3.2 Моделі динаміки

Моделі динаміки значно складніші і різноманітніші за моделі статики. Якщо моделі статики описують перетворення *вхідної величини* на *вихідну величину*, то моделі динаміки описують перетворення *вхідної функції часу* на *вихідну функцію часу*

$$x(t) \rightarrow y(t) \tag{3.14}$$

3.2.1 Модель динаміки як окремий випадок загальної операторної функціональної моделі

Модель динаміки складається з *моделі сигналів* і *моделі їх перетворення*. Модель динаміки лінійної системи може бути подана рівнянням

$$Y = WX,$$

де X – модель вхідного сигналу, Y – модель вихідного сигналу, W – оператор перетворення.

Модель динаміки системи може подаватися у різних ізоморфних та гомеоморфних формах:

- функції часу і диференціальні рівняння;
- функції часу і інтегральні рівняння;
- зображення сигналів і операторні рівняння;
- спектри сигналів і комплексні частотні передатні функції;
- спектри сигналів і амплітудно-фазові частотні характеристики;
- функції часу і перехідні функції і характеристики.

Розглянемо зв’язки між ними.

3.2.2 Моделі динаміки у просторі станів

Диференціальні рівняння є базовою і найпоширенішою формою моделей динаміки.

Залежно від того, входить чи ні час в рівняння в явному вигляді, системи поділяються на стаціонарні і нестаціонарні. Автоматичні системи керування називають *стаціонарними*, якщо вони при постійних зовнішніх впливах описуються рівняннями, які явно не залежать від часу. Це означає, що динамічні властивості системи з часом не змінюються. Рівняння, в якому час не входить явно, називаються *автономними*. Тому стаціонарні системи можна визначити як системи, які при постійних зовнішніх впливах описуються автономними рівняннями.

Автоматичні системи називають *нестаціонарними,* якщо при постійних зовнішніх впливах вони описуються рівняннями, в які час входить явно. Такі рівняння називаються *неавтономними.* Тому нестаціонарні системи можна визначити як такі системи, які при постійних зовнішніх впливах описуються неавтономними рівняннями. За означенням динамічні властивості нестаціонарних систем з часом змінюються.

Приклади моделей стаціонарних і нестаціонарних систем:

– стаціонарна

$$\frac{d^2 y(t)}{dt} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 0.5x(t);$$

– нестаціонарна

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2t\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 0.5x(t).$$

Тут у моделі стаціонарної системи коефіцієнт при першій похідній виходу не залежить від часу, а у нестаціонарної – залежить.

Стаціонарними лінійними системами називають системи, які описуються лінійними диференціальними рівняннями з постійними коефіцієнтами.

Нестаціонарними лінійними системами або системами зі змінними параметрами називаються системи, які описуються лінійними рівняннями зі змінними коефіцієнтами.

Для лінійних систем справедливий *принцип суперпозиції*, тобто при дії на систему декількох впливів результат буде сумою результатів дії кожного впливу окремо. Наприклад, модель динаміки

$$\frac{d^2 y(t)}{dt} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 0.5x(t) + 2\frac{du(t)}{dt} - v(t)$$

може бути подана у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 y_1(t)}{dt^2} + 2\dfrac{dy_1(t)}{dt} + 3y_1(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} + 0.5x(t) \\ \dfrac{d^2 y_2(t)}{dt^2} + 2\dfrac{dy_2(t)}{dt} + 3y_2(t) = 2\dfrac{du(t)}{dt} \\ \dfrac{d^2 y_3(t)}{dt^2} + 2\dfrac{dy_3(t)}{dt} + 3y_3(t) = -v(t) \\ y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) \end{cases}.$$

Звичайно лінійні диференціальні рівняння з постійними коефіцієнтами записуються в стандартній формі (з одиничними коефіцієнтами при y і x). Так, для рівняння другого порядку

$$a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = b_1\dot{x} + b_0 x + c_0 f, \tag{3.15}$$

де $x(t)$ – вхідний вплив; $y(t)$ – стан (вихідний сигнал); $f(t)$ – збурення, стандартна форма матиме вигляд

$$T^2{}_0\ddot{y} + T_1\dot{y} + y = k_1(T_2\dot{x} + x) + k_2 f, \tag{3.16}$$

де $T_0 = \sqrt{a_2 / a_0}$,, $T_1 = a_1 / a_0$, $k_1 = b_1 / a_2$, $T_2 = b_0 / b_1$, $k_2 = c_0 / a_0$.

