3.3. Моделі обслуговування

Існує широкий клас дискретних динамічних систем, які отримали загальну назву “*системи масового обслуговування*” (СМО). Процеси у СМО, як правило, складні і найчастіше випадкові. Але необхідність їх моделювання постійно зростає, оскільки сервери комп’ютерних мереж, без яких немислиме сучасне інформаційне суспільство, є типовими представниками СМО.

3.3.1 Поняття системи масового обслуговування

Системи масового обслуговування – це такі системи, в які у випадкові моменти часу надходять *заявки (запити, вимоги)* на обслуговування, при цьому заявки, що надійшли, обслуговуються за допомогою наявних у розпорядженні системи *каналів обслуговування*.

З позиції моделювання процесу масового обслуговування ситуації, коли утворюються *черги заявок* (вимог) на обслуговування, виникають таким чином. Надійшовши в систему обслуговування заявка приєднується до черги інших (які раніше надійшли) вимог. Канал обслуговування вибирає заявку з тих, що знаходяться в черзі, для того, щоб приступити до її обслуговування. Після завершення процедури обслуговування чергової вимоги канал обслуговування приступає до обслуговування наступної заявки, якщо така є в черзі. Цикл функціонування системи масового обслуговування подібного роду повторюється багаторазово протягом усього періоду роботи системи обслуговування. При цьому передбачається, що перехід системи на обслуговування чергової вимоги після завершення обслуговування попередньої вимоги відбувається миттєво, у випадкові моменти часу.

Прикладами систем масового обслуговування можуть служити:

- пости технічного обслуговування автомобілів;
- сервери, що обслуговують заявки робочих станцій на інформацію або сервіс;
- телефонні станції тощо.

Зауважимо, що саме на основі задач оптимізації кількості операторів телефонних комутаторів на початку XX сторіччя данським математиком Агнером Крарупом Ерлангом започаткована теорія масового обслуговування. Наразі актуальність теорії масового обслуговування різко зросла, оскільки вона надає основний апарат для розрахунку параметрів серверів комп’ютерних мереж.

Основними компонентами системи масового обслуговування будь-якого вигляду є:

- вхідний *потік вимог*, що надходять на обслуговування;
- дисципліна черги;
- механізм обслуговування.

За згаданими ознаками розрізняють велику кількість типів СМО. Деякі типи СМО показані на рис. 3.13.

За *кількістю каналів* СМО поділяють на:

– одноканальні;

– багатоканальні, коли система містить S каналів, призначених для одночасного обслуговування декількох запитів.

Залежно від обмежень, що накладаються на *довжину черги*, розрізняють:

– СМО з обмеженою довжиною черги. При цьому запити, що надходять на вхід системи, коли черга заповнена, вважаються втраченими (СМО з втратами). Окремим випадком є СМО, для яких черга неприпустима;

– СМО з необмеженою довжиною черги. При цьому запити знаходяться в стані очікування до тих пір, поки не звільниться якийсь з каналів.

Залежно від усталеного порядку (*дисципліни*) обслуговування, розрізняють:

