2.5 Потокові графи

Транспортна мережа – це технічний об'єкт, яким розповсюджуються потоки. Прикладами таких мереж є водогінна мережа, комп'ютерна мережа, мережа автомобільних доріг тощо.

Потік – це кількість речовини, енергії або інформації, яка проходить через переріз за одиницю часу.

Моделлю транспортної мережі є зважений граф, у якому задані ***потоки*** $v(x,y)$ і ***пропускні спроможності*** ребер $c(x,y)$ – максимальні кількості потоку, які можуть проходити через ребра від витоку до стоку, де x – початкова вершина ребра, y – кінцева вершина.

Значення потоків визначаються функцією потоку $f(x,y)$, причому

$$f(x,y) \le c(x,y). \tag{2.9}$$

В мережі існує три типи вузлів:
– *виток* ***S***, з якого виходить більше потоку, ніж входить в нього;
– *сток* ***T***, в який входить більше потоку, ніж виходить з нього;
– *проміжні вузли*, в які скільки виходить потоку, стільки ж і входить.

Приклад мережі показаний на рис. 2.3, г. На рисунку кожне ребро охарактеризоване пропускною здатністю (перша цифра) і величиною потоку (друга цифра). Наведена мережа має один виток, два стоки і 9 проміжних вузлів.

Для мережі можна записати певні співвідношення, які повинні задовольняти потоки через ребра:

1) головна умова існування мережі

$$\underset{i,j}{\forall} V_{ij} \le C_{ij}. \quad i,j = 1..N; \tag{2.10}$$

2) умова балансу потоків у проміжному вузлі (сума потоків, які входять з усіх інших вершин в j-ту вершину, дорівнює сумі потоків, що виходять з j вершини)

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\ne j \\ j\ne S \\ j\ne T}}^{N} V_{ij} = \sum_{\substack{i=1 \\ i\ne j}}^{N} V_{ji}; \tag{2.11}$$

3) умова витоку (сума всіх потоків від витоку до всіх інших вершин більша, ніж сума всіх потоків, що входять від і-их вершин до витоку)

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\ne S}}^{N} V_{Si} > \sum_{\substack{i=1 \\ i\ne S}}^{N} V_{iS}; \tag{2.12}$$

4) умова стоку (сума всіх потоків до стоку від усіх інших вершин більша ніж сума всіх потоків, що виходять зі стоку)

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq T}}^{N} V_{Ti} < \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq T}}^{N} V_{iT}\ ; \tag{2.13}$$

5) умова збереження кількості потоку в мережі

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq S}}^{N} (V_{Si} - V_{iS}) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq T}}^{N} (V_{iT} - V_{Ti}). \tag{2.14}$$

При дослідженні мереж за допомогою потокових графів використовують такі їх характеристики.

Нагадаємо, що розріз – розбиття множини усіх вершин V на дві підмножини A і B такі, що $s \in A$, $t \in B$, причому перетин $A \cap B = \emptyset$.

Пропускна здатність розрізу (A, B) – сума пропускних спроможностей усіх ребер, які ведуть з A в B

$$\sum_{u \in A} \sum_{v \in B} c(u,v).$$

Потік через розріз (A, B) – сума усіх потоків з A в B

$$\sum_{u \in A} \sum_{v \in B} f(u,v).$$

Він не може перевищувати пропускну спроможність розрізу.

Мінімальний розріз – розріз з мінімальною пропускною спроможністю.

Залишкова пропускна спроможність ребра $c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$. Вона завжди невід’ємна.

Залишкова мережа – граф $G_f = (V, E_f)$, де E_f – множина ребер з додатною залишковою пропускною спроможністю.

Потокові графи широко використовуються для розв’язування практичних задач. Однією (дуже поширеною!) задачею є *задача про максимальний потік: у потоковому графі знайти максимальний потік, який може бути переданий з витока до стока.* Прикладом такої задачі є знаходження максимальної пропускної спроможності комп’ютерної мережі.

Задача про максимальний потік розв’язується на основі т**еореми Форда – Фалкерсóна** – теореми про максимальний потік у графі: величина максимального потока у графі дорівнює величині пропускної спроможності його мінімального розрізу.

На цій теоремі оснований алгоритм Форда-Фалкерсона пошуку максимального потоку в графі.

Моделювання топології електричних кіл

Одним з найпоширеніших застосувань потокових графів є моделювання електричних кіл, оскільки для електричних кіл виконується 1-й закон Кірхгофа. Цей закон відповідає умовам (2.11) – (2.14). Що ж стосується умови (2.10), то в реальних електричних колах завжди є обмеження максимального значення електричного струму в провідниках та елементах. Так наприклад, якщо максимальна потужність резистора R дорівнює P_{max}, то максимально допустимий струм (пропускна спроможність) буде $C = I_{\max} = \sqrt{P_{\max}/R}$.

Інформація про структуру електричного кола міститься в його схемі (наприклад, рис. 2.12, а). Для отримання графу двополюсні елементи заміняють ребрами графу (рис. 2.12, б). Місце з'єднання гілок графу – вузол електричного кола. Джерело живлення, яке на рис. 2.12, а не показане, теж є елементом схеми і на графі показане ребром.

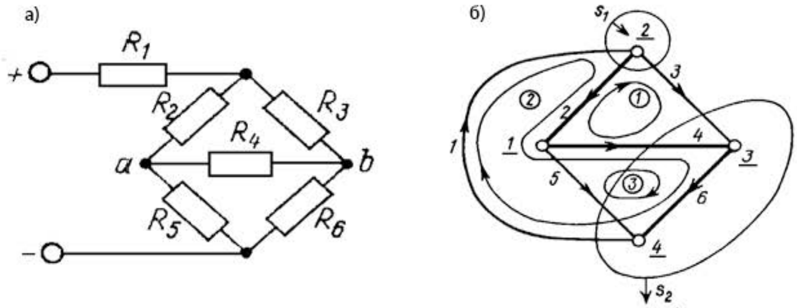

Рисунок 2.12 – Електричне коло та його модель

Перед початком аналізу кола на схемі заміщення вказують напрямок відліку (умовні позитивні напрямки) струмів або на окремих ділянках. Вибір напрямку відліку є довільним. Найбільш природно вибрати як напрямок відліку струмів напрямок руху позитивних зарядів. Стрілки на рис. 2.12, б вказують прийняті напрямки відліку струмів.

Переріз графу зображують на графі або схемі кола у вигляді замкненого контуру, що охоплює частину кола, яка включає один або декілька вузлів. Окремі ребра перетину направленого графу перетинають цю поверхню в різних напрямках. Можна прийняти позитивним напрям перетину поверхні назовні. Такий перетин називається орієнтованим.