В рівнянні (3.16) постійні T_0, T_1 і T_2 мають розмірність часу і їх називають постійними часу, а коефіцієнти k_1, k_2– передатними коефіцієнтами.

Моделі динаміки у просторі станів переважно розглядають в умовах визначеності, тобто висловлюють припущення про характер вхідних впливів і збурень. Тоді права частина диференціального рівняння (3.16) (або іншого, яке є моделлю динаміки системи) є визначеною функцією часу, що дозволяє розв'язати це рівняння. Нагадаємо, що розв'язок лінійного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами знаходять як суму загального розв'язку однорідного рівняння (з нульовою правою частиною) і окремого розв'язку неоднорідного рівняння. Перше є сумою n експонент, де n – порядок лівої частини рівняння, друге – сумою інтегралів від правої частини з кратністю інтегрування від 0 до n і невизначеними коефіцієнтами, які визначаються з початкових і кінцевих умов.

З усіх типових моделей динаміки у просторі станів особливо виділяють модель при вхідному впливі у вигляді функції Хевісайда H(t) (одиничний ступінчастий сигнал) – тоді вихідним сигналом системи буде перехідна функція (а її графіком – перехідна характеристика) і у вигляді функції Дірака або δ-функція (похідна від функції Хевісайда – імпульс нескінченно малої ширини і нескінченно великої амплітуди, площа якого дорівнює 1) – тоді вихідним сигналом системи буде імпульсна перехідна функція (а її графіком – імпульсна перехідна характеристика), приклади яких показані на рис. 3.8.

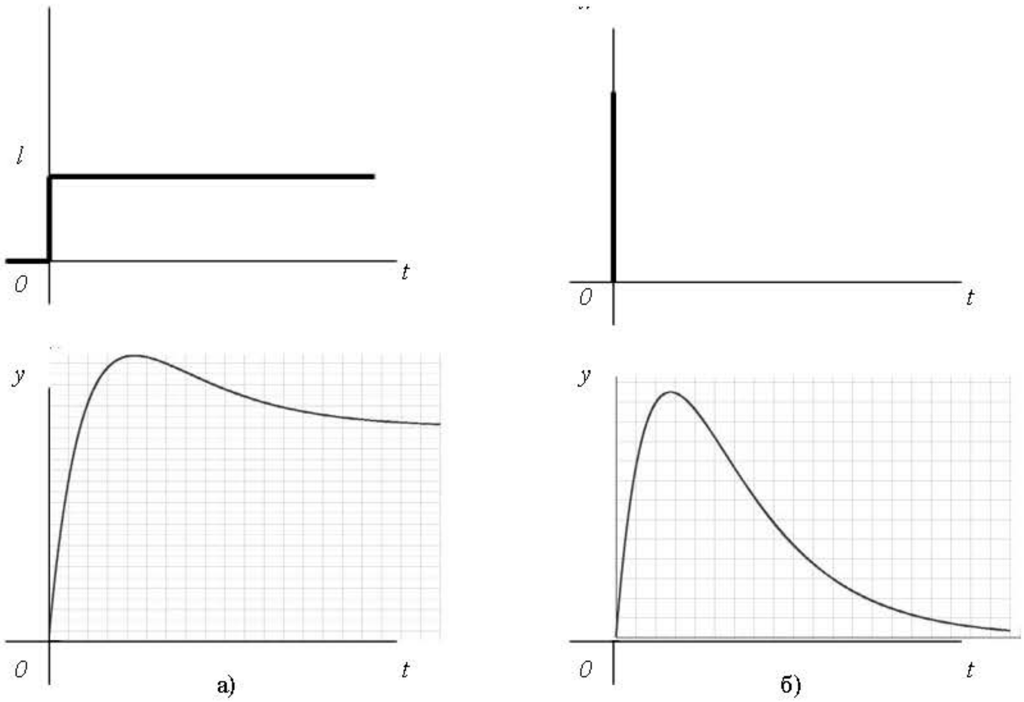


Рисунок 3.8 – Приклади основних динамічних характеристик: а) перехідна характеристика; б) імпульсна перехідна характеристика

3.2.3 Моделі динаміки у просторі зображень

Розв'язання диференціальних рівнянь є достатньо громіздким процесом. Деякі типи моделей динаміки можуть бути спрощені. Зокрема, моделі лінійних стаціонарних систем з нульовими початковими умовами можуть бути перетворені на звичайне алгебраїчне рівняння за допомогою введення поняття оператора диференціювання.

