МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до вивчення дисципліни «Вища математика» (розділ «Диференціальні рівняння») для студентів усіх спеціальностей

Дніпропетровськ НМетАУ 2010

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до вивчення дисципліни «Вища математика» (розділ «Диференціальні рівняння») для студентів усіх спеціальностей

ЗАТВЕРДЖЕНО
на засіданні Вченої ради
академії
Протокол № 10 від 18.12.09.

Дніпропетровськ НМетАУ 2010

УДК 517.3

Методичні вказівки до вивчення дисципліни «Вища математика» (розділ «Диференціальні рівняння») для студентів усіх спеціальностей / Укл.: В. С. Коноваленков, Т. М. Заборова. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2010. – 36с.

Наведені основні визначення та методика розв'язування звичайних диференціальних рівнянь.

Розглянуті диференціальні рівняння першого та другого порядків, а також їх системи.

Наведено приклади на складання диференціальних рівнянь.

Крім того, додаються 30 варіантів завдань для індивідуальної роботи.

Призначені для студентів усіх спеціальностей

Друкується за авторською редакцією

Укладачі: В. С. Коноваленков, канд. техн. наук, доц.
Т. М. Заборова, ст. викладач

Відповідальний за випуск Г. Г. Швачич, канд. техн. наук, проф.

Рецензент Ю.Н. Головко, канд. фіз.- мат. наук, доц. (НГУ)

Підписано до друку 21.04.2010.Формат 60x84 1/16. Папір друк. Друк плоский. Облік.-вид. арк. 2,11. Умов. друк. арк. 2,09 . Тираж 100 пр. Замовлення №

Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпропетровськ-5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ

ЗМІСТ

1. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

1.1. Основні поняття

Звичайним диференціальним рівнянням першого порядку називається співвідношення вигляду

$$F(x, y, y') = 0,$$

(або, якщо воно розв'язано відносно похідної, то - $y' = f(x, y)$), де x - *незалежна змінна,* $y(x)$ - *шукана* функція.

Загальним інтегралом диференціального рівняння називають функцію $\phi(x, y, C) = 0$, яка визначає загальний розв'язок у неявному вигляді.

Будь-який розв'язок $y = \varphi(x, C_0)$, або інтеграл $\phi(x, y, C_0) = 0$, який дістанемо з загального розв'язку при конкретному значенні довільної сталої $C = C_0$, називають відповідно *частинним розв'язком,* або *частинним інтегралом.*

Функція $y = \varphi(x)$ називається *розв'язком* цього диференціального рівняння, якщо після заміни y на $\varphi(x)$, y' на $\varphi'(x)$ воно перетворюється у тотожність.

Основною задачею теорії диференціальних рівнянь є пошук усіх розв'язків заданого диференціального рівняння і вивчення властивостей цих розв'язків.

Пошук розв'язків диференціального рівняння називають *інтегруванням* цього рівняння.

Інтегралом диференціального рівняння називається співвідношення $\phi(x, y) = 0$, яке неявно задає розв'язок цього рівняння.

Інтегральною кривою диференціального рівняння називається графік його розв'язку $y = \varphi(x)$.

Загальним розв'язком диференціального рівняння називається функція $y = \varphi(x, C)$, яка є розв'язком цього рівняння при будь-яких допустимих значеннях сталої С.

Загальному розв'язку (або загальному інтегралу) відповідає сімейство інтегральних кривих.

Задачею Коші для диференціального рівняння називається задача відшукання розв'язку цього рівняння, який задовольняє початковій умові

$$y(x_0) = y_0,$$

або задача виділення із сім'ї інтегральних кривих тієї кривої, яка проходить через задану точку (x_0, y_0).

Задача Коші, або задача з початковою умовою, не завжди має єдиний розв'язок. Наступна теорема містить умови, при яких розв'язок рівняння

$$y' = f(x, y)$$

існує і є єдиним.

Теорема Коші. Якщо функція $f(x,y)$ і її похідна $\frac{\partial f}{\partial y}$ визначені і неперервні в області, що містить точку (x_0, y_0), то існує єдиний розв'язок рівняння $y=\varphi(x)$, такий, що $y_0=\varphi(x_0)$, тобто через точку (x_0, y_0) проходить єдина інтегральна крива даного рівняння.

Зауваження. Успіх в розв'язанні диференціальних рівнянь у великій мірі залежить від уміння розпізнавати типи рівнянь. Отже, приділіть увагу цьому питанню.

1.2. Рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними має вигляд:

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0,$$
$$M(x,y)=M_1(x)\cdot M_2(y),\quad N(x,y)=N_1(x)\cdot N_2(y) \tag{1.1}$$

або, якщо воно розв'язано відносно похідної:

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\quad f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y). \tag{1.2}$$

Тоді, розділивши обидві частини рівняння (1.1) на добуток $M_2(y)\cdot N_1(x)\neq 0$ та помноживши на dx, дістанемо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy=0$$

(або з рівняння (1.2)

$$\frac{dy}{f_2(y)}=f_1(x)dx,\quad f_2(y)\neq 0\quad).$$

Загальні інтеграли рівнянь (1.1) та (1.2) відповідно мають вигляд:

$$\int\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+\int\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy=C,\quad \int\frac{dy}{f_2(y)}=\int f_1(x)dx+C,\quad C=const.$$

Приклад 1. Знайти розв'язки диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx}=x\cdot(y-1).$$

Помноживши обидві частини рівняння на $\frac{dx}{y-1}$, одержимо:

$$\frac{dy}{y-1}=xdx.$$

Звідси $$\int \frac{dy}{y-1} = \int x dx + C, \quad \ln|y-1| = \frac{x^2}{2} + \ln|c|, \quad C = \ln|c|, \quad C \neq 0.$$

Після потенціювання маємо загальний розв'язок рівняння $y = 1 + ce^{\frac{x^2}{2}}$. Функція $\varphi(y) = y - 1$ дорівнює нулю, якщо $y = 1.$ $y = 1$ є розв'язком даного рівняння, тому що її підстановка у дане рівняння перетворює це рівняння у тотожність. Проте цей розв'язок можна дістати із загального розв'язку при $c = 0,$ тому він є частинним і не втратився при відокремленні змінних. Отже

$$y = 1 + ce^{\frac{x^2}{2}},$$

де c – довільна стала, - загальний розв'язок даного диференціального рівняння.

Приклад 2. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$e^x dx - (1 + e^x) y dy = 0,$$

який задовольняє початковій умові $y(0) = 1.$

Відокремлюючи змінні, одержимо:

$$\frac{e^x dx}{1 + e^x} = y dy.$$

Звідси

$$\int \frac{e^x dx}{1 + e^x} = \int y dy + C, \quad \int \frac{d(1 + e^x)}{1 + e^x} = \frac{y^2}{2} + C,$$

$$\ln\left|1 + e^x\right| = \frac{y^2}{2} + C$$ - загальний інтеграл рівняння.

За умовою $y(0) = 1$ знаходимо $\ln 2 = \frac{1}{2} + C,$ тобто $C = \ln 2 - \frac{1}{2}.$

Шуканий розв'язок задається неявно:

$$\ln\left|1 + e^x\right| = \frac{y^2 - 1}{2} + \ln 2.$$

Зауваження. Останній результат (частинний розв'язок) можна знайти, використовуючи визначені інтеграли:

$$\int_0^x \frac{e^x dx}{1 + e^x} = \int_1^y y dy.$$

1.3. Однорідні рівняння

Однорідними диференціальними рівняннями називають рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1.3}$$

якщо $f(x, y)$ – однорідна функція нульового виміру.

Функція $f(x,y)$ називається однорідною функцією виміру k відносно змінних x,y, якщо для будь-якого $t>0$ виконується рівність

$$f(tx,ty)=t^k f(x,y).$$

Для однорідних функцій нульового виміру маємо:

$$f(tx,ty)=f(x,y).$$

За допомогою підстановки $u=\dfrac{y}{x}$, або $y=u\cdot x$, де u – нова шукана функція аргументу x, як показав Лейбніц, однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними. Дійсно, впровадивши вказану зміну, перепишемо рівняння так:

$$xu'+u=f(u).$$

Звідси одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{du}{dx}=\frac{f(u)-u}{x}.$$

Відокремлюючи змінні і інтегруючи, одержуємо

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{du}{f(u)-u}+C,\quad f(u)-u\neq 0.$$

Однорідне диференціальне рівняння може мати вигляд

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \qquad (1.4)$$

за умовою, що функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ - однорідні функції одного виміру, тобто функції, для яких мають місце співвідношення:

$$P(tx,ty)=t^nP(x,y),\ Q(tx,ty)=t^nQ(x,y),$$

де n - степінь (або вимір) однорідності, $t>0$.