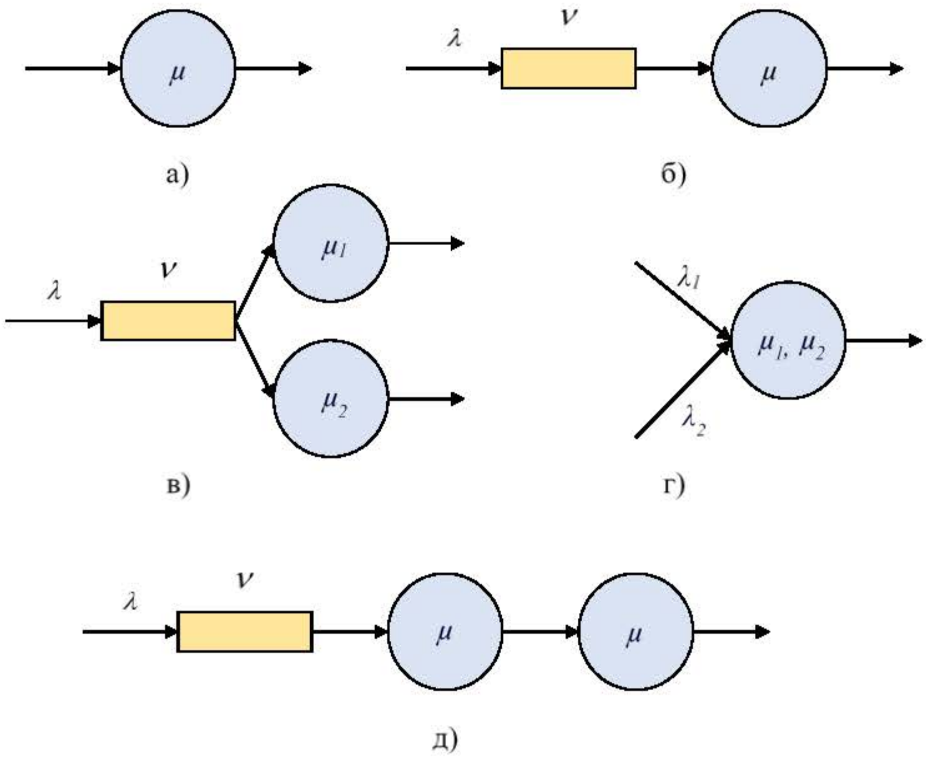
– СМО з пріоритетним обслуговуванням $O_i (i = 1,2,...)$ – чим більше i, тим менший пріоритет;

– СМО з дисципліною «першим надійшов – першим обслуговується» (справедлива дисципліна), а також

– прийшов останнім – обслуговуєшся першим;

– випадковий відбір заявок;

– обмеження часу очікування моменту настання обслуговування.



Залежно від загальної *кількості джерел* $u_i\left(i=\overline{1,k}\right)$, кількості запитів, що направляються від них, та повернення запитів, які були обслужені, до джерела, розрізняють:

− закриті СМО (системи з обмеженим вхідним потоком) – призначені для обслуговування обмеженої кількості джерел запитів. Загальна кількість запитів, що циркулюють в системі, є обмеженою;

− відкриті СМО – кількість джерел запитів нескінченно велика або коли одне джерело надсилає необмежену кількість запитів.

Залежно від наявності розподілу процесу обслуговування на стандартні етапи (*фази*) СМО поділяються на однофазні і багатофазні.

Функціональні можливості будь-якої системи масового обслуговування визначаються такими основними факторами:

− ймовірнісним розподілом моментів надходжень заявок на обслуговування (поодиноких або групових);
− ймовірнісним розподілом тривалості обслуговування;
− конфігурацією системи обслуговування (паралельне, послідовне або паралельно-послідовне обслуговування);
− кількістю і продуктивністю каналів обслуговування;
− дисципліною черги.

Критеріями ефективності функціонування систем масового обслуговування, залежно від характеру розв'язуваної задачі, можуть виступати:
− ймовірність негайного обслуговування заявки;
− ймовірність відмови в обслуговуванні заявки;
− відносна і абсолютна пропускна здатність системи;
− середній відсоток заявок, які отримали відмову в обслуговуванні;
− середній час очікування в черзі;
− середня довжина черги тощо.

Випадковий характер потоку вимог і тривалості обслуговування приводить до того, що в СМО відбувається випадковий процес. Для опису *вхідного потоку вимог* потрібно задати ймовірнісний закон, що визначає послідовність моментів надходження вимог на обслуговування, і вказати кількість таких вимог в кожному черговому надходженні. При цьому, як правило, оперують поняттям "ймовірнісний розподіл моментів надходження вимог". Тут можуть надходити як поодинокі, так і групові вимоги. В останньому випадку звичайно мова йде про систему обслуговування з паралельно-груповим обслуговуванням.