Розглянемо операторну форму моделі динаміки на прикладі рівняння (3.15). Для позначення операції диференціювання використовується поняття оператора p, тобто

$$\frac{d}{dt} \equiv p, \qquad \frac{d^i}{dt^i} \equiv p^i.$$

Використовуючи його, рівняння (3.15) можна записати у вигляді

$$a_2 p^2 y + a_1 py + a_0 y = b_1 px + b_0 x + c_0 f. \tag{3.17}$$

При записі і перетворенні диференціальних рівнянь оператор p можна розглядати як алгебраїчний множник, а вираз py як добуток, який не має властивостей комутативності. Враховуючи це зауваження, перепишемо (3.17), виносячи y і x за дужки:

$$y(a_2p^2 + a_1p + a_0) = x(b_1p + b_0) + c_0f. \qquad (3.18)$$

Введемо позначення $Q(p) = a_2p^2 + a_1p + a_0$; $R_1(p) = b_1p + b_0$, $R_2(p) = c_0$. За допомогою цих позначень рівняння (3.18) можна записати в компактнішій формі

$$Q(p)y = R_1(p)x + R_2(p)f. \qquad (3.19)$$

Це рівняння є загальним для операторного подання моделей динамики лінійних систем довільного порядку. Воно відображує принцип суперпозиції, тобто результат дії двох впливів: x і y, є сумою результатів дії кожного з них окремо.

В рівнянні (3.19) $Q(p)$ (диференціальний оператор при вихідній величині) називається *власним оператором,* а $R_1(p)$ і $R_2(p)$ (диференціальні оператори при вхідних величинах) – *операторами взаємодії.*

Відношення оператора взаємодії до власного оператора називається *передатною функцією* в операторній формі.

Систему, яку описує рівняння (3.17), можна характеризувати двома передатними функціями: передатною функцією $W_1(p)$ за вхідною величиною x

$$W_1(p) = R_1(p)/Q(p) \qquad (3.20)$$

тобто для прикладу (3.18)

$$W_1(p) = \frac{b_1p + b_0}{a_2p^2 + a_1p + a_0}$$

і передатною функцією $W_2(p)$ за вхідною величиною f, тобто передатною функцією збурення

$$W_2(p) = \frac{R_2(p)}{Q(p)}. \qquad (3.21)$$

Для прикладу (3.18)

$$W_2(p) = \frac{c_0}{a_2p^2 + a_1p + a_0}.$$

Використовуючи передатні функції, рівняння (3.18) запишеться у вигляді

$$y = W_1(p)x + W_2(p)f$$

Разом з передатною функцією в операторній формі широко використовують передатну функцію в формі зображення Лапласа.

Перетворенням Лапласа називають інтегральний оператор

$$X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt, \qquad (3.22)$$

який ставить у відповідність функції $x(t)$ дійсної змінної функцію $X(s)$ комплексної змінної s ($s=\sigma + j\varpi$). При цьому $x(t)$ називають оригіналом, а $X(s)$ – зображенням за Лапласом.

Співвідношення

$$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\varpi} X(s)e^{st}ds, \tag{3.23}$$

яке визначає за відомим зображенням його оригінал (в точках неперервності останнього), називають *зворотним перетворенням* Лапласа.

Властивості перетворення Лапласа

1. *Властивість лінійності.* Для будь-яких постійних α і β

$$L\{\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)\}=\alpha L\{x_1(t)\}+\beta L\{x_2(t)\}. \tag{3.24}$$

2. *Диференціювання оригіналу.* Якщо похідна $x(t)$ є функцією-оригіналом, то

$$L\{x'(t)\}=sX(s)-x(0), \tag{3.25}$$

де $X(s)=L\{x(t)\}$, $x(0)=\lim\limits_{t\to 0} x(t)$

І взагалі, якщо n-на похідна $x^{(n)}(t)$ є функцією–оригіналом, то

$$L\{x^{(n)}(t)\}=s^nX(s)-s^{n-1}x(0)-s^{n-2}x(0)-\ldots$$

Якщо початкові умови нульові, тобто $x(0)=\dot{x}(0)=....=x^{(n)}(0)=0$, то остання формула матиме вигляд $L\left\{x^{(n)}(t)\right\}=s^nX(s)$. Таким чином, за нульових початкових умов диференціювання оригіналу відповідає множенню зображення на s.