Наприклад, функції

$$\frac{x-y}{x+y},\ \frac{x^2+xy}{x-y},\ x^2+y^2-xy,\ x^{k-1}y+y^k$$

є однорідними функціями відповідно нульового, першого, другого та k-ого виміру.

Приклад 3. Розв’язати рівняння:

$$x\cdot\frac{dy}{dx}=y\ln\frac{y}{x}.$$

Запишемо рівняння у вигляді $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$.

Права частина цього рівняння є однорідною функцією степені нуль:

$$\frac{ty}{tx}\ln\frac{ty}{tx}=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}.$$

Отже, дане рівняння є однорідним. Зробивши підстановку $y=ux$, маємо

$$x\cdot\frac{du}{dx}+u=u\cdot\ln u,$$

або

$$x\cdot\frac{du}{dx}=u\cdot(\ln u-1).$$

Відокремлюючи змінні, дістанемо

$$\frac{du}{u(\ln u-1)}=\frac{dx}{x}.$$

Після інтегрування одержимо загальний інтеграл

$$\ln|\ln u-1|=\ln|x|+\ln|C|, \quad \ln|\ln u-1|=\ln|Cx|, \quad C=const.$$

На закінчення треба змінити u на $\frac{y}{x}$. Загальний інтеграл рівняння має вигляд:

$$\ln\left|\ln\frac{y}{x}-1\right|=\ln|Cx|.$$

Після потенціювання остаточний результат такий:

$$\ln\frac{y}{x}-1=Cx.$$

Слід зауважити, при відокремлюванні змінних ми припустили, що $u(\ln u-1)\neq 0.$ Якщо $u(\ln u-1)=0$, тоді $u=0, u=e.$ Кореню $u=0$ відповідає значення $y=0,$ яке не належить до області визначення рівняння. Кореню $u=e$ відповідає розв’язок $y=ex.$ Проте цей розв’язок міститься в загальному розв’язку, тому що його можна отримати із загального при C = 0. Отже, при відокремленні змінних втрати розв’язків не відбулося.

Приклад 4. Знайти розв’язок рівняння

$$\left(x-y\cos\frac{y}{x}\right)dx+x\cdot\cos\frac{y}{x}dy=0,$$

який задовольняє початковій умові $y(1)=0.$

Дане рівняння є однорідним, тому що $P(x,y)=x-y\cos\frac{y}{x}$ і $Q(x,y)=x\cos\frac{y}{x}$ - однорідні функції одного виміру (виміру 1). Поклавши $y=u\cdot x,$ дістанемо

$$(x-xu\cos u)dx+x\cos u(xdu+udx)=0,$$

або $$dx+x\cos udu=0, \quad \frac{dx}{x}+\cos udu=0.$$

Звідки після інтегрування

$$\ln|x|+\sin u=C, \quad \ln|x|+\sin\frac{y}{x}=C.$$

Враховуючи умову $y(1)=0,$ маємо $C=0.$ Отже частинним інтегралом даного рівняння є

$$\ln|x|+\sin\frac{y}{x}=0.$$

1.4. Лінійні рівняння

Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{1.5}$$

де $p(x)$ і $q(x)$ - задані неперервні функції. y, y' входять лінійно, тобто у першому степені. (При $q(x) \equiv 0$ одержимо відповідне однорідне рівняння). Для розв'язування цього рівняння існують певні методи. Ми розглянемо, так званий, метод Бернуллі, в основі якого лежить ідея знаходження розв'язку у вигляді $y = u(x) \cdot v(x),$ де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ - невідомі довільні функції. Тоді $y' = u'v + uv'$. Підставляючи замість $y,\ \ y'$ їх вирази через $u, v, u', v',$ маємо:

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x), \text{ або } uv' + v \cdot (u' + p(x)u) = q(x).$$

Функцію $u(x)$ виберемо за умовою $u' + p(x)u = 0$ (це лінійне однорідне рівняння, у якому завжди відокремлюються змінні). Отже,

$$u(x) = e^{-\int p(x)dx}.$$

Вважаємо, що стала інтегрування $C = 0$. Для розшуку функції $v(x)$ одержуємо також рівняння з відокремлюваними змінними:

$$e^{-\int p(x)dx} \cdot \frac{dv}{dx} = q(x), \text{ або } dv = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx.$$

Звідки

$$v(x) = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C, \text{ де } C \text{ - довільна стала.}$$

Перемноживши $u(x)$ і $v(x),$ дістанемо загальний розв'язок рівняння

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C \right).$$

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$xy' - 2y = 2x^4.$$

Розв'язок шукаємо відповідно методу Бернуллі у вигляді $y = u(x) \cdot v(x)$. Тоді

$$xu'v + xuv' - 2uv = 2x^4, \text{ або } xu'v + u \cdot (xv' - 2v) = 2x^4.$$

Функцію $v(x)$ виберемо так, щоб $xv' - 2v = 0$. Відокремивши у цьому рівнянні змінні, одержуємо

$$\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = 2\ln|x| \quad \Rightarrow \quad v = x^2.$$

Тоді $u(x)$ знайдемо із рівняння $xu'v = 2x^4$ *при* $v = x^2$:

$$\frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad du = 2xdx \quad \Rightarrow u(x) = x^2 + C,$$

де C - стала інтегрування. Отже, загальній розв'язок заданого рівняння має вигляд:

$$y(x) = (x^2 + C) \cdot x^2.$$

Приклад 6. Знайти розв'язок диференціального рівняння $y' + y \cdot tgx = \cos^2 x,$ який задовольняє початковій умові (задача Коші) $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$

Задане рівняння лінійне неоднорідне. Виконуємо підстановку $y = u(x) \cdot v(x)$:

$$u'v + uv' + uv \cdot tgx = \cos^2 x \quad \Rightarrow \quad u'v + u \cdot (v' + v \cdot tgx) = \cos^2 x.$$

Функцію $v(x)$ знайдемо, використавши умову $v' + v \cdot tgx = 0$:

$$\frac{dv}{dx} = -v \cdot tgx \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -tgxdx \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = \ln|\cos x| \quad \Rightarrow \quad v = \cos x.$$

Далі шукаємо $u(x)$:

$$\frac{du}{dx} \cdot \cos x = \cos^2 x \quad \Rightarrow \quad du = \cos xdx \quad \Rightarrow \quad u = \int \cos xdx = \sin x + C.$$

Отже, загальний розв'язок має вигляд:

$$y = \cos x \cdot (\sin x + C) = \frac{1}{2}\sin 2x + C\cos x.$$

Підставляючи в останнє співвідношення $x = \frac{\pi}{4}, y = \frac{1}{2},$ дістанемо

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} + C\cos\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot C \quad \Rightarrow \quad C = 0.$$

Таким чином, частинний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y = \frac{1}{2} \cdot \sin 2x.$$

1.5. Рівняння Бернуллі

Рівнянням Бернуллі називається рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x) \cdot y^{\alpha}, \tag{1.6}$$

де $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1.$ Якщо $\alpha = 0,$ це рівняння є лінійним неоднорідним, при $n = 1$ одержуємо лінійне однорідне рівняння, у якому завжди відокремлюються змінні (ці випадки вже були розглянуті раніше).

1.Поділивши обидві частини рівняння Бернуллі на y^{α} і поклавши $z = y^{1-\alpha}, z' = (1-\alpha) \cdot y^{-\alpha} y',$ рівняння Бернуллі можна звести до лінійного відносно z і z':

$$\frac{z'}{1-\alpha}+p(x)z=q(x).$$

Тому можна застосувати два методи: або розв'язати останнє лінійне рівняння, а потім замінити у одержаному розв'язку z на $y^{1-\alpha}$, або застосувати підстановку $y=u\cdot v$ безпосередньо до рівняння Бернуллі.

