (v, v_1) суміжні в F тоді і тільки тоді, коли $u=v$, а u_1 і v_1 суміжні в H або $u_1=v_1$, а u і v суміжні в G. Приклад наведений на рис. 2.8.

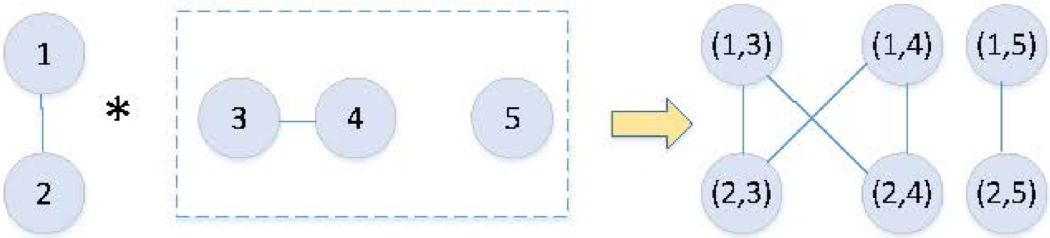


Рисунок 2.8 – Добуток графів

7. Ототожнення (злиття) вершин (рис. 2.9)

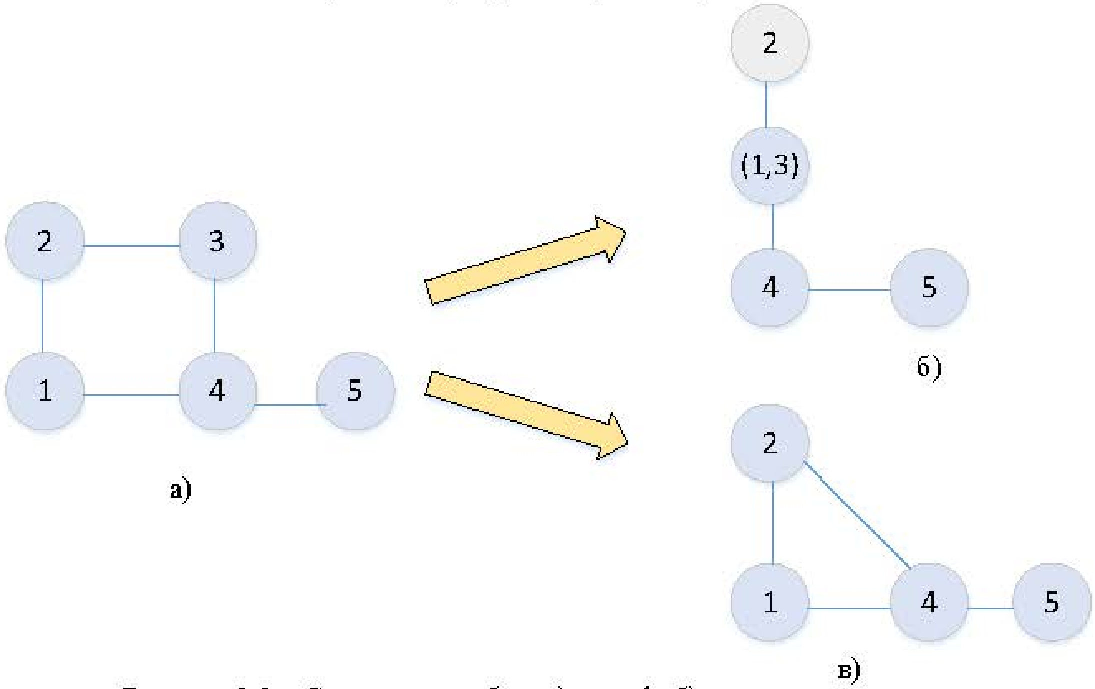


Рисунок 2.9 – Стягування ребра: а) – граф; б) – ототожнення вершин 1 і 3 в G; в) – стягування ребра (2, 3) в G

Якщо $G = (V, E)$ – граф, u, v – дві його вершини, причому вершина v суміжна з вершинами $\{v_1, \ldots, v_l\}$, а вершина u суміжна з вершинами $\{u_1, \ldots, u_k\}$, то граф

$$H\left(V \setminus \{u, v\} \cup u',\ E \setminus \left\{a_{u,(u_i)}, a_{v,(v_j)}\right\} \cup \left\{a_{u',(u_i)}, a_{u',(v_j)}\right\}\right),$$

одержаний приєднанням нової вершини u' до множини вершин замість вилучених вершин u, v і множини ребер $\{(u', u_i)\}, \{(u', v_j)\}$ $(i = 1, 2, \ldots, k, \quad j = 1, 2, \ldots, l)$ замість вилучених $\{(u, u_i), (v, v_j)\}$, $(i = 1, 2, \ldots, k, j = 1, 2, \ldots, l)$ називається графом, одержаним із G ототожненням вершин u і v.