3. *Інтегрування оригіналу.* Інтегрування оригіналу зводиться до ділення зображення на s:

$$L\left\{\int_0^t x(t)dt\right\}=\frac{X(s)}{s}. \tag{3.26}$$

4. *Теорема запізнення.* Для будь-якого позитивного числа τ

$$L=\{x(t-\tau)\}=e^{-s\tau}L\{x(t)\}=e^{-s\tau}X(s). \tag{3.27}$$

5. *Теорема про згортку* (теорема множення зображень). Якщо $x_1(t)$ і $x_2(t)$ – оригінали, а X_1(s) і X_2(s) – їх зображення, то

$$X_1(s)\cdot X_2(s)=L\left\{\int_0^{\infty}x_2(\tau)x_1(t-\tau)d\tau\right\}=L\left\{\int_0^{\infty}x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau\right\}. \quad (3.28)$$

Інтеграл правої частини рівності називають *згорткою (convolution) функції* $x_1(t)$ і $x_2(t)$ і позначають $x_1(t) * x_2(t)$.

6. Теорема про граничні значення. Якщо *x(t)* – оригінал, а *X(s)* – його зображення, то

$$x(0)=\lim_{s\to\infty} sX(s)$$

і при існуванні $x(\infty)=\lim_{t\to\infty} x(t)$ також

$$x(\infty)=\lim_{s\to 0} sX(s). \quad (3.29)$$

Передатною функцією в формі зображення Лапласа називають відношення зображення вихідної величини до зображення вхідної величини при нульових початкових умовах.

Передатну функцію в формі зображення Лапласа можна отримати з передатної функції в операторній формі, якщо в останній зробити підстановку $p=s$. В загальному випадку це випливає з того, що диференціюванню оригіналу – символічному множенню оригіналу на p – при нульових початкових умовах відповідає множення зображення на комплексне число s.

Подібність між передатними функціями у формі зображення Лапласа і в операторній формі має місце тільки у випадках стаціонарних систем.

Використовуючи передатні функції в зображенні Лапласа можна записати рівняння (3.15) у вигляді

$$Y(s)=W_1(s)X(s)+W_2(s)F(s). \quad (3.30)$$

3.2.4 Моделі динаміки у просторі спектрів

Важливу роль при моделюванні лінійних стаціонарних систем відіграють частотні характеристики.

В загальному випадку передатна функція *W(p)* за означенням (3.20) дорівнює

$$W(p)=\frac{b_0p^m+b_1p^{m-1}+....+b_m}{a_0p^n+ap^{n-1}...+a_n}.$$

Функцію $W(j\omega)$, яку отримують з передатної функції при підстановці в неї $p=j\omega$ (де $j=\sqrt{-1}$, ω – кутова частота, $\omega=2\pi f$)

$$W(j\omega)=\frac{b_0(j\omega)^m+b_1(j\omega)^{m-1}+...+b_m}{a_0(j\omega)^n+a_1(j\omega)^{n-1}+...+a_n}, \quad (3.31)$$

називають *частотною передатною функцією*. Частотна передатна функція є комплексною функцією від дійсної змінної ω.

Функцію $W(j\omega)$ можна подати у виглядах

$$W(j\omega)=U(\omega)+jV(\omega)=A(\omega)\,e^{j\phi(\omega)}, \qquad (3.32)$$

де
$$\left|\begin{aligned}&A(\omega)=\sqrt{U^2(\omega)+V^2(\omega)}\\&\varphi(\omega)=arctg\frac{V(\omega)}{U(\omega)}+k\pi, \quad k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots\end{aligned}\right. \qquad (3.33)$$

Модуль передатної функції $A(\omega)=|W(j\omega)|$ називають *амплітудно-частотною функцією*, її графік – *амплітудно-частотною характеристикою.*

Аргумент $\varphi(\omega)=arg[W(j\omega)]$ називають *фазочастотною функцією*, її графік – *фазочастотною характеристикою.*

