3 ФУНКЦІОНАЛЬНІ МОДЕЛІ

Функціональні моделі описують процеси, які відбуваються в об'єкті моделювання. Якщо об'єктом моделювання є система керування, то функціональна модель відображає залежність стану системи і її вихідних сигналів від зовнішніх впливів.

У загальному випадку модель системи можна розглядати як *операторне перетворення*

$$\Theta_Y = F(S, Z, f, t)[\Theta_X], \tag{3.1}$$

де Θ_X – множина характеристик вхідних впливів; Θ_Y – множина характеристик вихідних величини і параметрів стану; F – оператор перетворення; Z – параметри системи; S – структура системи; f – вектор зовнішніх збурень; t – час.

Таким чином, функціональна модель системи складається з моделей вхідних та вихідних величин і оператора перетворення.

Якщо набір характеристик Θ містить значення вхідних та вихідних величин та їх похідних, то операторне перетворення може бути подане *диференціальним рівнянням*. Для прикладу розглянемо систему, зображену на рис. 3.1, яку можна описати диференціальним рівнянням другого порядку

$$F[y, \dot{y}, \ddot{y}, x, \dot{x}] + f = 0, \tag{3.2}$$

де y – вихідна величина, x і f – вхідні впливи, $\dot{y}$ і $\dot{x}$ – перші похідні у часі, $\ddot{y}$ – друга похідна у часі.

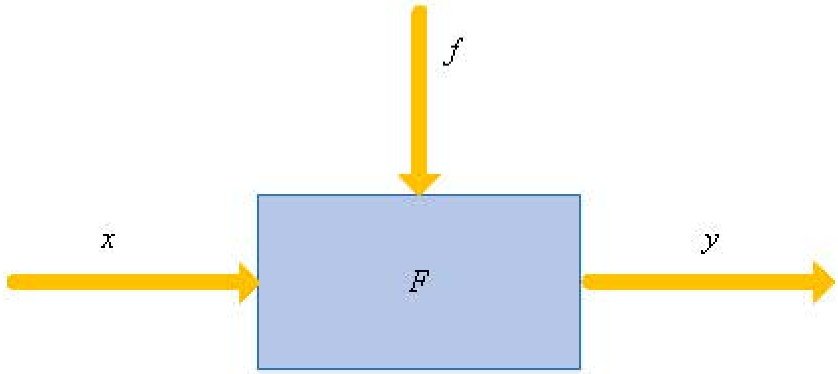

Рисунок 3.1 – Узагальнене зображення об'єкта моделювання

Рівняння (3.2), яке описує процеси в часі при довільних вхідних впливах, називається *рівнянням динаміки*. Нехай при постійних вхідних величинах ($x=x_0$ і $f=f_0$) процес протягом часу встановиться – вихідна величина прийме постійне значення $y = y_0$. Тоді (3.2) матиме вигляд:

$$F[y_0, 0, 0, x_0, 0] + f_0 = 0. \tag{3.3}$$

Це рівняння описує встановлений чи *статичний режим*, його називають *рівнянням статики*.

3.1 Моделі статики

Модель статики системи – це залежність між вхідною і вихідною величинами у встановленому стані. Графік, який виражає цю залежність, називається *статичною характеристикою*.

3.1.1 Модель статики як окремий випадок загальної операторної функціональної моделі

Рівняння статики можна отримати з диференціального рівняння динаміки системи шляхом прирівнювання до нуля похідних в цьому рівнянні, в результаті чого рівняння перетворюється в алгебраїчне.

Модель статики може подаватися одним рівнянням, або системою рівнянь

$$\begin{cases} N_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{f}) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ N_n(\bar{x}, \bar{y}, \bar{f}) = 0 \end{cases} . \tag{3.4}$$

де риска над змінною означає вектор.

У певних досить простих випадках система рівнянь може бути зведена до одного рівняння (*композиція моделі*) і навпаки (*декомпозиція моделі*).