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'+\frac{y}{x}=2\frac{\ln x}{x}\cdot y^2.$$

Застосуємо підстановку $y=u\cdot v$:

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=2\frac{\ln x}{x}u^2v^2,\text{ або } u\left(v'+\frac{v}{x}\right)+u'v=2\frac{\ln x}{x}u^2v^2.$$

Функцію $v(x)$ знайдемо з рівняння $v'+\frac{v}{x}=0,$ або $\frac{dv}{dx}=-\frac{v}{x}\ \Rightarrow\ \frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x}.$

Звідки $\ln|v|=-\ln|x|\ \Rightarrow\ v=\frac{1}{x}.$

Функцію $u(x)$ знайдемо з наступного рівняння:

$$u'\cdot\frac{1}{x}=2\frac{\ln x}{x}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot u^2\ \Rightarrow\ \frac{du}{u^2}=2\frac{\ln x}{x^2}dx\ \Rightarrow\ \int\frac{du}{u^2}=2\int\frac{\ln x}{x^2}dx.$$

До останнього інтеграла застосуємо метод інтегрування частинами:

$$\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\left\{\begin{array}{ll} u=\ln x; & dv=\frac{dx}{x^2}\\ du=\frac{dx}{x}; & v=-\frac{1}{x}\end{array}\right\}=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C.$$

Тому $\frac{1}{u}=\frac{2(\ln x+1)}{x}+C.$ Звідки $u=\frac{x}{2(\ln x+1)+Cx}.$

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд:

$$y=\frac{1}{2(\ln x+1)+Cx}.$$

2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

2.1. Основні означення і поняття

Диференціальне рівняння другого порядку можна записати у вигляді

$$F(x, y, y', y'') = 0, \qquad (2.1)$$

або, якщо воно розв‘язане відносно похідної другого порядку, у вигляді

$$y'' = f(x, y, y'). \qquad (2.2)$$

Будь-яка неперервна та 2 рази диференційована функція $y = \varphi(x)$ називається *розв‘язком* рівняння (2.1) або (2.2), якщо підстановка її та її похідних у ці рівняння перетворюють останні у тотожності.

Задача Коші для рівняння другого порядку полягає у розшуканні такого розв‘язку, який задовольняє умовам

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y'_0,$$

де x_0, y_0, y'_0 - деякі наперед задані числа. Геометричний зміст початкових умов полягає у знаходженні такої інтегральної кривої рівняння, яка проходила б через задану точку (x_0, y_0) і мала б у цій точці заданий кутовий коефіцієнт дотичної, що дорівнює y'_0.

Функція $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ називається *загальним розв‘язком* рівняння (2.1) або рівняння (2.2), якщо вона задовольняє цим рівнянням при всіх значеннях довільних сталих C_1, C_2 і із неї можна дістати будь-який частинний розв‘язок цих рівнянь.

Співвідношення $\phi(x, y, C_1, C_2) = 0$, де C_1, C_2 - довільні сталі, називається *загальним інтегралом* рівняння другого порядку.

2.2. Рівняння другого порядку, що допускають зниження порядку

Існує досить великий клас рівнянь другого порядку, що допускають зниження порядку. Але ми обмежимося лише трьома простішими випадками.

I. Рівняння вигляду $y'' = f(x)$ розв’язують беспосереднім інтегруванням. Дійсно, проінтегрувавши один раз, маємо:

$$y' = \int f(x)dx + C_1, \quad C_1 = const.$$

Проінтегрувавши вдруге, знайдемо загальний розв’язок:

$$y = \int \left(\int f(x)dx \right) dx + C_1 x + C_2, \quad C_2 = const.$$

Приклад1. Розв’язати рівняння $y'' = \sin x.$

Послідовно інтегруючи, знайдемо:

$$y' = \int \sin x dx = -\cos x + C_1,\ y = -\int \cos x dx + C_1 x + C_2 = -\sin x + C_1 x + C_2.$$

II. Рівняння $F(x, y', y'') = 0$ не містить явно шуканої функції. Введемо нову функцію $v(x) = y'$. Тоді одержимо рівняння першого порядку відносно функції $v(x)$: $F(x, v, v') = 0.$

Припустимо, що знайдено загальний розв'язок цього рівняння

$$v(x) = \varphi(x, C_1).$$

Замінюючи $v(x)$ на y', дістанемо $y' = \varphi(x, C_1)$. Звідки загальний розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2.$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(1 + x^2) y'' - 2xy' = 0$$

та виділити з нього частинний розв'язок , який задовольняє початковим умовам

$$y(1) = 0,\ y'(1) = 1.$$

Покладемо $y' = v(x),\ y'' = v'(x)$. Тоді дане рівняння набуває вигляду:

$$(1 + x^2) v' - 2xv = 0.$$

Відокремлюючи змінні, знаходимо

$$\frac{dv}{v} = \frac{2xdx}{1 + x^2} \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = \ln\left|1 + x^2\right| + \ln|C_1| \quad \Rightarrow \quad v = C_1(1 + x^2).$$

Змінюючи $v(x)$ на y', інтегруємо ще раз і отримуємо загальний розв'язок даного рівняння $y = C_1\left(x + \dfrac{x^3}{3}\right) + C_2.$

Виділимо з цього загального розв'язку частинний. Використовуючи початкову умову $y(1) = 0$, маємо:

$0 = C_1\left(1 + \dfrac{1}{3}\right) + C_2$, або $\dfrac{4}{3} C_1 + C_2 = 0.$ $y' = C_1(1 + x^2)$. Використовуючи другу початкову умову $y'(1) = 1$, знаходимо $1 = C_1(1 + 1)$, звідки $C_1 = \dfrac{1}{2}.$

Отже, для визначення сталих C_1, C_2 маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{4}{3} C_1 + C_2 = 0. \end{cases}$$

Звідси $C_1 = \dfrac{1}{2}, C_2 = -\dfrac{2}{3}.$ Таким чином, шуканий частинний розв'язок заданого рівняння має вигляд: $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{3}.$

III. Рівняння $F(y,y',y'')=0.$ Це рівняння не містить незалежної змінної x. Введемо нову функцію, залежну від y: $y'=p(y)$. Тоді

$$y''=\frac{d(y')}{dx}=\frac{dp(y)}{dx}=\frac{dp(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot p.$$

Підставляючи останні вирази для похідних у дане диференціальне рівняння, одержимо рівняння першого порядку відносно функції $p(y)$:

$$F(y,p(y),p'(y))=0.$$

Нехай функція $p(y)=\varphi(y,C)$ є загальним розв'язком цього рівняння. Поклавши $p(y)=\dfrac{dy}{dx},$ прийдемо до рівняння з відокремлюваними змінними

$\dfrac{dy}{dx}=\varphi(y,C),$ де C - довільна стала інтегрування.

Інтегруючи його, одержимо загальний розв'язок рівняння, розглянутого у цьому пункті.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$2yy''-y'^2=1.$$

Застосуємо підстановку $y'=p(y).$ Тоді задане рівняння запишеться так:

$$2yp\frac{dp}{dy}=1+p^2.$$

Це рівняння першого порядку, що допускає відокремлення змінних:

$$\frac{2pdp}{1+p^2}=\frac{dy}{y}.$$

Звідси

$$\ln(1+p^2)=\ln|y|+\ln|C_1|,\quad C_1\neq 0,\quad 1+p^2=C_1y.$$

Підставляючи сюди значення $p=y',$ маємо

$$1+(y')^2=C_1y.$$

Таким чином,

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{C_1y-1}\quad\Rightarrow\quad\frac{dy}{\pm\sqrt{C_1y-1}}=dx.$$

Інтегруючи обидві частини останнього рівняння, знайдемо

$$\pm\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1y-1}=x+C_2,$$

або $$y=\frac{1}{C_1}+\frac{C_1}{4}(x+C_2)^2,\, C_1\neq 0,\quad C_1,C_2=const.$$

Зауваження. Якщо у розглянутих прикладах розв'язується задача Коші, сталі інтегрування C_1, C_2 рекомендується знаходити у процесі інтегрування диференціального рівняння, тому що в окремих випадках наявність довільних сталих заважає інтегруванню або ускладнює його (наприклад, зустрічаються інтеграли, які не завжди можна виразити через елементарні функції).

Приклад 4. Знайти розв'язок рівняння, який задовольняє початковим умовам:
$$2y''-3y^2=0,\quad y(-2)=1,\quad y'(-2)=-1.$$

Знизимо порядок рівняння, замінивши $y'=p,\, y''=p\dfrac{dp}{dy}.$ Тоді
$$2p\frac{dp}{dy}-3y^2=0\ \Rightarrow\ 2pdp=3y^2dy\ \Rightarrow\ p^2=y^3+C_1.$$
Знаходимо сталу C_1, підставляючи у останнє співвідношення $y=1,\ p=y'=-1$:
$$(-1)^2=1+C_1\ \Rightarrow\ C_1=0.$$

Таким чином, $p^2=y^3,\ p=\pm y^{\frac{3}{2}}.$

Замінюючи p на $\dfrac{dy}{dx}$, дістанемо
$$\frac{dy}{dx}=\pm y^{\frac{3}{2}}\ \Rightarrow\ y^{-\frac{3}{2}}dy=\pm dx\ \Rightarrow\ -2y^{-\frac{1}{2}}=\pm x+C_2\ \Rightarrow\ \mp x=\frac{2}{\sqrt{y}}+C_2.$$

Підставляючи $x = -2,\ y = 1$, знаходимо C_2:

$$1)\ 2=\frac{2}{\sqrt{1}}+C_2,\qquad 2)\ -2=\frac{2}{\sqrt{1}}+C_2,$$
$$C_2=0,\qquad\qquad C_2=-4.$$

Отже, частинних розв'язків два:

$$x=-\frac{2}{\sqrt{y}},\quad x=\frac{2}{\sqrt{y}}-4.$$

2.3. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Лінійне неоднорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами записують у вигляді
$$y''+py'+qy=f(x),\tag{2.3}$$
де $p,\ q$ – сталі, $f(x)$ - неоднорідність, або права частина рівняння.