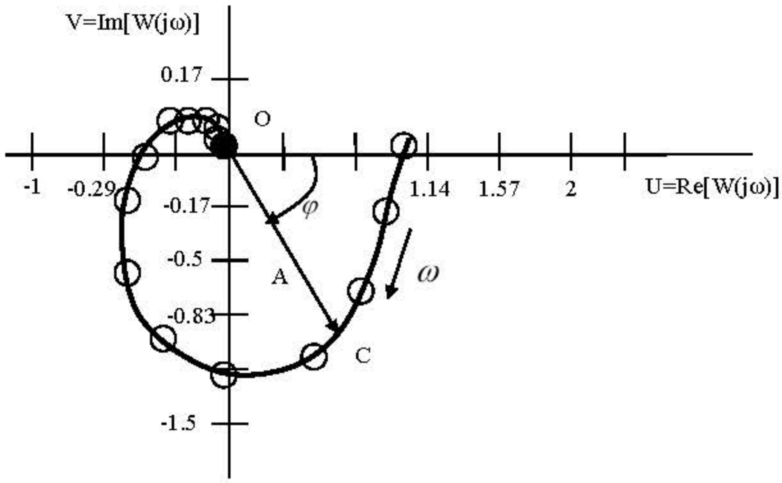
На комплексній площині (рис. 3.9) частотну передатну функцію $W(j\omega)$ позначають вектором $\overrightarrow{OC}$, довжина (модуль) якого дорівнює $A(\omega)$, а аргумент (кут, утворений цим вектором з дійсною позитивною напіввіссю) – $\varphi(\omega)$. Криву, яку описує кінець цього вектора при змінні частоти від нуля до нескінченності, називають *амплітудно-фазовою частотною характеристикою* (АФЧХ) або годографом.

Частотну передатну функцію називають також *амплітудно-фазовою частотною функцією*. Її дійсну частину $U(\omega)=Re[W(j\omega])$ *і* уявну частину $V(\omega)=Im[W(j\omega)]$ називають відповідно *дійсною* і *уявною частотними функціями*. Графік дійсної частотної функції $U(w)$ називають *дійсною частотною характеристикою*, а графік уявної частотної функції $V(\omega)$ – *уявною частотною характеристикою.*

Частотна, або спектральна, форма моделі динаміки лінійної стаціонарної системи має вигляд

$$G_y(j\omega)=W(j\omega)\cdot G_x(j\omega), \qquad (3.34)$$

де $G_x(j\omega)$ – комплексний спектр вхідного сигналу, $G_y(j\omega)$ – комплексний спектр вихідного сигналу.



Спектр сигналу отримується за допомогою перетворення Фур'є. Перетворення Фур'є є розкладанням функції (сигналу) на суму скінченної або нескінченної кількості базисних функцій з ваговими коефіцієнтами, множина яких і називається спектром. При використанні гармонічних функцій як базисних (синусно-косинусний розклад) перетворення Фур'є має вигляд

$$G_x(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt. \qquad (3.35)$$

Спектр періодичного сигналу

$$G_x(j\omega) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt. \qquad (3.36)$$

Записавши комплексну експоненту у вигляді $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$, отримуємо синусно-косинусний розклад

$$G_x(j\omega) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cdot\cos(\omega t)dt + j\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cdot\sin(\omega t)dt$$

Найчастіше моделі динаміки розглядаються у дійсній області. Тоді в рівнянні (3.33) використовуються лише модулі спектрів та АФЧХ

$$\left|G_y(j\omega)\right| = \left|W(j\omega)\right| \cdot \left|G_x(j\omega)\right|$$

або

$$\left|G_y(j\omega)\right| = A(\omega) \cdot \left|G_x(j\omega)\right|. \qquad (3.37)$$

Крім перерахованих частотних характеристик використовуються також логарифмічні частотні характеристики (ЛЧХ): *логарифмічні амплітудно-частотні* *характеристики* (ЛАЧХ) і *логарифмічні фазо-частотні характеристики* (ЛФЧХ). Функцію

$$L(\omega)=20\lg A(\omega)=20\lg|W(j\omega)| \tag{3.38}$$

називають *логарифмічною амплітудно-частотною функцією*. Графік залежності логарифмічної амплітудно-частотної функції L від логарифма частоти *(lgω)* називають логарифмічною амплітудно-частотною характеристикою (ЛАЧХ). Логарифмічною фазочастотною характеристикою (ЛФЧХ) називають графік залежності фазочастотної функції φ від логарифма частоти $lg\omega$.