Якщо система має декілька входів, то описується за допомогою *сімейства* чи сімейств статичних характеристик. Наприклад, систему, яка характеризується в статичному режимі рівнянням (3.3), можна описати графічно за допомогою сімейства статичних характеристик, які являють собою криві залежності вихідної величини *y(x)* при різних фіксованих значеннях збурення $\bar{f}$.

3.1.2 Лінійні та нелінійні моделі. Типові нелінійності

Більшість систем керування є лінійними. В лінійних системах виконується принцип суперпозиції, тобто стан (вихідний сигнал y) є лінійною комбінацією вхідних впливів x_i

$$y = \sum_i a_i x_i + b, \tag{3.5}$$

де a_i і b – коефіцієнти.

При агрегатному підході модель статики подається системою лінійних алгебраїчних рівнянь. Це є спрощенням, яке дозволяє використати зручний математичний апарат лінійної алгебри та лінійного програмування для моделювання і оптимального проектування систем.

Реальні системи найчастіше мають у своєму складі нелінійні елементи, отже вони є в цілому нелінійними. Способи моделювання нелінійних систем суттєво залежать від типу нелінійності. Типові нелінійності зображено на рис. 3.2. Зустрічаються також різноманітні комбінації цих характеристик, наприклад гладка характеристика з зоною нечутливості або екстремальна з двома екстремумами і асимптотичним наближенням до певного значення тощо.