За характером випадкового процесу, що відбувається в системі масового обслуговування, розрізняють системи марковські (напівмарковські) і немарковські. В марковських системах момент надходження чергової вимоги і час її обслуговування не залежать від кількості і часу надходження попередніх вимог (для напівмарковських – можлива ймовірна залежність). У *марковських системах* вхідний потік вимог і вихідний потік обслужених вимог (заявок) є пуассонівськими. Пуассонівські потоки дозволяють легко описати і побудувати математичну модель системи масового обслуговування.

3.3.2 Характеристики СМО

Усі показники якості обслуговування систем можна умовно розділити на три види.

1. Ймовірнісні характеристики:
− p_n – ймовірність того, що в системі знаходиться n запитів;
− q – ймовірність того, що запит, який надходить, буде втрачений.

2. Моментні характеристики:
− середня кількість запитів у системі $\overline{n} = \sum_{n=0}^{\infty} np_n$;

– середня кількість запитів у черзі: $\bar{\upsilon} = \sum\limits_{n=s+1}^{\infty}(n-s)p_n$, де s – кількість каналів обслуговування;

– середня кількість запитів, що обслуговуються у системі, $\bar{j} = \sum\limits_{n=0}^{s} np_n$;

– середня кількість вільних каналів $\bar{r} = \sum\limits_{n=0}^{s}(n-s)p_n$;

– середній *час очікування* у черзі $\bar{\tau} = \int\limits_0^{\infty} \tau\, dF(\tau)$, де $F(\tau)$ – функція розподілу часу очікування у черзі;

– середня тривалість перебування запиту у системі $\bar{T} = \int\limits_0^{\infty} TdG(T)$, де $G(T)$ ймовірність того, що тривалість перебування в системі менша або дорівнює T.

3. Економічні характеристики якості обслуговування найчастіше подаються у вигляді узагальненого критерію, який враховує збитки, до яких призвели простої каналів та очікування запитів.

Для багатьох типів СМО вже отримані співвідношення між характеристиками потоків та параметрами СМО.

3.3.3 Моделі типових СМО

Найпростіша одноканальна модель

Така модель характеризується експоненціальним розподілом як тривалостей інтервалів між надходженнями вимог, так і тривалостей обслуговування. При цьому щільність розподілу тривалостей інтервалів між надходженнями вимог визначається за формулою

$$f_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \tag{3.45}$$

де λ – інтенсивність надходження заявок в систему.

Щільність розподілу тривалостей обслуговування:

$$f_2(t) = \mu e^{-\mu t}, \tag{3.46}$$

де μ – інтенсивність обслуговування.

Потоки заявок і обслуговувань найпростіші.

Нехай система працює з *відмовами*. Необхідно визначити абсолютну і відносну пропускні здатності системи.

Уявімо дану систему масового обслуговування у вигляді графу (рис. 3.14), у якого є два стани:

S_0 – канал вільний (очікування);

S_1 – канал зайнятий (йде обслуговування заявки).

Позначимо ймовірності станів:

$P_0(t)$ – ймовірність стану «канал вільний»;

$P_1(t)$ – ймовірність стану «канал зайнятий».

За графом станів (рис. 3.14) складемо систему диференціальних рівнянь Колмогорова для ймовірностей станів:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + P_1(t); \\ \dfrac{dP_1(t)}{dt} = -\mu P_1(t) + \lambda P_0(t). \end{cases} \tag{3.47}$$

з урахуванням нормованої умови $P_0(t) + P_1(t) = 1$.

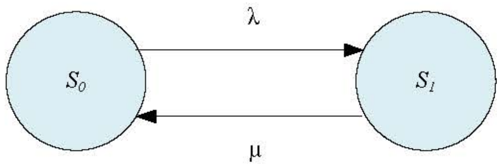


Рисунок 3.14 – Граф станів одноканальної СМО з відмовами

Розв'язок такої системи виглядає так:

$$P_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}, \tag{3.48}$$

$$P_1(t) = 1 - P_0(t). \tag{3.49}$$

Неважко переконатися, що для одноканальної СМО з відмовами ймовірність $P_o(t)$ є ні що інше, як відносна пропускна здатність системи q.

