## 3.5 Агрегатні та комплексні функціональні моделі

Звичайний шлях побудови функціональних моделей полягає у моделюванні окремих підсистем та їх взаємодії і отриманні на цій основі цілісної моделі системи. Як зазначалося у підрозділі 1.2, модель системи, яка складається з моделей окремих підсистем, називається агрегатною; цілісна модель називається комплексною, а процес перетворення агрегатної моделі на комплексну називається агрегуванням або композицією.

### 3.5.1 Формальні перетворення функціональних моделей

У розділі 1 зазначалося, що для одного і того ж об'єкта можуть бути створені різноманітні моделі, які відрізняються як аспектами функціонування об'єкта, що відображаються моделлю, так і множиною врахованих параметрів об'єкта і факторів впливу, а отже і її адекватністю. Але зрештою, якщо декілька моделей описують один і той же об'єкт, то вони повинні бути пов'язані між собою. Цей зв'язок можна розглядати як систему перетворень моделей.

Усі перетворення моделей можна розділити на дві групи:

− ізоморфні перетворення, які змінюють лише форму подання моделі, залишаючи незмінними множини вхідних і вихідних даних, якісні характеристики моделі тощо;

− гомеоморфні перетворення, в результаті яких отримуються моделі з відмінними від початкової моделі характеристиками: більшою або меншою точністю, зміненим набором початкових даних або результатів тощо.

Конкретний зміст оператора перетворення залежить від типу вхідної та вихідної моделей і мети моделювання. Послідовність таких перетворень дозволяє отримати зручну для використання модель. Типовий приклад послідовності перетворень моделей з метою прогнозування стану системи (початкова модель – агрегатна модель нелінійної динамічної системи):

1) лінеаризація нелінійностей;
2) агрегування моделей підсистем;
3) дискретне перетворення;
4) подання моделі у рекурсивному вигляді.

### 3.5.2 Агрегування моделей лінійних систем

Агрегатні моделі широко використовуються при побудові моделей динаміки лінійних систем. Модель системи подається у вигляді передатної функції, яка отримується шляхом композиції передатних функцій підсистем. Композиція здійснюється з використанням правил перетворення структурних схем лінійних систем.

1. *Послідовне з'єднання* блоків. При послідовному з'єднанні вихідна величина кожного попереднього блока є вхідним сигналом наступного блока (рис. 3.20). При перетворенні структурних схем ланцюг з послідовно з'єднаних

блоків можна замінити одним блоком з передатною функцією $W(s)$, що дорівнює добутку передатних функцій окремих блоків

$$W(s) = W_1(s) \cdot W_2(s) ... W_n(s) \tag{3.93}$$

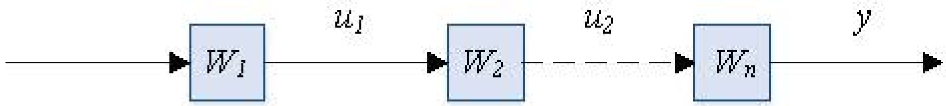



Рисунок 3.20 - Послідовна структура

2. При *паралельному з'єднанні* (рис. 3.21) на вхід всіх блоків подається один і той самий сигнал, а вихідні величини додаються.

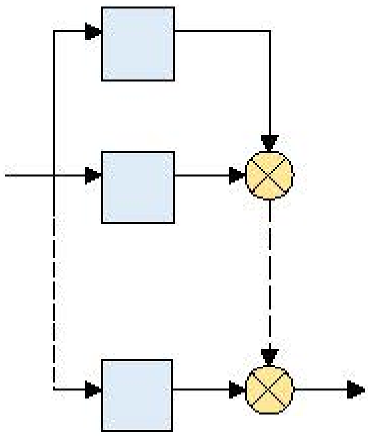


Рисунок 3.21 – Паралельна структура

Ланцюг з паралельно з'єднаних блоків можна замінити одним блоком з передатною функцією W(s), яка дорівнює сумі передатних функцій вхідних в неї ланок:

$$W(s) = \sum_{i=1}^{n} W_i(s) \tag{3.94}$$

3. Ланка, охоплена *зворотним зв'язком* (рис. 3.22).