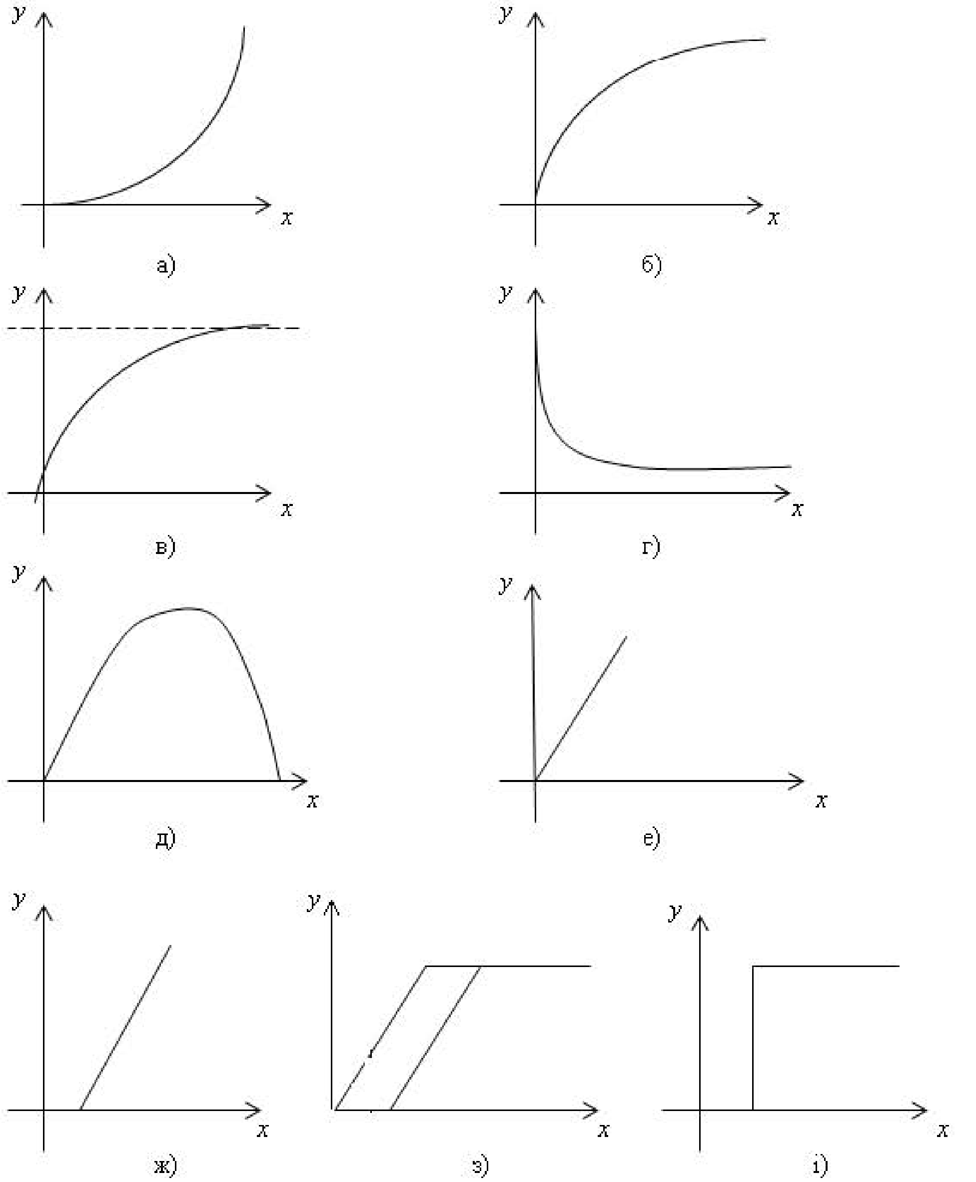

Рисунок 3.2 – Типові нелінійності: гладка опукла донизу (а), гладка опукла догори (б), асимптотично зростаюча (в), асимптотично спадна (г), екстремальна (д), кусково-лінійна з обмеженням (е), кусково-лінійна із зоною нечутливості (ж), характеристика з люфтом (з), релейна або розривна характеристика (і)

3.1.3 Лінеаризовані моделі

В багатьох випадках можна замінити вихідні нелінійні рівняння лінійними, які наближено описують процеси в системі. Процес перетворення нелінійних рівнянь в лінійні називається *лінеаризацією.*

Існують різні методи лінеаризації в залежності від вигляду нелінійної характеристики та інших особливостей системи.

В системах регулювання повинен підтримуватись деякий заданий стан. Але через різні збурювальні фактори фактично стан відрізняється від потрібного (заданого). В нормально діючій системі ці відхилення від потрібних значень малі. Це дозволяє провести лінеаризацію, розкладаючи нелінійні функції, які входять у рівняння, в ряд Тейлора

$$y = N(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \tag{3.6}$$

де $a_0 = N(x_0)$, $a_i = \frac{N^{(i)}(x_0)}{i!}$, $N^{(i)}(x_0)$ – i-та похідна нелінійної залежності $N(x)$, обчислена у точці x_0.

Відповідно, лінеаризована характеристика

$$y \approx N(x) = a_0 + a_1 x. \tag{3.7}$$

Лінеаризована модель характеризується *похибкою лінеаризації*, яка дорівнює залишковому члену ряду Тейлора

$$\Delta_л = \sum_{i=2}^{\infty} a_i x^i. \tag{3.8}$$

Відповідно середня похибка лінеаризації на інтервалі $[X_{\min}, X_{\max}]$ знаходиться шляхом розкладання у степеневий ряд

$$\overline{\Delta_л} = \frac{1}{X_{\max} - X\min} \int_{X_{\min}}^{X_{\max}} \sum_{i=2}^{\infty} a_i x^i \cdot dx = \frac{1}{X_{\max} - X\min} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a_i}{i} \left(X_{\max}^{i-1} - X_{\min}^{i-1} \right).$$

Лінеаризація шляхом розкладання у степеневий ряд проста, але не завжди можлива (повинні виконуватися умови розкладання – відсутність розривів функції та її похідних, а також мала величина відхилення від точки розкладання) і найчастіше характеризується значною похибкою.

Часто нелінійну залежність між окремими змінними, які входять в модель статики, задають у вигляді кривої. В цих випадках лінеаризацію можна виконати графічно, як показано на рис. 3.3, а.