Дійсно, $P_o -$ ймовірність того, що в момент t канал вільний і заявка, що прийшла до цього моменту, буде обслужена, а отже, для даного моменту часу t середнє відношення числа обслужених заявок до числа заявок, що надійшли також $P_o(t)$ тобто

$$q = P_0(t). \tag{3.50}$$

Після закінчення великого інтервалу часу (при $t \to \infty$) досягається стаціонарний (сталий) режим:

$$q = P_0 = \frac{\mu}{\mu+\lambda}. \tag{3.51}$$

Знаючи відносну пропускну здатність, легко знайти абсолютну. Абсолютна пропускна здатність – середня кількість заявок, які може обслужити СМО в одиницю часу:

$$A = \lambda q = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}. \tag{3.52}$$

Імовірність відмови в обслуговуванні заявки буде дорівнює ймовірності стану «канал зайнятий»:

$$P_{OTK} = P_1 = 1 - P_0 = 1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}. \tag{3.53}$$

Дана величина P_{OTK} може бути інтерпретована як середня частка необслужених заявок серед поданих.

Одноканальна СМО з очікуванням і обмеженою довжиною черги

Система масового обслуговування має один канал. Вхідний потік заявок на обслуговування − найпростіший потік з інтенсивністю λ. Інтенсивність потоку обслуговування дорівнює μ (тобто в середньому безперервно зайнятий канал видаватиме μ обслужених заявок за одиницю часу). Тривалість обслуговування – випадкова величина, підпорядкована експоненціальному закону розподілу. Потік обслуговувань є найпростішим (пуассонівським) потоком подій. Заявка, що надійшла в момент, коли канал зайнятий, стає в чергу і чекає обслуговування.

Припустимо, що незалежно від того, скільки вимог надходить на вхід системи обслуговування, дана система (черга + вимоги, що обслуговуються) не може вмістити понад N-вимог (заявок), тобто вимоги, що не потрапили в очікування, змушені обслуговуватися в іншому місці. Нарешті, джерело, що породжує заявки на обслуговування, має необмежену (нескінченно велику) ємність.

Граф станів СМО в цьому випадку має вигляд, показаний на рис. 3.15.

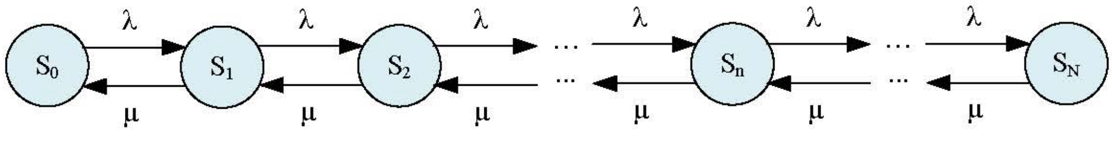


Рисунок 3.15 – Граф станів одноканальної СМО з очікуванням

Стани СМО мають нижчевказану інтерпретацію:

S_0 – канал вільний;

S_1 – канал зайнятий (черги немає);

S_2 – канал зайнятий (одна заявка стоїть у черзі);

S_n – канал зайнятий ($n-1$ заявок стоїть у черзі);

S_N – канал зайнятий ($N-1$ заявок стоїть у черзі).

Стаціонарний процес в даній системі буде описуватися такою системою алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} -\rho P_0 + P_1 = 0, n = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -(1-\rho)P_n + P_{n+1} + \rho P_{n+1} = 0, 0 < n < N; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -P_N + \rho \cdot P_{N-1} = 0, \ \ n = N, \end{cases} \quad (3.54)$$

де $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$; n – номер стану.