Операція стягування ребра (u, v) в графі $G = (V, E)$ означає ототожнення вершин u і v в графі G. Граф G називається графом, який *стягується до графу* H, якщо H можна одержати з G за допомогою деякої послідовності операцій стягування ребра.

8. Операція роздвоєння (розщеплення) вершини

Нехай v — деяка з вершин графу G. Розіб'ємо множину суміжних з нею вершин довільним чином на дві частини — M і P, а потім виконаємо таке перетворення графу G: вилучимо вершину v разом з інцидентними їй ребрами і введемо дві нові вершини u і w разом з ребром, яке з'єднує ці вершини, вершину u з'єднаємо ребром з кожною вершиною множини M, а вершину w — з кожною вершиною з множини P. Одержаний граф позначимо G' і будемо вважати, що він одержаний з графу G внаслідок роздвоєння (розщеплення) вершини v (рис. 2.10.).

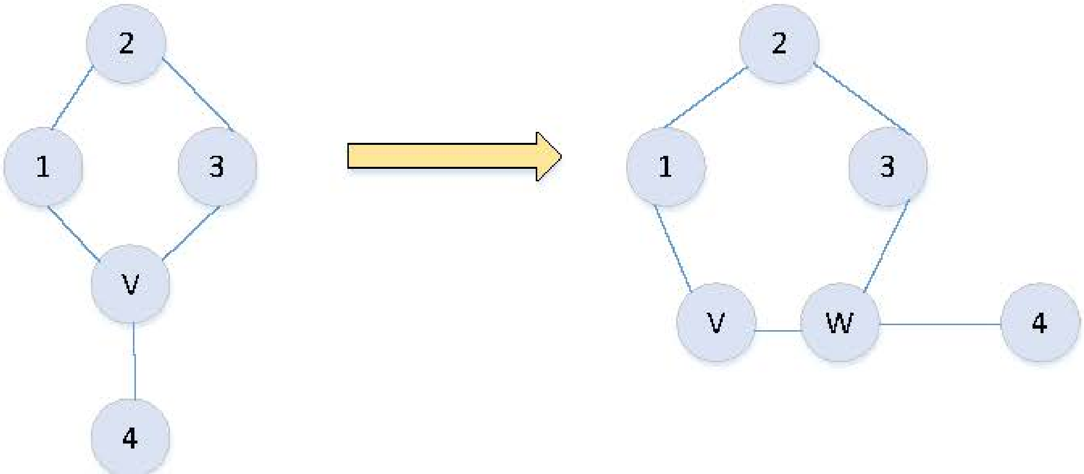


Рисунок 2.10 – Роздвоєння вершини V

Хоча операція роздвоєння вершини є оберненою до операції стягування ребра, проте внаслідок довільного розбиття множини суміжних вершин на підмножини M і P вона є неоднозначною. Отже ці операції не є повністю взаємно оберненими.

9. Операція з'єднання графів

Нехай $G_1 = (V_1, E_1)$ і $G_2 = (V_2, E_2)$ – два графи, у яких множини вершин V_2 і V_1 не перетинаються, тобто $V_2 \cap V_1 = \varnothing$. *Операція з'єднання* графів G_2 і G_1 полягає в тому, що множини V_2 і V_1 об'єднуються, а потім з'єднується ребрами кожна вершина графу G_2 з кожною вершиною графу G_1

$$G = G_1 \,\overline{\cup}\, G_2 = G\left(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \left\{E\left(v_1, v_2\right): v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\right\}\right) \quad (2.7)$$

Очевидно, що операція з'єднання графів може бути виражена у вигляді добутку (суперпозиції) операції об'єднання графів G_2 і G_1 та послідовності операцій введення ребра.