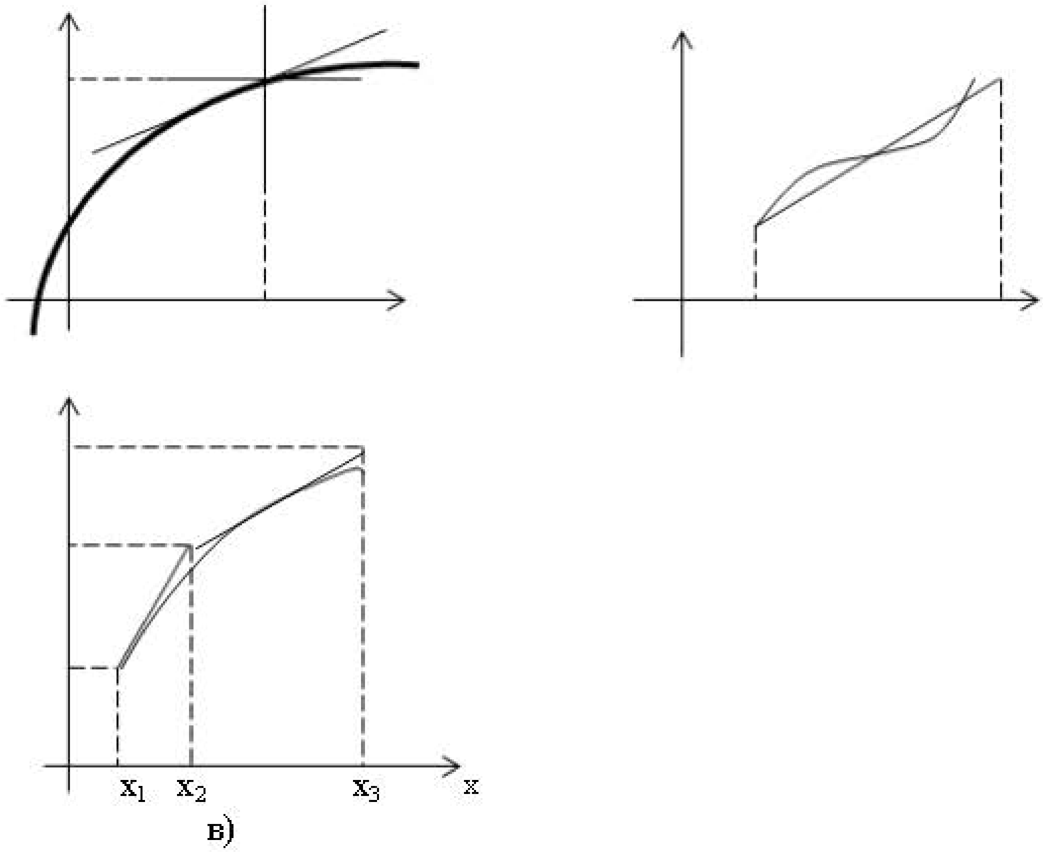

Рисунок 3.3 – Лінеаризація статичної характеристики: а) у точці, б) на відрізку, в) кускова

Лінеаризація може також виконуватися шляхом лінійної апроксимації (рис. 3.3, б), яка позбавлена зазначених вище недоліків. Найчастіше таку апроксимацію виконують за критерієм мінімуму суми квадратів відхилень, тобто пошуку таких коефіцієнтів (*a, b*) рівняння прямої

$$y = ax + b\,,$$

які забезпечують мінімум с.к.в.

$$\min_{a,b}\left\{\sigma^2 = \frac{1}{x_{\max} - x_{\min}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} [N(x) - (ax+b)]^2 dx\right\}. \tag{3.9}$$

Якщо похибка лінеаризації перевищує допустиму, то може здійснюватися *кускова лінеаризація* (рис. 3.3, в). Це дозволяє зменшити інтервал лінеаризації за допомогою розбиття його на частини, що забезпечує зменшення похибки лінеаризації.

При кусково-лінійній апроксимації здійснюється пошук не коефіцієнтів лінійних функцій, а координат точок перетину лінійних відрізків. Ця задача має вигляд задачі оптимізації з обмеженнями:

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^{\,2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_{i\,r}-x_{i\,l}}\int\limits_{x_{i\,l}}^{x_{i\,r}}\left[y(x)-\left(y_{i\,l}+\frac{y_{i\,r}-y_{i\,l}}{x_{i\,r}-x_{i\,l}}(x-x_{i\,l})\right)\right]^2 dx\right\} \tag{3.10}$$

$$\text{при } \begin{cases} x_{i\,r}=x_{i+1\,l}\\ y_{i\,r}=y_{i+1\,l}\\ x_{1\,l}=x_{\min}\\ x_{n\,r}=x_{\max}\end{cases},$$

де n – кількість відрізків; $x_{i\,l}$ – ліва межа i-го відрізку; $x_{i\,r}$ – права межа i-го відрізка.