Розв’язок наведеної вище системи рівнянь (3.54) для нашої моделі СМО має вигляд

$$P_n = \begin{cases} (\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}) \cdot \rho^n, \ \ p^n \neq 1, \\ \frac{1}{(N+1)}, \ \ \rho = 1; \end{cases} \quad n = 0,1,2,...,N, \quad (3.55)$$

де

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \quad (3.56)$$

Тоді $P_n = \begin{cases} P_0 \cdot \rho \neq 1, \\ \frac{1}{(N+1)}, \ \ \rho = 1. \end{cases} \quad n = 1,2,...,N.$

Слід зазначити, що виконання умови стаціонарності $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ для даної СМО необов'язкове, оскільки кількість заявок, які допускаються в систему обслуговування, контролюється шляхом введення обмеження на довжину черги (яка не може перевищувати $N - 1$).

Визначимо *характеристики одноканальної* СМО з очікуванням і обмеженою довжиною черги, що дорівнює $(N - 1)$:

– ймовірність відмови в обслуговуванні заявки:

$$P_{OTK} = P_N = \begin{cases} \left(\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\right)\rho^N, \ \rho \neq 1, \\ \frac{1}{(N+1)}, \ \rho = 1; \end{cases} \quad (3.57)$$

– відносна пропускна здатність системи:

$$q = 1 - P_{OTK} = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \right) \rho^N, \ \rho \neq 1, \\ \dfrac{1}{(N+1)}, \ \rho = 1; \end{cases} \tag{3.58}$$

– абсолютна пропускна здатність:

$$A = q \cdot \lambda; \tag{3.59}$$

– середня кількість що знаходяться в системі заявок:

$$L_s = \sum_{n=0}^{N} n \cdot P_n = \begin{cases} \dfrac{\rho \cdot \left[1 - (N+1) \cdot \rho^N + N \cdot \rho \right]}{(1-\rho) \cdot (1-\rho^{N+1})}, \ \rho \neq 1 \\ \dfrac{N}{2}, \ \rho = 1. \end{cases} \tag{3.60}$$

Тоді

– середній час перебування заявки в системі:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda(1-P_N)}; \tag{3.61}$$

– середня тривалість перебування заявки у черзі:

$$W_q = W_s - 1/\mu; \tag{3.62}$$

– середня кількість заявок в черзі (довжина черги):

$$L_q = \lambda(1-P_N) W_q. \tag{3.63}$$

Одноканальна СМО з очікуванням без обмеження на довжину черги $(\boldsymbol{N} \to \infty)$. Решта умов функціонування СМО залишаються без змін.

Стаціонарний режим функціонування даної СМО існує при $t \to \infty$ для будь-якого $n = 0, 1, 2, \ldots$ і коли $\lambda < \mu$. Система алгебраїчних рівнянь, що описують роботу СМО при $t \to \infty$ для будь-якого $n = 0, 1, 2, \ldots$, має вигляд:

$$\begin{cases} -\lambda P_0 + \mu P_1 = 0, \ \ n = 0, \\ \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} - (\lambda + \mu) P_n = 0, \ \ n > 0. \end{cases} \tag{3.64}$$

Розв’язок даної системи рівнянь має вигляд:

$$P_n = (1-\rho)\rho^n, n = 0,1,2 \ldots \tag{3.65}$$

де $\rho = \lambda/\mu < 1$.

Характеристики одноканальної СМО з очікуванням, без обмеження на довжину черги:

– середня кількість заявок що знаходяться в системі заявок на обслуговування:

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \frac{\rho}{1-\rho}, \tag{3.66}$$

– середня тривалість перебування заявки в системі:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{[\mu(1-\rho)]}, \tag{3.67}$$

– середня тривалість очікування заявки в черзі:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho}{[\mu(1-\rho)]}. \tag{3.68}$$

Моделі з *n* обслуговувальними каналами

У переважній більшості випадків на практиці системи масового обслуговування є багатоканальними, і отже, *моделі з n обслуговувальними каналами* (де $n > 1$) викликають безсумнівний інтерес.