Логарифмічне подання частотних характеристик має додаткові переваги, оскільки дозволяє отримати результат моделювання у простому графічному вигляді. Справді, логарифмуючи модель (3.37), отримуємо

$$\log|G_y(\omega)| = \log|W(\omega)| + \log|G_x(\omega)|,$$

або

$$\log|G_y(\omega)| = L(\omega) + \log|G_x(\omega)|. \tag{3.39}$$

Додавання характеристик у графічному вигляді показане на прикладі рис. 3.10.

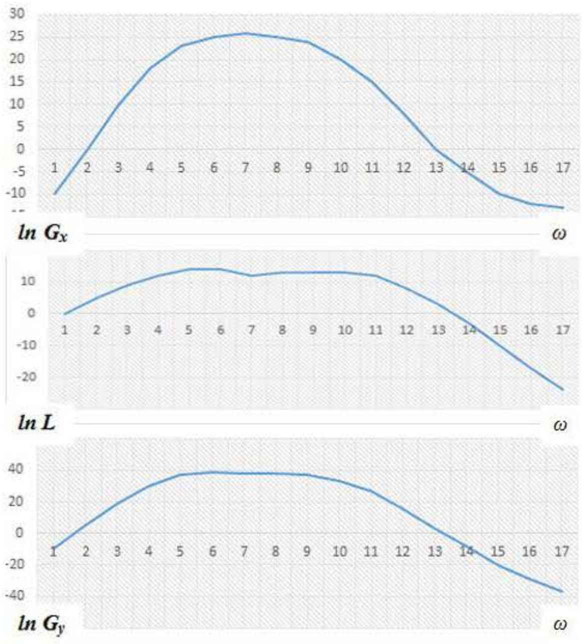


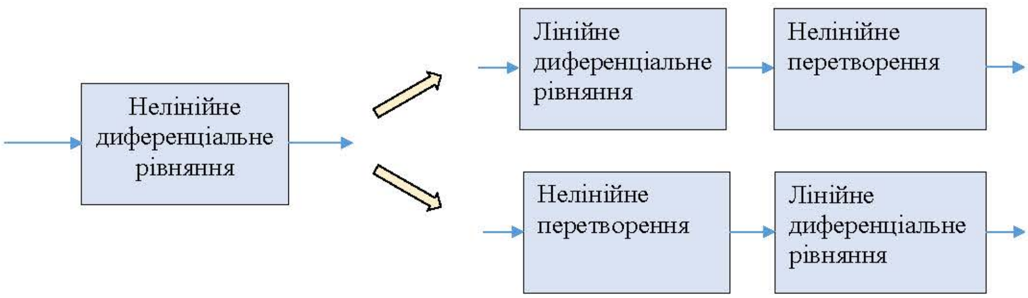
Рисунок 3.10 – Зв'язок між спектрами і ЛАЧХ

Гармонічний (тобто синусно-косинусний) розклад у спектр не є єдино можливим. Існує нескінченна кількість наборів базисних функцій, які задовольняють умови перетворення Фур'є (ортогональність, обмеженість та деякі інші), але лише деякі з них знайшли застосування. Зокрема, таким базисом є вейвлети, які вже згадувалися вище (нагадаємо, що вейвлет – функція, яка складається з декількох коливань певної частоти).

Вейвлет-перетворення поділяють на дискретне вейвлет-перетворення (DWT) та неперервне вейвлет-перетворення (CWT). Дискретне вейвлет-перетворення звичайно використовується для кодування сигналів, у той час як CWT – для аналізу сигналів. Саме тому, DWT широко застосовується в інженерній справі і комп'ютерних науках, а CWT – у наукових дослідженнях фізичних процесів. Вейвлет-перетворення наразі взяті на озброєння для величезної кількості різнопланових застосувань, нерідко заміняючи звичайне перетворення Фур'є у багатьох прикладних задачах.