Передатна функція $W_3(s)$ замкненого ланцюга з від'ємним зворотним зв'язком

$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s) W_2(s)}. \text{ v} \tag{3.95}$$

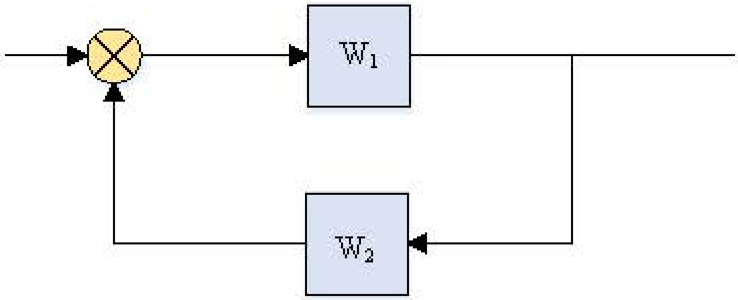
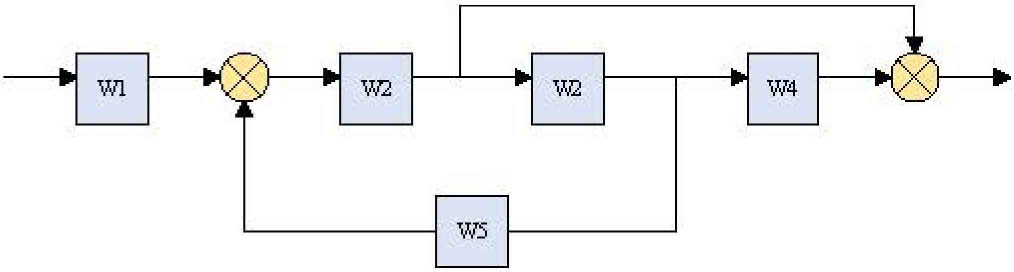



Рисунок 3.22 – Система зі зворотним зв'язком

Якщо зворотний зв'язок додатний, то

$$W(s)=\frac{W_1(s)}{1-W_1(s)W_2(s)}. \tag{3.96}$$

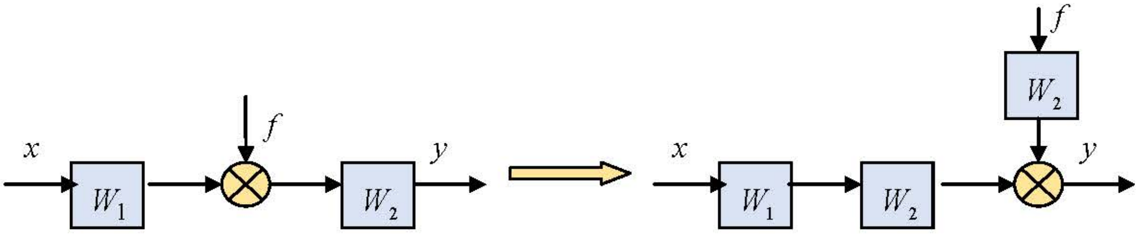
Але структура багатьох систем не дозволяє зобразити їх як комбінацію послідовного, паралельного з'єднань та зворотного зв'язку. Приклад такої структури показаний на рис. 3.23.



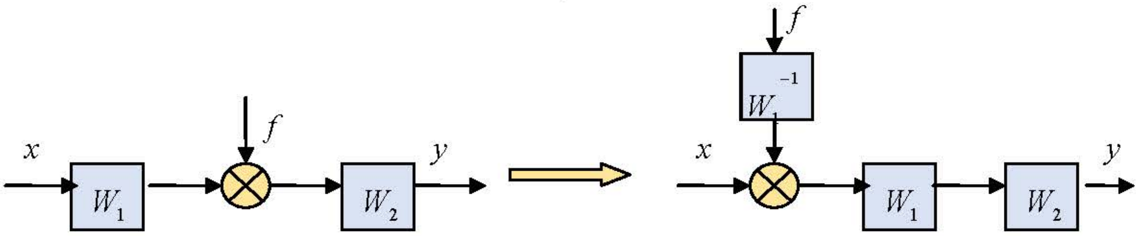

Для агрегування такої системи необхідно здійснити декілька допоміжних перетворень структурної схеми.

4. *Перенесення суматора* (рис. 3.24). При перенесенні суматора за ходом сигналу необхідно додати блок з передатною функцією, яка дорівнює передатній функції ланки, через яку переноситься суматор (рис. 3.24, а). Якщо суматор переноситься проти ходу сигналу, то необхідно додати блок з передатною функцією, яка дорівнює оберненій передатній функції ланки, через яку переноситься суматор (рис. 3.24, б).

5. При *перенесенні вузла* (рис. 3.25, а) також необхідно додати блок. Якщо вузол переноситься по ходу сигналу, то додається блок з передатною функцією, яка дорівнює оберненій передатній функції блока, через який переноситься вузол (рис. 3.25, б). Якщо вузол переноситься проти ходу сигналу, то додається блок з передатною функцією, яка дорівнює передатній функції блока, через який переноситься вузол (рис. 3.25, в).