Треба звернути увагу на те, що інтегрування таких рівнянь завжди можливе, причому у деяких випадках воно зводиться до алгебраїчних операцій.

2.4. Однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Однорідне рівняння

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{2.4}$$

інтегрується методом, який запропонував ще у 1743 р. Леонард Ейлер: частинний розв'язок рівняння шукається у вигляді

$$y = e^{kx}, \tag{2.5}$$

де k має бути таким, щоб ця функція була розв'язком рівняння (2.4).

Знайшовши похідні

$$y' = ke^{kx}, \quad y'' = k^2 e^{kx}$$

і підставивши їх разом із функцією (2.5) у рівняння (2.4), маємо:

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Звідси випливає, що функція (2.5) є розв'язком диференціального рівняння (2.4) тоді і тільки тоді, коли стала величина k буде розв'язком квадратного рівняння

$$k^2 + pk + q = 0, \tag{2.6}$$

яке називається характеристичним.

Слід зауважити, що загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння має специфічну структуру, яка встановлюється теоремою:

Загальний розв'язок $y(x)$ ***лінійного однорідного рівняння другого порядку є лінійна комбінація двох його лінійно незалежних розв'язків*** $y_1(x)$ ***і*** $y_2(x)$ ***, тобто функція виду***

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \tag{2.7}$$

де C_1, C_2 ***- довільні сталі.***

Отже, треба мати два лінійно незалежних розв'язку $y_1(x)$ і $y_2(x)$**.** Визначення системи n лінійно незалежних функцій у загальному вигляді досить складне. Тому зазначимо, як можна легко перевірити лінійну незалежність двох функцій:

якщо відношення двох функцій не дорівнює сталій, то ці дві функції лінійно незалежні.

Таким чином, залишається лише вказати вигляд лінійно незалежних розв'язків. Зробимо це за допомогою таблиці:

Тип коренів рівняння (2.6)	Лінійно незалежні розв'язки Загальний розв'язок
$k_1 \neq k_2$ – дійсні корені	$y_1(x) = e^{k_1 x}, \quad y_2(x) = e^{k_2 x}$ $y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
$k_1 = k_2 = k$ – дійсний двократний корінь	$y_1(x) = e^{kx}, \quad y_2(x) = xe^{kx}$ $y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{kx}$
$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \ i = \sqrt{-1}$ - комплексні спряжені корені	$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$ $y_1(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Отже, розв'язання лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами фактично зводиться до розв'язування характеристичного рівняння (2.6).

2.5. Неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Спеціальний вигляд правої частини

Звернемось до рівняння (2.3). Спочатку розглянемо випадок, коли права частина цього рівняння має, так званий, спеціальний вигляд. Структуру загального розв'язку рівняння (2.3) визначає ***теорема:***

***Загальний розв'язок рівняння* (2.3) *дорівнює сумі загального розв'язку рівняння* (2.4) *і деякого частинного розв'язку рівняння* (2.3)**

$$y(x) = y_0 + \bar{y}.$$

Вважається, що права частина рівняння (2.3) має спеціальний вигляд, якщо

$$f(x) = e^{ax} P_m(x),$$

де множник a у показнику експоненти може дорівнювати нулю, може бути дійсним числом, що не дорівнює нулю, може бути уявним або комплексним числом, $P_m(x)$ – заданий багаточлен степені $m \geq 0$.

Далі будуть розглянуті важливі частинні випадки спеціального вигляду правої частини неоднорідного рівняння, які можна одержати за допомогою формули Ейлера:

$$e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{ax}(\cos \beta x + i \sin \beta x).$$

Виявляється, що частинні розв'язки неоднорідного рівняння будемо шукати, використовуючи вигляд його правої частини, а також результати аналізу (див. табл.2.1,2.2). Звернемося до таблиць.

Таблиця 2.1

Вигляд правої частини	Аналіз	Вигляд частинного розв'язку
1. $f(x)=P_m(x), a=0$	Число 0 не є коренем рівняння (2.4)	$\overline{y}=Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m,\ b_i\ (i=1,...,m)$ - невизначені коефіцієнти
2. $f(x)=e^{ax}P_m(x),\ a-$ дійсне число	Число a не є коренем рівняння (2.4)	$\overline{y}=e^{ax}Q_m(x)=e^{ax}(b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m),\ b_i\ (i=1,...,m)$ - невизначені коефіцієнти
3. $f(x)=P_m(x)\cos\beta x+$ $+R_n(x)\sin\beta x$	Числа $\pm\beta i$ не є коренями рівняння (2.4)	$\overline{y}=Q_r(x)\cos\beta x+T_r(x)\sin\beta x, r=\max(m,n),$ $T_r(x)=d_0x^r+d_1x^{r-1}+...+d_{r-1}x+d_r,\ d_i\ (i=1,...,r)-$ невизначені коефіцієнти
4. $f(x)=e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x+$ $+R_n(x)\sin\beta x)$	Числа $\alpha\pm\beta i$ не є коренями рівняння (2.4)	$\overline{y}=e^{\alpha x}(Q_r(x)\cos\beta x+T_r(x)\sin\beta x),\ r=\max(m,n),$ $T_r(x)=d_0x^r+d_1x^{r-1}+...+d_{r-1}x+d_r,\ d_i\ (i=1,...,r)-$ невизначені коефіцієнти

Таблиця 2.2

Вигляд правої частини	Аналіз	Вигляд частинного розв'язку
1. $f(x)=P_m(x), a=0$	Число 0 є коренем рівняння (2.4) кратності s *(s = 1,2)*	$\overline{y}=Q_m(x)=x^s(b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m),\ b_i\ (i=1,...,m)$ - невизначені коефіцієнти
2. $f(x)=e^{ax}P_m(x),\ a-$ дійсне число	Число a є коренем рівняння (2.4) кратності s *(s =1,2)*	$\overline{y}=e^{ax}Q_m(x)=e^{ax}x^s(b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m),\ b_i\ (i=1,...,m)$ - невизначені коефіцієнти

3. $f(x)=P_m(x)\cos\beta x+$ $+R_n(x)\sin\beta x$	Числа $\pm\beta i$ є коренями рівняння (2.4) кратності s	$\bar{y}=x^s(Q_r(x)\cos\beta x+T_r(x)\sin\beta x), r=\max(m,n),$ $T_r(x)=d_0x^r+d_1x^{r-1}+...+d_{r-1}x+d_r,\ d_i\ (i=1,...,r)-$ невизначені коефіцієнти; $s=1$ для рівняння другого порядку
4. $f(x)=e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x+$ $+R_n(x)\sin\beta x)$	Числа $\alpha\pm\beta i$ є коренями рівняння (2.4) кратності s	$\bar{y}=x^se^{\alpha x}(Q_r(x)\cos\beta x+T_r(x)\sin\beta x),\ r=\max(m,n),$ $T_r(x)=d_0x^r+d_1x^{r-1}+...+d_{r-1}x+d_r,\ d_i\ (i=1,...,r)-$ невизначені коефіцієнти; $s=1$ для рівняння другого порядку

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння
$$y''-2y'-8y=0.$$

Для заданого лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами складаємо характеристичне рівняння та знаходимо його корені:
$$k^2-2k-8=0,\quad k_{1,2}=1\pm\sqrt{1+8}=1\pm3;\quad k_1=-2, k_2=4.$$

Отже, загальним розв'язком даного однорідного рівняння є
$$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{4x}.$$

Приклад 2. Знайти розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам (або, що теж саме, умовам задачі Коші):
$$y''+6y+9y=0,$$
$$y(0)=1,\quad y'(0)=1.$$

Відшукаємо спочатку загальний розв'язок:
$$k^2+6k+9=0\ \Rightarrow\ k_1=k_2=-3\ \Rightarrow\ y=e^{-3x}(C_1+C_2x).$$