Значно складнішими є моделі динаміки нелінійних систем. Нелінійна динамічна система описується нелінійним диференціальним рівнянням. Таке рівняння не дозволяє в операторному вигляді винести за дужки вхідний та вихідний сигнали, як це зроблено у перетворенні (3.17)→(3.18), отже, неможливо отримати передатну функцію системи. Для отримання моделей нелінійних динамічних систем використовують різні підходи залежно від характеру нелінійності, діапазону зміни вхідних та вихідних сигналів і типу диференціального рівняння:

1. Лінеаризація або кусково-лінійна апроксимація статичної характеристики системи;
2. Розділення нелінійної динамічної моделі на нелінійну статичну і лінійну динамічну частини: подання у вигляді моделі Гаммерштейна (рис. 3.11, а) або моделі Вінера (рис. 3.11, б).



3.2.5 Моделі динаміки дискретних систем

Моделі динаміки цифрових систем є розвитком моделей статики логічних систем. Такі моделі використовуються у теорії *цифрових автоматів*.

Як правило, *моделі динаміки синхронних цифрових автоматів* записуються у рекурсивному вигляді:

$$\begin{cases} S_n = L_S(S_{n-1}, X_n); \\ Y_n = L_y(S_n). \end{cases} \tag{3.40}$$

де X – вектор вхідних сигналів; Y – вектор вихідних сигналів; S – вектор станів: S_n – у момент t_n, S_{n-1} – у попередній момент t_{n-1}; L_S, L_y – відповідні логічні оператори перетворення.

Якщо додати до системи (3.40) ще рівняння для попереднього моменту

$$Y_{n-1}=L_S(S_{n-1}),$$

то з системи можна вилучити стани автомата

$$Y_{n-1}=L_y\{L_S[L^{-1}{}_y(Y_{n-1}), X_0]\}.$$

Модель цифрового автомата довільного порядку може бути отримана з відповідного диференціального рівняння. Дискретним аналогом похідних є відповідні різниці:

$$\dot{y}(t_0) = \frac{y_0 - y_{-1}}{\Delta t};$$

$$\ddot{y}(t_0) = \frac{\dot{y}(t_0) - \dot{y}(t_{-1})}{\Delta t} = \frac{y_0 - 2y_{-1} + y_{-2}}{\Delta t^2};$$

$$\dddot{y}(t_0) = \frac{\ddot{y}(t_0) - \ddot{y}(t_{-1})}{\Delta t} = \frac{y_0 - 3y_{-1} + 3y_{-2} - y_{-3}}{\Delta t^3}$$

тощо. У загальному випадку:

$$y^{(k)}(t_0) = \frac{1}{\Delta t^k} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i y_{-i}, \tag{3.41}$$

де t_0 – момент надходження останнього даного, поточний момент часу; Δt – інтервал дискретизації.

Підставляючи (3.41) в диференціальне рівняння аналогічне (3.15), отримаємо дискретний вираз рівняння автомата довільного порядку

$$\sum_{j=0}^{m} \left[\frac{b_i}{\Delta t^j} \sum_{i=0}^{j} (-1)^i C_j^i y_{-i} \right] = \sum_{j=0}^{n} \left[\frac{a_i}{\Delta t^j} \sum_{i=0}^{j} (-1)^i C_j^i x_{-i} \right]. \tag{3.42}$$

Виділимо з лівої частини рівняння (3.41) значення вихідної величини у поточний момент часу

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{b_i}{\Delta t^j} \left[y_0 + \sum_{i=1}^{j} (-1)^i C_j^i y_{-i} \right] = \sum_{j=0}^{n} \left[\frac{a_i}{\Delta t^j} \sum_{i=0}^{j} (-1)^i C_j^i x_{-i} \right],$$

або

$$y_0 = \frac{\sum\limits_{j=0}^{n}\left[\frac{a_i}{\Delta t^j}\sum\limits_{i=0}^{j}(-1)^i C_j^i x_{-i}\right] - \sum\limits_{j=1}^{m}\left[\frac{b_i}{\Delta t^j}\sum\limits_{i=1}^{j}(-1)^i C_j^i y_{-i}\right]}{\sum\limits_{j=0}^{m}\frac{b_i}{\Delta t^j}}.$$

Змінюючи порядок підрахунку сум у чисельнику, отримуємо

$$y_0 = \frac{\sum\limits_{j=0}^{n}\left[\sum\limits_{i=0}^{j}(-1)^i C_j^i \frac{a_i}{\Delta t^j}\right]x_{-i} - \sum\limits_{j=1}^{m}\left[\sum\limits_{i=1}^{j}(-1)^i C_j^i \frac{b_i}{\Delta t^j}\right]y_{-i}}{\sum\limits_{j=0}^{m}\frac{b_i}{\Delta t^j}},$$