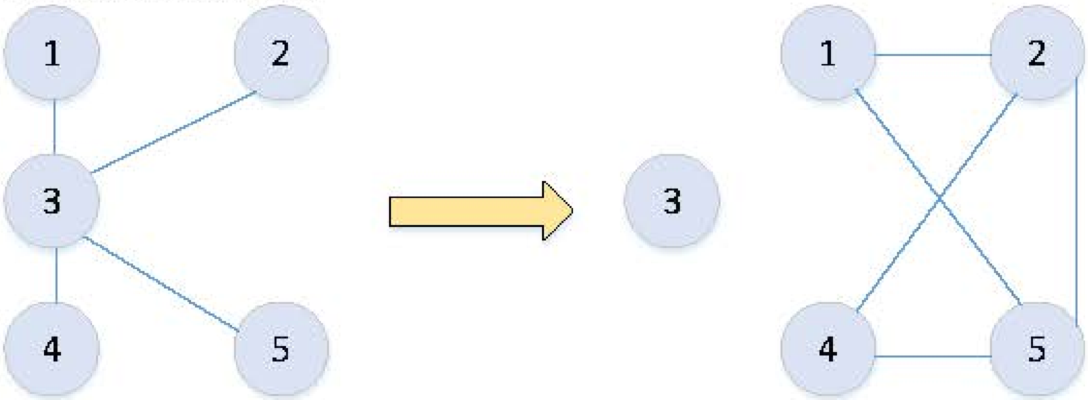
10. Перетин графів

Якщо дано граф $G_1 = (V_1, E_1)$ і граф $G_2 = (V_2, E_2)$, то перетин графів

$$G = G_1 \cap G_2 = G\left(V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2\right). \quad (2.8)$$

11. Операція доповнення (знаходження різниці) графів

Нехай $G = (V, E)$ – граф. *Доповненням* G^* графу G називається граф з множиною вершин V, в якому дві вершини суміжні тоді і тільки тоді, коли вони не суміжні в графі G (рис. 2.11). Звідси випливає, що коли граф G має n вершин, то граф G^* можна побудувати, вилучивши з повного графу (тобто графу, в якому між кожною парою вершин є ребро) всі ребра, які належать G (граф G вважається підграфом графу K_n).



а) **б)**

Рисунок 2.11 – Доповнення графу: а – граф G,
б – доповнення графу G

Очевидно також, що доповнення повного графу є пустим графом і, навпаки, доповнення пустого графу є повним графом. Неважко довести, що доповнення регулярного графу є регулярним графом.

Якщо у топологічному просторі графів визначити метрику, то операція доповнення графів дозволить розглядати чисельну характеристику різниці графів з однаковою потужністю множини вершин.

12. Додавання вершини

Додавання вершини v_0 до графу $G_1 = (V_1, E_1)$ зводиться до з'єднання графів $G(V, E) = G_1(V_1, E_1) \cup G_0(\{v_0\}, \emptyset)$;

Формальний опис на основі матриць інциденції

Формалізовані у множинному вигляді операції над графами використовуються переважно для теоретичних досліджень структурних моделей та доведення правильності результатів алгоритмів, що призначені для розв’язання задач на графух. При комп’ютерному моделюванні зручнішим є подання операцій над графами як операцій над відповідними матрицями.

Операції над графами у матричному вигляді задаються наборами правил виконання кожної операції. Так наприклад, операція вилучення вершини передбачає:

– виділення у матриці інциденції відповідного рядка;
– виділення у матриці стовпців, на перетині яких з виділеним рядком є знак, відмінний від нуля;
– вилучення виділених рядка і стовпців.

Аналогічно формулюються інші операції над графами у матричному вигляді.

Морфологічні перетворення структурних моделей

Останнім часом у зв'язку з розв'язанням задач обробки зображень і розпізнавання образів широко використовуються морфологічні операції над графами. Морфологічні операції полягають у виділенні компактних підграфів базового графу, які характеризуються певними ознаками. Для цього використовуються операції додавання або вилучення ребер та вершин, в результаті чого зв’язність вершин всередині підграфів збільшується, зв’язність окремих підграфів зменшується. Таким чином краще виявляються структурні особливості графу.