Знайдемо похідну функції y:
$$y'=-3e^{-3x}(C_1+C_2x)+C_2e^{-3x}.$$

Використовуючи початкові умови, дістанемо систему:
$$\begin{cases} C_1 = 1; \\ -3C_1+C_2=-1 \end{cases}\ \Rightarrow\ C_1=1,\quad C_2=2.$$

Отже, шуканий розв'язок
$$y=e^{-3x}(1+2x).$$

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння
$$y''+9y=0.$$

Складемо характеристичне рівняння, знайдемо його корені та запишемо шуканий розв'язок заданого рівняння:

$$k^2+9=0 \quad \Rightarrow k_1=3i, k_2=-3i \quad \Rightarrow \quad y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x.$$

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння $\quad y''-4y'+29y=0.$

Використовуючи стандартну схему, одержуємо:

$$k^2-4k+29=0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2}=2\pm\sqrt{4-29}=2\pm 5i \quad \Rightarrow \quad y=e^{2x}(C_1\cos 5x+C_2\sin 5x).$$

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''-y'=-2x.$$

Спочатку знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння: $k^2-k=0 \quad \Rightarrow \quad k_1=0, k_2=1 \quad \Rightarrow \quad y_0=C_1e^{0x}+C_2e^{1\cdot x}=C_1+C_2e^x.$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді (див. табл.2.2)

$$\overline{y}=x\cdot(Ax+B),$$

де *A, B* – невизначені коефіцієнти, для розшуку яких підставляємо цей розв'язок та його похідні $\overline{y'}=2Ax+B, \quad \overline{y''}=2A$ у дане неоднорідне рівняння та прирівнюємо коефіцієнти при подібних у обох частинах одержаного співвідношення:

$$2A-2Ax-B=-2x; \quad -2A=-2; \quad A=1; \quad 2A-B=0 \quad \Rightarrow$$
$$B=2A=2; \quad \textit{отже} \quad \overline{y}=x\cdot(x+2).$$

Таким чином, загальний розв'язок заданого рівняння дорівнює:

$$y=y_0+\overline{y}=C_1+C_2e^x+x\cdot(x+2).$$

Приклад 6. Розв'язати задачу Коші:

$$y''+y=4e^x, \quad y(0)=4, y'(0)=-3.$$

Використовуючи стандартну схему, маємо:

$$k^2+1=0,\ k_{1,2}=\pm i, \quad y_0=C_1\cos x+C_2\sin x; \quad \overline{y}=Ae^x, \overline{y}'=\overline{y}''=Ae^x; \quad Ae^x+Ae^x=4e^x \quad \Rightarrow$$
$$2A=4 \quad \Rightarrow \quad A=2; \quad y=y_0+\overline{y}=C_1\cos x+C_2\sin x+2e^x \quad - \quad \textit{загальний розв'язок.}$$

Для розв'язання задачі Коші треба використати початкові умови. Для цього знайдемо похідну від загального розв'язку та підставимо початкові дані у розв'язок та його похідну. Залишається розв'язати лінійну систему із невідомими C_1, C_2:

$$\begin{cases} y=C_1\cos x+C_2\sin x+2e^x \\ y'=-C_1\sin x+C_2\cos x+2e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4=C_1+2 \\ -3=C_2+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} C_1=2 \\ C_2-5 \end{matrix}$$

Таким чином, шуканий частинний розв'язок має вигляд:

$$y=2\cos x-5\sin x+2e^x.$$

Приклад 7. Вказати вигляд загального розв'язку рівняння, не знаходячи числові значення невизначених коефіцієнтів

$$y'' + y = \sin x + x\cos x.$$

Для побудови загального розв'язку однорідного рівняння використовуємо характеристичне рівняння, для побудови частинного розв'язку неоднорідного рівняння використовуємо таблицю 2.2. Отже, маємо:

$$k^2+1=0 \;\Rightarrow\; k_{1,2}=\pm\sqrt{-1}=\pm i \;\Rightarrow\; y_0=C_1\cos x+C_2\sin x; \;\; \overline{y}=x[(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x]$$
$$\Rightarrow \;\; y=y_0+\overline{y}.$$

Приклад 8. Побудувати загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 6y' + 8y = 2e^{4x}\sin x.$$

Числові значення невизначених коефіцієнтів не шукати.

Використовуючи стандартну схему побудови загального розв'язку, маємо:

$$k^2-6k+8=0, \quad k_{1,2}=3\pm\sqrt{9-8}=3\pm 1 \;\Rightarrow\; k_1=4, k_2=2 \;\Rightarrow\; y_0=C_1e^{4x}+C_2e^{2x};$$
$$\overline{y}=Ae^{4x}\cos x+Be^{4x}\sin x, \quad y=y_0+\overline{y}.$$

2. 6. Неоднорідне диференціальне рівняння. Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

Розглянемо лінійне неоднорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

де права частина є довільна функція. У цьому випадку для розв'язування рівняння використовують, так званий, метод варіації довільних сталих, або метод Лагранжа. Суть методу Лагранжа полягає у тому, що загальний розв'язок рівняння треба шукати у формі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння

$$y'' + py' + qy = 0,$$

але замінивши довільні сталі невідомими функціями, залежними від *x*.

Скористаємось співвідношенням (2.7), що задає загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x).$$

Замінюємо довільні сталі C_1 та C_2 на функції *M(x)* та *N(x)* відповідно. Тобто загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд:

$$y(x) = M(x)y_1(x) + N(x)y_2(x). \tag{2.8}$$

Наступні дії пов'язані з побудовою системи двох лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь, у якої невідомими є похідні від функцій *M(x)*та *N(x).*

Перша похідна від загального розв'язку (2.8) має вигляд:

$$y'(x) = M'(x)y_1(x) + M(x)y_1'(x) + N'(x)y_2(x) + N(x)y_2'(x).$$

Накладемо додаткову умову, за якою ця похідна повинна нагадувати похідну від загального розв'язку відповідного однорідного рівняння, тобто

$$y'(x) = M(x)y_1'(x) + N(x)y_2'(x); \tag{2.9}$$

$$(y'(x) = C_1y_1'(x) + C_2y_2'(x)).$$

Але у цьому випадку

$$M'(x)y_1(x) + N'(x)y_2(x) = 0.$$

Таким чином, одержуємо перше рівняння шуканої системи:

$$M'(x)y_1(x) + N'(x)y_2(x) = 0. \tag{2.10}$$

Далі шукаємо другу похідну

$y''(x) = M'(x)y_1'(x) + M(x)y_1''(x) + N'(x)y_2'(x) + N(x)y_2''(x)$ та підставляємо її, а також першу похідну (2.9) та функцію *y(x)*, що визначена у вигляді (2.8), у дане неоднорідне рівняння (2.3). При цьому враховуємо, що $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є лінійно незалежні розв'язки відповідного однорідного рівняння. Маємо:

$$M(x)y_1''(x) + M'(x)y_1'(x) + N(x)y_2''(x) + N'(x)y_2'(x) + p\cdot\left(M(x)y_1'(x) + N(x)y_2'(x)\right) +$$
$$+ q\cdot\left(M(x)y_1(x) + N(x)y_2(x)\right) = f(x).$$

Виконаємо деякі перетворення, перегрупувавши члени лівої частини останнього співвідношення:

$$M'(x)y_1'(x) + N'(x)y_2'(x) + M(x)\cdot\left(y_1''(x) + py_1'(x) + qy_1(x)\right) + N(x)\cdot\left(y_2''(x) + py_2'(x) + qy_2(x)\right) = f(x).$$

При цьому

$$y_1''(x) + py_1'(x) + qy_1(x) = 0, \qquad y_2''(x) + py_2'(x) + qy_2(x) = 0,$$

тому що $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є розв'язки відповідного однорідного рівняння. Таким чином, одержуємо ще одне рівняння:

$$M'(x)y_1'(x) + N'(x)y_2'(x) = f(x). \tag{2.11}$$

Отже, залишається розв'язати систему:

$$\begin{cases} M'(x)y_1(x) + N'(x)y_2(x) = 0; \\ M'(x)y_1' + N'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases} \tag{2.12}$$

Слід підкреслити, що остання система завжди має єдиний розв'язок , тому що її визначник не дорівнює нулю, оскільки є визначником Вронського двох лінійно незалежних функцій $y_1(x)$ та $y_2(x)$.

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Цим розв'язком системи (2.12) є похідні від шуканих функцій *M(x)* та *N(x)*. Залишається виконати інтегрування.