3.1.4 Нелінійна апроксимація (поліномами, сплайнами, вейвлетами тощо)

У деяких задачах необхідно забезпечувати максимальну точність моделі, незважаючи на її ускладнення через врахування нелінійності. Тоді виникає необхідність аналітичного опису нелінійності у деякій системі базисних функцій. Таке подання нелінійної залежності називають нелінійною апроксимацією. Як базисні звичайно обирають функції, для яких вже існують достатньо зручні алгоритми розрахунку параметрів.

Найпоширенішим способом апроксимації є поліноміальний. Цей спосіб застосовується у випадках, коли причина походження нелінійності невідома, але нелінійна залежність є достатньо гладкою на вигляд. При поліноміальній апроксимації статична характеристика подається сумою степеневих функцій

$$f(x)\approx\sum_{i=0}^{n}a_i x^n, \tag{3.11}$$

де a_i – коефіцієнти апроксимації; n – степінь полінома.

Відомі декілька формул для розрахунку коефіцієнтів апроксимації, наприклад, формула Лагранжа

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\left[f_i\prod_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{n}\frac{x-x_i}{x_i-x_j}\right]. \tag{3.12}$$

Але загальним недоліком поліноміальної апроксимації є принципова неможливість у багатьох випадках отримання достатньої точності. Причиною є необхідність, з одного боку, збільшувати кількість членів полінома для підвищення точності апроксимації, але, з іншого боку, ці члени містять високі степені аргумента, розрахунок яких призводить до значних обчислювальних похибок.

Для підвищення точності використовують апроксимацію функціями, які за своїми властивостями наближаються до статичної характеристики об'єкта. Так наприклад, при апроксимації характеристики з багатьма екстремумами доцільно використовувати вейвлети, при апроксимації характеристик напівпровідникових приладів доцільно використовувати експоненціальні функції (оскільки фізичні процеси у напівпровідниках описуються експоненціальними залежностями).

Вейвлет (*wavelet* – хвилька) – функція, яка складається з декількох коливань певної частоти. Вейвлети можуть застосовуватися для моделювання немонотонних статичних характеристик, але в основному застосовуються для моделювання скінченних хвильових процесів, форми шорсткої поверхні тощо. Приклади вейвлетів наведені на рис. 3.4.

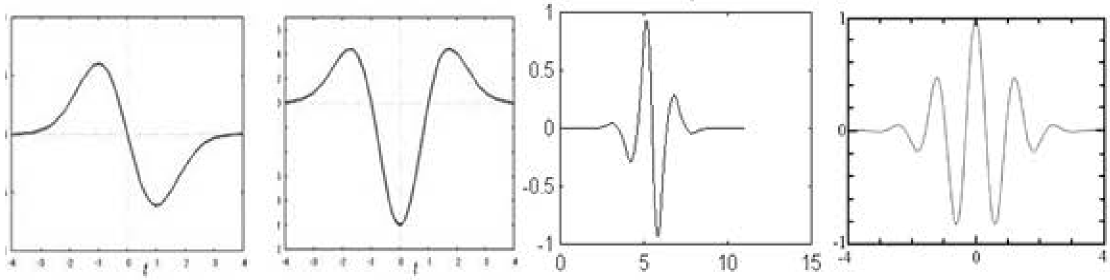

Рисунок 3.4 – Приклади вейвлетів

Ще одним способом подання моделі статики є використання кусково-нелінійної апроксимації. Якщо на кожному інтервалі розбиття статичної характеристики для апроксимації використовуються поліноми, то ми отримаємо кусково-поліноміальну апроксимацію. Відповідно кусково-лінійна апроксимація є окремим випадком кусково-поліноміальної із степенем полінома n=1.