Процес масового обслуговування, який описується даною моделлю, характеризується інтенсивністю вхідного потоку, при цьому паралельно може обслуговуватися не більше n заявок. Середня тривалість обслуговування однієї заявки дорівнює $1/\mu$. Вхідний потік є пуассонівським. Режим функціонування того чи іншого каналу обслуговування не впливає на режим функціонування інших каналів обслуговування системи, причому тривалість процедури обслуговування кожним з каналів є випадковою величиною, підпорядкованою експоненціальному закону розподілу. Кінцева мета використання n паралельно під'єднаних обслуговуючих каналів полягає в підвищенні (порівняно з одноканальною системою) швидкості обслуговування заявок за рахунок обслуговування одночасно n клієнтів.

Граф станів багатоканальної системи масового обслуговування з відмовами має вигляд, показаний на рис. 3.16.

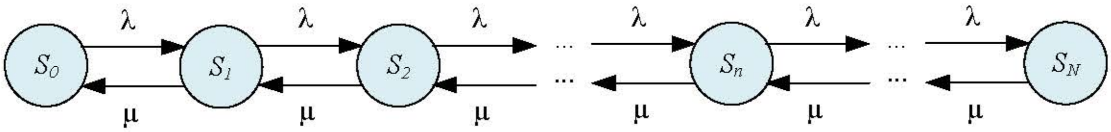


Рисунок 3.16 – Граф станів багатоканальної СМО з відмовами

Стани даної СМО мають таку інтерпретацію:

S_0 – всі канали вільні;

S_1– зайнятий один канал, інші вільні;

……………..

S_k – зайняті рівно k каналів, решта вільні;

S_n – зайняті всі n каналів, заявка отримує відмову в обслуговувані.

Рівняння Колмогорова для ймовірностей станів системи $P_0, \dots, P_k, \dots, P_n$ будуть мати вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dP_0}{dt} = -\lambda \cdot P_0 + \mu \cdot P_1; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dP_k}{dt} = \lambda \cdot P_{k-1} - (\lambda + k \cdot \mu) \cdot P_k + \mu \cdot (k+1) \cdot P_{k+1}, \quad 1 \le k \le n-1; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dP_n}{dt} = \lambda \cdot P_{n-1} - \mu \cdot n \cdot P_n. \end{cases} \quad (3.69)$$

Початкові умови:

$P_0(0) = 1, P_1(0) = P_2(0) = \dots = P_k(0) = \dots = P_n(0) = 0.$

Стаціонарний розв'язок системи має вигляд:

$$\begin{cases} P_k = \dfrac{\frac{\rho^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}} = \dfrac{\rho^k}{k!}, \; k = 0,1,2,\dots,n \\ P_0 = \dfrac{1}{\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}\right]}, \; k = 0,1,2,\dots,n, \end{cases} \quad (3.70)$$

де $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

Формули для обчислення ймовірностей P_k називають *формулами Ерланга.*

Визначимо імовірнісні характеристики функціонування ***багатоканальної СМО з відмовами в стаціонарному режимі.***

Імовірність відмови визначає формула:

$$P_{відм} = P_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot P_0. \quad (3.71)$$

Заявка отримує відмову, якщо приходить в момент, коли всі n каналів зайняті. Величина $P_{ВІДМ}$ характеризує повноту обслуговування вхідного потоку.

Ймовірність того, що заявка буде прийнята до обслуговування (вона ж – відносна пропускна здатність системи), доповнює $P_{відм}$ до одиниці:

$$q = 1 - P_{відм} = 1 - \frac{\rho_n}{n!}. \quad (3.72)$$

Абсолютна пропускна здатність

$$A = \lambda \cdot q = \lambda \cdot (1 - P_{відм}). \quad (3.73)$$

Середня кількість каналів, зайнятих обслуговуванням

$$\overline{k} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot P_k = \rho \cdot (1 - P_{відм}) . \qquad (3.74)$$

Величина $\bar{k}$ характеризує ступінь завантаження СМО.