Розглянемо приклад.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}.$$

Складемо характеристичне рівняння для відповідного однорідного:

$$k^2 + 1 = 0;\ k_1 = i;\ k_2 = -i.$$

Отже, загальний розв’язок однорідного рівняння є:

$$y_o = C_1 \sin x + C_2 \cos x,$$

а загальний розв’язок неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді:

$$y = M(x)\sin x + N(x)\cos x.$$

Система (2.12) у даному випадку виглядає наступним чином:

$$\begin{cases} M'(x)\sin x + N'(x)\cos x = 0; \\ M'(x)\cos x - N'(x)\sin x = \dfrac{1}{\sin x}. \end{cases}$$

Розв’язавши систему, одержуємо:

$$M'(x) = \frac{\cos x}{\sin x},\ N'(x) = -1.$$

Інтегруючи, остаточно маємо:

$$M(x) = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C_1, \quad N(x) = -x + C_2.$$

Таким чином, шуканим загальним розв’язком даного рівняння є функція:

$$y = \left(\ln|\sin x| + C_1\right)\sin x + \left(-x + C_2\right)\cos x.$$

3. ЗАДАЧІ НА СКЛАДАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

На практиці треба вміти не тільки розв’язувати диференціальні рівняння, але ще й складати ці рівняння. Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 1. Нехай розчиняють цукрозу у воді, причому, на початку реакції кількість цукрози x_0, а за час t розчинилося x. Обчислити, за який час розчиниться у воді вся цукроза. Оскільки швидкість розчинення $\frac{dx}{dt}$ вважають пропорційною різниці між концентрацією насиченого розчину і концентрацією в даний момент часу t, маємо:

$$\frac{dx}{dt} = k(x_0 - x),$$

де k - певна стала величина.

Інтегруючи, одержуємо $\ln|x_0 - x| = -kt + C.$ Довільну сталу C визначимо з умови: $x(0) = 0,$ тобто

$$C = \ln x_0.$$

Отже,

$$\ln|x_0 - x| = -kt + \ln x_0 \quad \Rightarrow \; x_0 - x = x_0 e^{-kt},$$

або
$$x = x_0(1 - e^{-kt}).$$

Для розчину всієї речовини x повинно дорівнювати x_0, це можливе лише при $t \to \infty$. Отже, теоретично вся речовина ніколи не розчиниться, а практично вважають, що речовина розчинилася, коли її кількість стала менша за 0,001 початкової кількості. З цих міркувань маємо для $x = 0{,}999 x_0$:

$$e^{-kt} = 0{,}001 \quad \Rightarrow \quad e^{kt} = 1000.$$

Отже,

$$kt = \frac{\lg 1000}{\lg e} = \frac{3}{0{,}4343} \approx 6{,}91,$$

або $t = \dfrac{6{,}91}{k}$.

Ось за такий час практично вся цукроза розчинилася у воді.

Приклад 2. Згідно із законом Ньютона, швидкість, з якою тіло охолоджується у повітрі, пропорційна різниці між температурою тіла T та температурою повітря A, тобто

$$\frac{dT}{dt} = k(T - A).$$

Поклавши $A = 20^0$ С та знаючи, що за 20 хвилин тіло охолонуло від 100^0 до 60^0, обчислити, за який час температура тіла буде 30^0 С.

Інтегруючи наведене диференціальне рівняння, маємо:

$$\frac{dT}{T - A} = kdt \quad \Rightarrow \quad \ln|T - A| = kt + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad T - A = Ce^{kt}, \text{ тобто } \; T = A + Ce^{kt}.$$

Згідно з умовою, $A = 20$ при $t = 0$, $T = 100$, а коли $t = 20$, то $T = 60$. Звідси одержуємо: $100 = 20 + C$, тобто $C = 80$, $60 = 20 + 80\, e^{20k} \quad \Rightarrow \quad e^k = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1/20}$.

Остаточно
$$T = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}.$$

Тепер, щоб знайти відповідь на запитання, треба покласти $T = 30^0$С. Маємо

$$30 = 20 + 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/20} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/20} \quad \Rightarrow \quad t = 60.$$

Отже, $t = 60$ хв.

Приклад 3. Вважаючи, що опір повітря прямо пропорційний швидкості тіла, дослідити падіння тіла в повітрі, тобто знайти закон його руху.

На тіло діють дві сили: вага $p = mg$ та сила опору $f = bv$. Отже, результуюча сила дорівнює $F = mg - bv$. Складаємо таке диференціальне рівняння руху:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - bv, \text{ тобто } \; dt = \frac{mdv}{mg - bv},$$

$$t = -\frac{m}{b}\ln(mg - bv) + C.$$

Коли $t = 0, \quad v = 0,$ таким чином, $C = \frac{m}{b}\ln(mg)$ і

$$t = \frac{m}{b}\ln\frac{mg}{mg - bv}.$$

Далі, розв'язавши останнє рівняння відносно v, дістанемо:

$$v = \frac{ds}{dt} = k\cdot\left(1 - e^{-gt/k}\right),$$

де $k = \frac{mg}{b}$. Інтегруючи, маємо:

$$s = kt + \frac{k^2}{g}e^{-gt/k} + C_1.$$

Коли $t = 0, \quad s = 0.$ Отже,

$$C_1 = -\frac{k^2}{g}.$$

Остаточно одержуємо:

$$s = k\left[t + \frac{k}{g}\left(e^{-gt/k} - 1\right)\right].$$

Приклад 4. У процесі хімічної реакції деяка речовина перетворюється в іншу зі швидкістю, пропорційною кількості перетвореної речовини (припущення, за яке відповідають хіміки):

а) записати закон зміни кількості $x(t)$ неперетвореної речовини у вигляді диференціального рівняння (коефіцієнт пропорційності $\alpha = const$);

б) записати закон зміни кількості $x(t)$ неперетвореної речовини у вигляді аналітичної формули;

в) через 1 год від початку процесу кількість неперетвореної речовини становила 31,4 г, а через 3 год – 9,7 г; знайти $x(t)$.

а) Очевидно, шукане диференціальне рівняння відносно функції $x(t)$ буде мати вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x, \quad \alpha = const,$$

Причому, $x(0) = x_0$.

б) Шукану аналітичну формулу одержимо, розв'язуючи задачу Коші для лінійного однорідного рівняння з п. а):

$$\frac{dx}{x} = \alpha\, dt \quad \Rightarrow \quad \ln|x| = \alpha t + \ln|C_1| \quad \Rightarrow \quad x(t) = C_1 e^{\alpha t}; \quad x(0) = C_1 = x_0.$$

Остаточно маємо: $x(t) = x_0 e^{\alpha t}$.

в) З одержаної в б) формули маємо:

$$x(1) = x_0 e^{\alpha} = 31{,}4;$$
$$x(3) = x_0 e^{3\alpha} = 9{,}7.$$

Поділимо друге рівняння на перше:

$$e^{2\alpha} = \frac{9{,}7}{31{,}4}, \quad e^{\alpha} = \sqrt{\frac{9{,}7}{31{,}4}}.$$

Тому у цьому конкретному випадку

$$x_0 = 31{,}4 e^{-\alpha} = 31{,}4\sqrt{\frac{31{,}4}{9{,}7}} = 56{,}5\,(\text{г}).$$

До речі, аналітична формула для $x(t)$ має вигляд:

$$x(t) = x_0\left(\sqrt{\frac{9{,}7}{31{,}4}}\right)^t.$$

Приклад 5. Кульку масою m кинули вертикально вгору із початковою швидкістю V_0. Опором повітря нехтуємо, вважаємо, що на кульку діє лише сила ваги. Скласти математичну модель задачі, дослідити її і дати відповідь на такі питання:

1) у який момент часу від початку руху кулька досягне максимальної висоти $x_{\max}$?
2) чому дорівнює $x_{\max}$?

Припустимо, що кулька рухається вздовж осі Ox, напрямленої вертикально вгору, сила, яка діє на кульку, дорівнює mg ,тоді за другим законом Ньютона:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg.$$

Покладемо

$$x(0) = 0, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = V\big|_{t=0} = V_0.$$

Тоді математична модель задачі має вигляд такої задачі Коші:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g; \quad x(0) = 0, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = V_0.$$

Звідси легко знайти аналітичний вираз для $x(t)$ та $x_{\max}$:

$$x(t) = V_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad x'(t) = -g\left(t - \frac{V_0}{g}\right) \quad \Rightarrow \quad t_{\max} = \frac{V_0}{g};$$

$$x_{\max} = x(t_{\max}) = x\left(\frac{V_0}{g}\right) = \frac{V_0^{\,2}}{2g}.$$

Приклад 6. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $A(1,2)$, кутовий коефіцієнт дотичної до якої в кожній її точці дорівнює подвійній ординаті цієї точки.