Останнім часом широко використовують апроксимацію сплайнами. Під ***сплайном*** розуміють агрегатну функцію, яка збігається з апроксимованою функцією на кожному елементі розбиття області визначення.

Класичний сплайн однієї змінної будується так: область визначення розбивається на кінцеву кількість відрізків, на кожному з яких сплайн збігається з певним алгебраїчним поліномом. Максимальний степінь використаних поліномів називається степенем сплайна. Зокрема, кубічні сплайни широко використовуються для створення лекал (лекала дозволяють будувати плавні криві по 4-х точках – стільки точок необхідно для визначення кубічного сплайна

$$y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0.$$

Приклади лекал показані на рис. 3.5. Наявність 4-х коефіцієнтів апроксимації у кубічному сплайні означає, що для побудови лекальної кривої необхідно мати 4 точки цієї кривої і підібрати на лекалі ділянку, яка добре співпадає з цими точками.

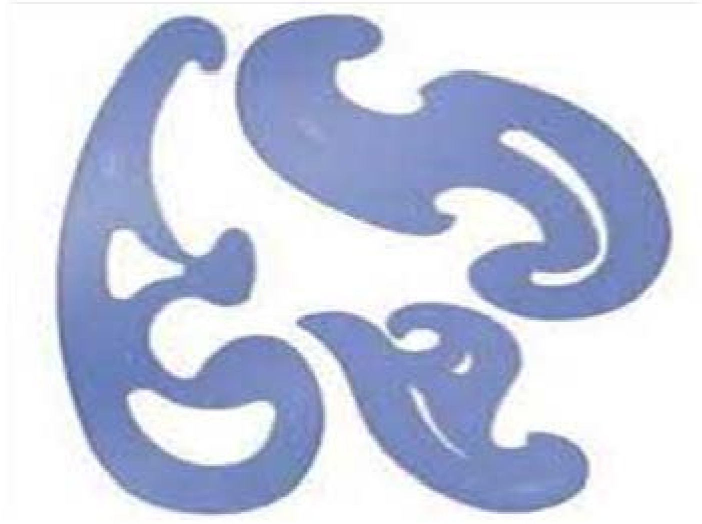

Рисунок 3.5 – Лекала, побудовані з використанням кубічних сплайнів

B-сплайном називають сплайн-функцію, яка має найменший носій (тобто мінімальну неперервну область визначення) для заданого степеня, гладкості і розбиття області визначення. Будь-яка сплайн-функція для заданого степеня, гладкості і області визначення може бути подана як лінійна комбінація відповідних *B*-сплайнів. *B*-сплайни можуть бути обчислені за допомогою алгоритму де Бора.

Коли вузли рівновіддалені один від одного кажуть, що *B*-сплайн є *однорідним*.

Коли кількість вузлів збігається зі степенем сплайна, *B*-сплайн перетворюється на *криву Безьє*.

Неоднорідний раціональний *B*-сплайн (NURB) – різновид сплайна, який широко застосовується у комп'ютерній графіці для зображення кривих і поверхонь.

На завершення наведемо таблицю 3.1 найпоширеніших типів стандартних кривих, які застосовуються у математичних моделях.

Таблиця 3.1 – Стандартні криві

Плоскі криві	**Алгебраїчні**	Конусні перетини (2-й порядок)	Гіпербола Парабола Еліпс (Коло)
		Еліптичні (3-й порядок)	Еліптична крива Функції Якобі
		Лемніскати (2*n* порядок)	Бернуллі (Овал Кассіні) Бута Жероно
		Апроксимаційні криві	Сплайни (В-сплайн, Кубічний сплайн,· Моносплайн, Сплайн Ерміта) Крива Безьє
		Інші (у дужках вказано порядок)	Верзьєра Аньєзі (3) Декартів лист (3) Півкубічна парабола (3) Строфоїда (3) Цисоїда Діокла (3)
	Трансцендентні	Спіралі	Архімедова (Ферма) Гіперболічна «Жезл» Клотоїда Логарифмічна
		Циклоїдальні (породжені колом, що котиться)	Циклоїда Епіциклоїда (Кардіоїда, Нефроїда) Гіпоциклоїда (Дельтоїда − крива Штейнера, Астроїда) Трохоїда (Подовжена циклоїда, Скорочена циклоїда) Епітрохоїда (Подовжена епіциклоїда, Скорочена епіциклоїда, Равлик Паскаля «Троянда») Гіпотрохоїда Найшвидшого спуску (Брахістохрона, Дуга циклоїди)
		Фрактальні	Крива Коха Крива Леві Крива Мінковського Крива Пєано Топологічні: серветка і ковдра Серпінського, губка Менгера
		Інші	Квадратриса Крива погоні (Трактриса) Ланцюгова лінія (перевернута аркова) Крива постійної ширини Синусоїда
		Перетворені криві	Еволюта Евольвента Каустика
Неплоскі			Гвинтова лінія Лінія схилу Локсодрома Ортодрома