Багатоканальна система масового обслуговування з очікуванням

Процес масового обслуговування з очікуванням характеризується таким: вхідний і вихідний потоки є пуассонівськими з інтенсивностями λ і μ відповідно; паралельно можуть обслуговуватися не більше C клієнтів. Система має C каналів обслуговування. Середня тривалість обслуговування одного клієнта дорівнює $1/\mu$.

В усталеному режимі функціонування багатоканальної СМО з очікуванням і необмеженою чергою може бути описано за допомогою системи алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 0 = \lambda P_{n-1} - (\lambda + n \cdot \text{м})P_n + (n+1)\mu P_{n+1} \\ 0 = \lambda P_{n-1} - (\text{л} + C \cdot \text{м})P_n + C\text{м}P_{n+1} \end{cases} \quad 1 \le n \le C\ . \qquad (3.75)$$

Розв'язок системи рівнянь (3.75) має вигляд:

$$\begin{cases} P_n = \dfrac{\rho^n}{n!} P_{0,} \quad 0 \le n < C, \\ P_n = \dfrac{\rho^n}{C! C^{n-c}} P_0, \quad n \ge C; \end{cases} \qquad (3.76)$$

де $$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{C-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^C}{C! \left[1 - \left(\dfrac{\rho}{C} \right) \right]} \right\}^{-1} . \qquad (3.77)$$

Розв'язок буде дійсним, якщо виконується умова $\left[\dfrac{\lambda}{\mu C} \right] < 1$.

Імовірнісні характеристики функціонування в стаціонарному режимі ***багатоканальної СМО з очікуванням і необмеженою чергою*** визначаються за формулами:

– ймовірність того, що в системі знаходиться *n* клієнтів на обслуговуванні, визначається за формулами (3.75) і (3.77); середня кількість клієнтів в черзі на обслуговування

$$L_q = \left[\frac{C \cdot \rho}{(C - \rho)^2} \right] P_c ; \qquad (3.78)$$

– середня кількість клієнтів, що знаходяться в системі (заявок на обслуговування і в черзі):

$$L_s = L_q + \rho;$$

– середня тривалість перебування клієнта (заявки на обслуговування) в черзі:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}; \tag{3.79}$$

– середня тривалість перебування клієнта в системі:

$$W_s = W_q + \frac{q}{\mu}, \tag{3.80}$$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = 0{,}044 + \frac{1}{2} = 0{,}544.$$

Модель обслуговування машинного парку

Модель обслуговування машинного парку являє собою *модель замкненої системи масового обслуговування.*

Досі розглядалися тільки такі системи масового обслуговування, для яких інтенсивність вхідного потоку заявок не залежить від стану системи. У цьому випадку джерело заявок є зовнішнім щодо СМО і генерує необмежений потік вимог. Розглянемо системи масового обслуговування, для яких потік вимог залежить від стану системи, причому джерело вимог є внутрішнім і генерує обмежений потік заявок.

Наприклад, обслуговується машинний парк, що складається з N машин, бригадою R механіків ($N > R$), причому кожна машина може обслуговуватися тільки одним механіком. Тут машини є джерелами вимог (заявок на обслуговування), а механіки – ж каналами обслуговування. Несправна машина після обслуговування використовується за своїм прямим призначенням і стає потенційним джерелом виникнення нових вимог на обслуговування. Очевидно, що інтенсивність л залежить від того, скільки машин в даний момент знаходиться в експлуатації $(N - k)$ і скільки машин обслуговується або стоїть в черзі, чекаючи обслуговування (k).