Нехай рівняння шуканої кривої $y = y(x)$. Цю функцію треба відшукати. Беремо на кривій довільну точку $M(x, y)$. Відомо, що кутовий коефіцієнт дотичної до кривої у точці $M(x, y)$ дорівнює похідній функції $y = y(x)$, яка фіксується у точці дотику. За умовою задачі, для кожної точки $M(x, y)$ шуканої кривої має місце рівняння

$$y'(x) = 2y(x).$$

Відокремлюємо змінні та інтегруємо:

$$\frac{dy}{dx} = 2y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = 2dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = 2\int dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = 2x + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad y = Ce^{2x}.$$

Одержано загальний розв’язок рівняння. Відшукаємо тепер частинний розв’язок, тобто рівняння кривої, яка проходить через точку $A(1,2)$. Підставляючи у загальне рівняння замість (x, y) координати точки $A(1,2)$, маємо:

$$2 = Ce^2 \quad \Rightarrow \quad C = 2e^{-2}.$$

Підставляючи знайдене значення C у загальний розв’язок, одержуємо шукане рівняння кривої:

$$y = 2e^{-2}e^{2x} = 2e^{2x-2}.$$

4. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ОДНОРІДНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Системи лінійних однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами мають вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by, \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy, \end{cases}$$

де $x(t), y(t)$ - невідомі функції, a, b, c, d - сталі коефіцієнти. Найпростіший метод розв’язування полягає у зведенні системи до одного лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами другого порядку, використовуючи виключення однієї із невідомих функцій. Розглянемо дію методу на прикладі.

Приклад 1. Знайти загальний розв’язок системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$$

Із першого рівняння $y = -\frac{1}{3}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{3}x.$ Підставимо цей вираз у друге рівняння замість y , а замість $\frac{dy}{dt}$ його похідну по t : $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{3}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{3}\frac{dx}{dt}$. Одержимо рівняння другого порядку відносно невідомої x:

$$-\frac{1}{3}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{3}\frac{dx}{dt} = 3x - \frac{1}{3}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{3}x \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 10x = 0.$$

Розв’язуємо це рівняння і, використовуючи зв’язок між x і y, одержуємо шуканий результат:

$$k^2 - 2k + 10 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$k_{1,2} = 1 \pm 3i; \quad x = C_1e^t \cos 3t + C_2e^t \sin 3t = e^t\left(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t\right); \quad y = -\frac{1}{3}\left(\frac{dx}{dt} - x\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(C_1e^t \cos 3t - 3C_1e^t \sin 3t + C_2e^t \sin 3t + 3C_2e^t \cos 3t - C_1e^t \cos 3t - C_2e^t \sin 3t\right) =$$

$$= e^t\,(C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t).$$

$k_{1,2}$ - розв’язки характеристичного рівняння, C_1, C_2 - довільні сталі.

Слід зауважити, що аналогічно можна розв’язувати системи лінійних неоднорідних рівнянь, зводячи їх до лінійних неоднорідних рівнянь другого порядку. Щодо останніх, то вони розглянуті вище.

5. ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Розв'язати диференціальні рівняння (при наявності початкових умов знайти частинний розв’язок).

Варіант 1

1) $(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0, \;\; y(1) = 1$; 2) $y - 2xy' = x$, $y(1) = 0$;

3) $y' - 2y = 2x$; 4) $xy' + y = xy^2$; 5) $2y'y'' = 1;$ 6) $y'' - 9y = 0, \; y(0) = 3 \;\; y'(0) = -1$;

7) $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$, $y(0) = -1, \;\; y'(0) = -1;$ 8) $y'' + y = tgx$.

Варіант № 2

1) $SinxCosydx = CosxSinydy$; 2) $y' = \dfrac{y+x}{x}$, $y(1) = 1$; 3) $xy' + y = x + 4$;

4) $2(y' + xy) = (x-1)e^x y^2$; 5) $y'' ctg 3x = -6y'$; 6) $3y'' + 10y' + 3y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

7) $2y'' - 3y' + y = 2x^2 - 3$; 8) $y'' + y = ctgx$.

Варіант № 3

1) $yy' + x = 1$, $y(0) = 0$; 2) $y^2 + x^2 y' = xyy'$, $y(3) = 4$; 3) $y' + y = e^{-x}$;

4) $2y' + y = (x-1)y^3$; 5) $y^4 - y^3 y'' = 1$; 6) $6y'' - y' - y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$;

7) $y'' - 4y' = 6x^2 + 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$; 8) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.

Варіант № 4

1) $y' = \sqrt{y} \ln x$, $y(e) = 1$; 2) $xy' = \sqrt{x^2 + y^2}$, $y(1) = 1$; 3) $y' - \dfrac{2y}{x} = x + 2$;

4) $y' + xy = (x-1)e^x y^2$; 5) $y'' - \dfrac{y'}{x} = x$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 0$;

6) $25y'' + 10y' + y = 0$; 7) $y'' - 2y' + y = 4e^x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$;

8) $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

Варіант № 5

1) $(3 + e^x) yy' = e^x$; 2) $y^2 + x^2 y' = xyy'$, $y(3) = 4$;

3) $y' + tgxy = Sin2x$, $y(0) = 2$; 4) $y' + xy = x^3 y^3$; 5) $(y')^2 - yy'' = 0$;

6) $y'' + 5y' + 6.25y = 0$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 2$; 7) $6y'' - y' - y = e^{4x}$;

8) $y'' + y = \dfrac{1}{Cosx}$.

Варіант № 6

1) $1 + y^2 = xyy'$, $y(2) = 1$; 2) $y = xy' + ySin\dfrac{y}{x}$, $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$;

3) $xy'+y=x^3+3x$; 4) $xy'+y=y^2\ln x$; 5) $y''=\frac{1}{2y}$;

6) $y''+2.25y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=1$.

7) $y''+9y=2Cos3x$, $y(0)=1$, $y'(0)=3$; 8) $y''+y=\frac{1}{Sinx}$.

Варіант № 7

1) $y'=(2y+1)ctgx$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$; 2) $(2x-3y)dx+xdy=0$, $y(1)=1$;

3) $y'+\frac{2y}{x}=x^3$; 4) $y'-xy=-y^3e^{x^2}$; 5) $y''=2(y'-1)ctgx$;

6) $y''+0.49y=0$, $y(0)=-1$, $y'(0)=0$;

7) $y''+4y'-12y=8Sin2x$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$; 8) $y''-2y=4x^2e^{x^2}$.

Варіант № 8

1) $y\ln y+xy'=0$; 2) $xy'=xe^{y/x}+y$, $y(1)=0$; 3) $y'+3y=xe^{-3x}$, $y(0)=0$.

4) $xy'+y=xy^2\ln x$; 5) $2yy''=y^2+(y')^2$;

6) $2y''+2y'+y=0$, $y(0)=-2$, $y'(0)=0$;

7) $y''+5y'+6y=12Cos2x$, $y(0)=1$, $y'(0)=6$; 8) $y''-y'=\frac{e^x}{1+e^x}$.

Варіант № 9

1) $y'+ytgx=0$, $y(0)=1/2$; 2) $xy'=xSin\frac{y}{x}+y$;

3) $xy'-y=x^2Sinx$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi$; 4) $y'+\frac{y}{x+1}+y^2=0$;

5) $xy''\ln x=y'$; 6) $5y''+2y'+y=0$, $y(0)=-3$, $y'(0)=0$;

7) $y''+y'-2y=3e^x$, $y(0)=0$, $y'(0)=\frac{8}{3}$; 8) $y''+4y=\frac{1}{Sin2x}$.

Варіант № 10

1) $yy'+x=0$, $y(-2)=4$; 2) $xy'-y=xtg\,\frac{y}{x}$; 3) $y'+2y=e^{2x}$, $y(0)=\frac{1}{e}$;

4) $y'-\frac{y}{x}=-xy^2$; 5) $3y'y''=e^y, y(-3)=0, y'(-3)=1;$ 6) $8y''-4y'+y=0$;

7) $y''-3y'=3x+x^2$, $y(0)=0$, $y'(0)=3$; 8) $y''+y'=\frac{1}{1+e^x}$.

Варіант № 11

1) $x\ln y\cdot y'=x^3y, \mathrm{y}(0)=\mathrm{e};$ 2) $ydx+2(\sqrt{xy}-x)dy=0, \mathrm{y}(1)=1;$

3) $y'-3y=e^{-2x}, y(0)=2;$ 4) $y'+\frac{y}{x+1}=-\frac{1}{2}(x+1)^3y^3;$

5 $y'^2+yy''=0;$ 6) $y''+4y'+29y=0, \mathrm{y}(0)=0, \mathrm{y}'(0)=15;$

7) $y''-6y'+9y=x^2-x+3,$ $y(0)=\frac{4}{3}$, $y'(0)=\frac{1}{27}$; 7) $y''+4y=\frac{1}{\cos 2x}$.