або

$$y_0 = \sum_{i=0}^{n} K_{x_i} x_{-i} + \sum_{i=1}^{m} K_{y_i} y_{-i}, \tag{3.43}$$

де $K_{x_i} = \dfrac{(-1)^i \sum\limits_{j=i}^{n} C_j^i \dfrac{a_j}{\Delta t^j}}{\sum\limits_{j=0}^{m}\dfrac{b_j}{\Delta t^j}}, \quad K_{y_i} = \dfrac{(-1)^{i+1} \sum\limits_{j=i}^{m} C_j^i \dfrac{b_j}{\Delta t^j}}{\sum\limits_{j=0}^{m}\dfrac{b_j}{\Delta t^j}}.$ (3.44)

Вираз (3.43) є моделлю цифрового автомата. Модель рекурсивна, оскільки поточне значення вихідної величини Y обчислюється з використанням попередніх значень.

Модель (3.43) може також розглядатися як дискретна модель довільної стаціонарної лінійної системи, яка описується передатною функцією (3.31). У цьому випадку початкові значення змінних рекурсивного виразу:

$$\forall x_i = 0, i = 0,-1,\ldots,-n; \quad \forall y_i = 0, i = 0,-1,\ldots,-m.$$

І навпаки, маючи модель автомата у вигляді (3.42) і розв'язавши систему рівнянь (3.44) відносно коефіцієнтів a_j, b_j, отримуємо модель цифрового автомата у вигляді лінійного диференціального рівняння.

Вхідні і вихідні сигнали цифрового автомата є дискретними. Для їх опису використовуються різні дискретні функції. Останнім часом широко використовується дискретне вейвлет-перетворення. Для DWT переважно використовується система функцій Хаара, наведена на рис. 3.12.

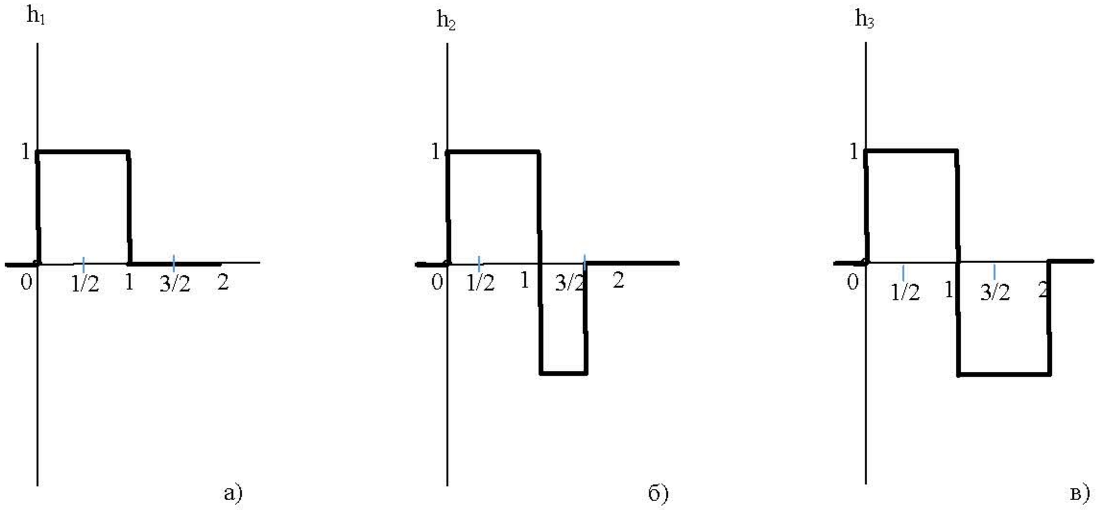


Рисунок 3.12 – Система функцій Хаара

Теоретичною основою сучасного DWT є робота Інгрід Добеші. Класичне дискретне перетворення Фур'є та косинус-перетворення можуть розглядатися як окремий випадок дискретного вейвлет-перетворення (DWT) і взагалі усі вейвлет-перетворення можуть розглядатися як різновид часово-частотного подання.