У моделі ємність джерела вимог слід вважати обмеженою. Вхідний потік вимог виходить з обмеженого числа експлуатованих машин $(N - k)$, які у випадкові моменти часу виходять з ладу і вимагають обслуговування. При цьому кожна машина з $(N - k)$, що знаходиться в експлуатації, генерує пуассонівський потік вимог з інтенсивністю л незалежно від інших об'єктів; загальний (сумарний) вхідний потік має інтенсивність $(N - k) \cdot \lambda$. Вимога, що надійшла в систему в момент, коли вільний хоча б один канал, негайно йде на обслуговування. Якщо вимога застає всі канали зайнятими обслуговуванням інших вимог, то вона не покидає систему, а стає в чергу і чекає, поки один з каналів не стане вільним.

Таким чином, в замкнутій системі масового обслуговування вхідний потік вимог формується з вихідного.

Стан S_k системи характеризується загальною кількістю вимог, що знаходяться на обслуговуванні і в черзі, що дорівнює k. Для розглянутої замкнутої системи, очевидно, $k = 0, 1, 2, \ldots, N$. При цьому, якщо система перебуває в стані k, то кількість об'єктів, що знаходяться в експлуатації, так само $(N - k)$.

Якщо $л_k$ – інтенсивність потоку вимог в розрахунку на одну машину, то

$$\lambda_k = \begin{cases} (N-k)\cdot\lambda, 0 \le k \le N, \\ 0, \qquad\qquad k > N; \end{cases}$$

$$\mu_k = \begin{cases} k\cdot\mu \;\; 0 \le k \le R, \\ R\cdot\mu \;\; R \le k \le N, \\ 0 \qquad\quad k > N. \end{cases}$$

Система рівнянь, що описують роботу замкнутої СМО в стаціонарному режимі, має вигляд

$$\begin{cases} 0 = -\rho N P_0 + P_1, \\ 0 = (N-k+1)\rho P_{k-1} - [(N-k)\rho + k]P_k + (k+1)P_{k+1}, \;\; 0 \le k \le R, \\ 0 = (N-k+1)\rho P_{k-1} - [(N-k)\cdot\rho + R]P_k + RP_{k+1}, \qquad R \le k \le N, \\ 0 = \rho P_{N-1} - RP_N. \end{cases} \quad (3.81)$$

Розв’язуючи цю систему, знаходимо ймовірність k-го стану:

$$P_k = \begin{cases} \dfrac{N!\cdot\rho^k}{k!\cdot(N-k)!}\cdot P_0 \qquad 0 \le k \le R, \\ \dfrac{N!\cdot\rho^k}{R!\cdot R^{k-R}\cdot(N-k)!}\cdot P_0 \quad R \le k \le N. \end{cases} \quad (3.82)$$

Величина P_0 визначається з умови нормування $\sum_{k=0}^{N} P_k = 1$ отриманих результатів за формулами (3.82) для $P_k, k = 1, 2, \ldots, N$. Визначимо такі *ймовірнісні характеристики системи*:

– середня кількість вимог в черзі на обслуговування

$$L_q = \sum_{k=R}^{N} (k-R)P_k\,; \quad (3.83)$$

– середня кількість вимог, що знаходяться в системі (на обслуговуванні і в черзі)

$$L_s = \sum_{R=1}^{N} kP_k\,; \quad (3.84)$$

– середня кількість механіків (каналів), що простоюють через відсутність роботи

$$\overline{R_n} = \sum_{k=0}^{R-1} (R-k)P_k \; ; \qquad (3.85)$$

– коефіцієнт простою об'єкта (машини) в черзі

$$a_1 = \frac{L_q}{N} ; \qquad (3.86)$$

– коефіцієнт використання об'єктів (машин)

$$a_2 = 1 - \left(\frac{L_s}{N} \right) ; \qquad (3.87)$$

– коефіцієнт простою каналів обслуговування (механіків)

$$a_3 = \frac{\overline{R_n}}{R} ; \qquad (3.88)$$

– середній час очікування обслуговування (час очікування обслуговування в черзі)

$$W_q = \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\frac{1 - a_2}{a_2} \right) - \frac{1}{\mu} . \qquad (3.89)$$