3.1.5 Моделі логіки

Окремим випадком функціональних моделей статики є *моделі логіки*.

Моделі логіки оперують з двозначними об'єктами «істина» та «хибність», які для зручності позначаються символами відповідно «1» та «0». В загальному вигляді модель логіки є логічним висловленням, яке має вигляд рівняння

$$y = L(x_1, x_2, \dots x_n), \tag{3.13}$$

де $(x_1, x_2, \dots x_n)$ – вхідні логічні змінні, які приймають логічні значення, y – логічний результат, L – логічна функція, записана за допомогою логічних операцій.

Сукупність логічних об'єктів та операцій над ними є алгеброю логіки.

Усі логічні операції розділяються на унарні (з одним вхідним даним) і бінарні (з двома вхідними даними). Унарні та бінарні операції над логічними даними визначаються за комбінаторним принципом. Унарні операції подані таблицями рис. 3.6.

$y = x$

X	Y
0	0
1	1

а)

$y = \overline{x}$

X	Y
0	1
1	0

б)

Рисунок 3.6 - Унарні операції: а) *повторення*, б) *інверсія*

Деякі бінарні операції подані на рис. 3.7.

$y = x_1 \cap x_2$		
x_1	x_2	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

а)

$y = x_1 \cup x_2$		
x_1	x_2	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

б)

$y = x_1 \oplus x_2$		
x_1	x_2	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

в)

Рисунок 3.7 - Бінарні операції: а) *кон'юнкція*, б) *диз'юнкція*, в) *імплікація*

Доведено, що серед усіх унарних та бінарних операцій можна виділити *функціонально повні групи*, тобто такі, за допомогою яких можна подати усі інші операції. Найпоширенішими операціями, які утворюють функціонально повну групу, є пари операцій: {кон'юнкція і інверсія} або {диз'юнкція і інверсія}. На практиці найчастіше використовують надлишковий базис, який складається з операцій кон'юнкції, диз'юнкції і інверсії. Для цих операцій виконуються закони логіки:

Комутативність	$x \cup y = y \cup x$	$x \cap y = y \cap x$
Асоціативність	$x \cup y \cup z = (x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$	$x \cap y \cap z = (x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$
Дистрибутивність	$(x \cup y) \cap z = (x \cap z) \cup (y \cap z)$	
Закони інверсії Де Моргана	$\overline{x \cup y} = \overline{x} \cap \overline{y}$	$\overline{x \cap y} = \overline{x} \cup \overline{y}$

Будь-яку логічну функцію можна подати у вигляді досконалих кон'юнктивної або диз'юнктивної нормальних форм (ДКНФ і ДДНФ). Наприклад, нехай логічна функція $y(x_1, x_2, x_3)$ задана таблицею

Аргументи			Функція
x_1	x_2	x_3	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1

(Продовження)

Аргументи			Функція
x_1	x_2	x_3	y
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Тоді ДДНФ записується на основі рядків, у яких $y = 1$

$$y = \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 \cup \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \cup \overline{x_1} x_2 x_3 ,$$

де знак кон'юнкції (логічного добутку) для зручності не показаний.

Ґрунтуючись на законах алгебри логіки, досконала форма може бути спрощена.