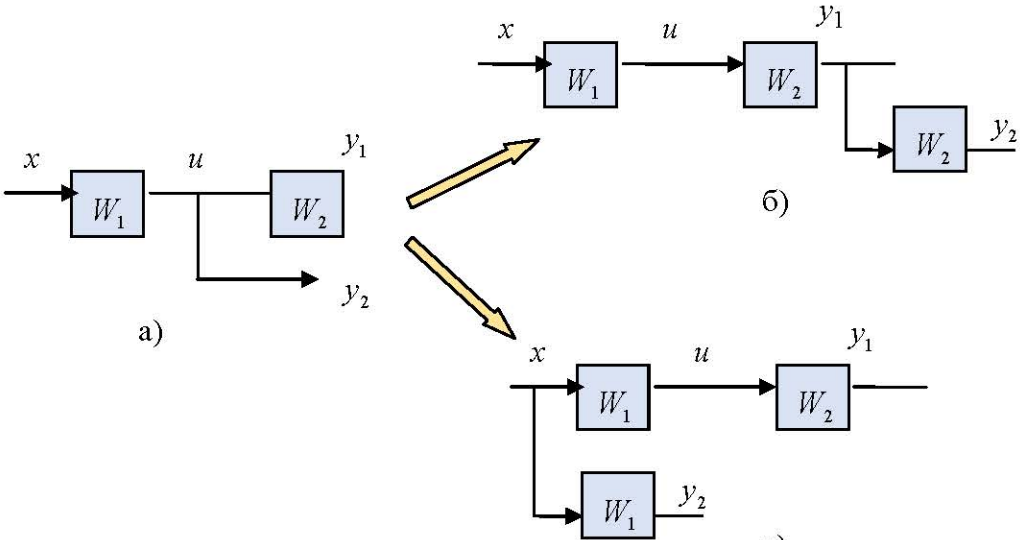



а)




б)

Рисунок 3.24 – Перенесення суматора




а)

в)

Рисунок 3.25 – Перенесення вузла

Наведені перетворення у процесі агрегування моделей лінійних систем можна розглядати як перехід від системи рівнянь, яка описує окремі підсистеми та їх з'єднання, до одного рівняння, яке описує перетворення вхідного сигналу системи на вихідний. Наприклад, для системи, зображеної на рис. 3.22, можна записати систему рівнянь

$$\begin{cases} u_1 = x - u_2 \\ y = u_1 \cdot W_1 \\ u_2 = y \cdot W_2 \end{cases}. \tag{3.97}$$

У процесі формального агрегування з системи (3.97) усуваємо внутрішні сигнали $u_1$ і $u_2$ методом підстановки. Для цього необхідно розв'язати друге рівняння системи відносно $u_1$. Після підстановки отримаємо одне рівняння функціональної моделі агрегованої системи

$$y = x \cdot \frac{W_1}{1 + W_1 W_2},$$

яке відповідає моделі (3.50).

### 3.5.3 Агрегування моделей нелінійних систем

Процес агрегування моделей нелінійних систем значно складніший ніж для систем лінійних. Складність проблеми пояснюється тим, що у багатьох випадках для здійснення агрегування необхідно знайти функцію оберненого перетворення одної чи декількох підсистем. Знаходження оберненої функції виконується шляхом розв'язання рівняння перетворення сигналів. Якщо підсистема нелінійна, то її моделлю є нелінійне диференціальне рівняння. Наразі ж відомі методи розв'язання лише невеликої кількості достатньо простих нелінійних диференціальних рівнянь.

Одним з випадків, для якого існують методи агрегування, є моделі, в яких нелінійна і динамічна частини розділені. Такі моделі мають назву моделей Гаммерштейна-Вінера:

− модель Гамерштейна

$$Y(t) = F[x(t), t] \Rightarrow \begin{cases} Y(t) = N[U(t)] \\ U(t) = W \cdot x(t) \end{cases}, \tag{3.98}$$

− модель Вінера

$$Y(t) = F[x(t), t] \Rightarrow \begin{cases} Y(t) = W \cdot U(t) \\ U(t) = N[x(t)] \end{cases}, \tag{3.99}$$

− модель Гамерштейна-Вінера

$$Y(t) = F[x(t), t] \Rightarrow \begin{cases} Y(t) = N_2[U_2(t)] \\ U_2(t) = W \cdot U_1(t), \\ U_1(t) = N_1[x(t)] \end{cases} \qquad (3.100)$$

де $F$ – нелінійна динамічна модель; $N$ – нелінійний статичний оператор; $W$ – лінійний динамічний оператор; $U_1$, $U_2$ – допоміжні проміжні сигнали.

Ще одним способом агрегування є наближене розв'язання нелінійних рівнянь. Це може бути здійснене чисельними методами, наприклад, за допомого засобів аналітичних перетворень математичних пакетів MathCAD, MAPL, MatLab тощо.