Варіант № 12

1) $e^y(1+x^2)dy-2x(1+e^y)dx=0;$ 2) $y'=e^{-\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}, \mathrm{y}(1)=0;$

3) $y'+\frac{1}{x}y=e^{x^2}, y(1)=\frac{e}{2};$ 4) $2(xy'+y)=\ln x\cdot y^2, y(1)=2;$ 5) $x^2y''=(y')^2;$

6) $y''+7y'+6y=0$; 7) $y''+6y'+9y=10\sin x, y(0)=0, y'(0)=0;$

8) $y''+y=tg^2x.$

Варіант № 13

1) $ye^{2x}dx+(1+e^{2x})dy=0;$ 2) $xdy=(y+\sqrt{x^2+y^2})dx, y(1)=0;$

3) $y'-\frac{1}{x}y=x^2, y(1)=0.5;$ 4) $y'-xy+y^3e^{-x^2}=0, y(0)=\frac{1}{2};$

5) $3y'y''=e^y, \mathrm{y}(\text{-}3)=0, \mathrm{y}'(\text{-}3)=1;$

6) $y''-2y'+2y=0$, $y(0)=0,$ $y'(0)=1;$

7) $y''+9y'=6e^{3x}$, $y(0)=0$; $y'(0)=0$; 8) $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$.

Варіант № 14

1) $y'=xy+e^{x}y,\quad y(0)=3;$ 2) $xy'-y=xtg\,\dfrac{y}{x};$ 3) $y'-\dfrac{y}{x}=x\sin x, \mathrm{y}(\pi)=0;$

4) $y'-8x\sqrt{y}=\dfrac{4xy}{x^2-1};$ 5) $y''+y'tgx=\sin 2x, y(0)=-1, y'(0)=0;$

6) $25y''+10y'=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=-2;$

7) $y''-y'=-2x$, $y(0)=0,$ $y'(0)=1$; 8) $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$.

Варіант № 15

1) $y(2+e^{x})dy=e^{x}dx$; 2) $(xy'-y)arctg\,\dfrac{y}{x}=x,\quad y(1)=0;$

3) $y'+\dfrac{y}{x+2}=\dfrac{arctgx}{1+x^2};$ 4) $y'+\dfrac{y}{x}=-xy^2$; 5) $xy''+y'=1;$

6) $3y''+7y'+2y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=2;$

7) $y''+2y'+y=2\cos x;$ 8) $y''+y=tg^2x.$

Варіант № 16

1) $xy'=\dfrac{x-1}{y}e^{2x}+y',\quad y(1)=e;$ 2) $y'-\dfrac{1}{x}y=x\ln x,$ $y(2)=2;$ 3) $(2x-y)y'=x+2y;$

4) $xy'+y=\dfrac{1}{2}xy^2, y(1)=2;$ 5) $(1-x^2)y''-2xy'+2=0;$

6) $y''+y=0$, $y(\dfrac{\pi}{2})=1,$ $y'(\dfrac{\pi}{2})=0;$

7) $y''-4y'+5y=2x^2e^{x}$, $y(0)=2$, $y'(0)=3$; 8) $y''+9y=\dfrac{1}{\cos 3x}.$

Варіант № 17

1) $y'=2^{x-y}$, $y(1)=1;$ 2) $xy'=y\cos\ln\dfrac{y}{x};$ 3) $y'-\dfrac{y}{x}=2x^2\sqrt{x^2+5}, \mathrm{y}(2)=36;$

4) $y'+4x^3y=4y^2e^{4x}(1-x^3);$ 5) $y''+2y(y')^3=0;$

6) $9y''+25y=0, y(0)=0, y'(0)=0;$ 7) $y''-10y'+25y=10e^{5x}, \mathrm{y}(0)=5, \mathrm{y}'(0)=1;$

8) $y''+3y'+2y=\dfrac{1}{e^{x}+1}.$

Варіант № 18

1) $2xy^2dx - ydy = yx^2dy - 6xdx$; 2) $y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$, , $y(e) = 1$;

3) $y' + \frac{y}{\cos^2 x} = \frac{1}{1-\sin^2 x}$; 4) $yy' + \frac{1}{2}y^2 = \sin x, y(0) = 1$; 5) $y'' = 2e^{4y}, y(0) = 0, y'(0) = 1$;

6) $9y'' - y' - 2y = 0$; 7) $y'' - 2y' + y = 4(\cos x + \sin x), y(0) = 1, y'(0) = 0$;

8) $y'' + y = \frac{1}{\sin^3 x}$.

Варіант № 19

1) $xy' + y = y^2, y(1) = 0.5$; 2) $x(x+2y)dy + (x^2 - y^2)dy = 0$;

3) $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $y(1) = 2$; 4) $(1-x^2)y' - xy - 2xy^2 = 0$;

5) $y'' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$; 6) $y'' + 4y' = 0, y(0) = 7, \mathrm{y}(0) = 8, y'(0) = 8$;

7) $y'' + 2y' + 5y = 4\sin x + 22\cos x$; 8) $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$;

Варіант № 20

1) $(1+x^2)y' + xy = 0,\ y(\sqrt{2}) = 2$; 2) $xy' - y = \sin\frac{2y}{x}, y(1) = \frac{\pi}{4}$;

3) $y'\cos x - y\sin x = \cos 5x$; 4) $y' + y = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y}, y(0) = \frac{9}{4}$; 5) $xy''y' = \sqrt{1+(y')^2}$;

6) $9y'' - y' - 2y = 0$; 7) $y'' - 3y' = 3(2-x^2)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

8) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.

Варіант № 21

1) $(\sqrt{xy} - \sqrt{x})dy = ydx$; 2) $xy' = y + x\cos\frac{y}{x}, y(1) = 0$; 3) $y'\sin x + y\cos x = \sin^2 2x$;

4) $y' + 2xy = 2x^3y^3, y(0) = 1$; 5) $4y^3y'' = y^4 - 1$; 6) $y'' + y = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$, $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$;

7) $y'' + y' + y = (x^2 + x)e^x$; 8) $y'' + y' = tg^2 x$.

Варіант № 22

1) $ySinxdx + (\cos x - 1)dy = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 1;$ 2) $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0,\quad y(1) = 2;$

3) $y' + y \cdot \frac{1}{3+x} = \ln 5x;$ 4) $yy' - 4x - y^2\sqrt{x} = 0;$ 5) $x^2 y'' = (y')^2;$

6) $y'' + 3y' + 2y = 0,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = -1;$

7) $y'' - 3y' - 10y = \sin x + 3\cos x;$ 8) $y'' + 4y = tgx.$

Варіант № 23

1) $y'\cos x = y\ln y, y(0) = e;$ 2) $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y';$ 3) $y' - \frac{1}{x}y = \frac{x}{(x-2)^2}, y(1) = 0;$

4) $y' - x\sqrt{y} = \frac{xy}{x^2 - 1};$ 5) $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 2x^3, y(0) = 0, y'(0) = 1;$

6) $y'' + 6y' + 13y = 0,\quad y(\frac{\pi}{2}) = 0,\quad y'(\frac{\pi}{2}) = 1;$ 6) $y'' + 7y' + 12y = 24x^2 + 16x - 15;$

8) $y'' - y' = \frac{1}{e^x + 1}.$

Варіант № 24

1) $2x^2ydy = (3 + y^2)dx;$ 2) $y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2, y(1) = 2;$ 3) $y' - ctgx \cdot y = \sin^3 x;$

4) $xy' + y = 2y^2\ln x;$ 5) $(1 + x^{2)}y'' + 2xy' + 2 = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1;$

6) $y'' + 2y' + 10y = 0,\quad y(0) = 2,\quad y'(0) = 1;$

7) $y'' - 2y' + y = 16e^x,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 2;$ 8) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1};$

Варіант № 25

1) $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy;$ 2) $(xy' - y)ctg\frac{y}{x} = x;$ 3) $y' + \cos x \cdot y = \cos x,\quad y(0) = 3;$

4) $3(xy' + y) = y^2\ln x, y(1) = 3;$ 5) $y'' - \frac{2xy'}{1 - x^2} + \frac{2}{1 - x^2} = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1;$

5) $y'' + 4y' = 0,\quad y(0) = 7,\quad y'(0) = 8;$

6) $y'' - 8y' + 12y = -65\cos 4x;$ 8) $y'' + 9y = \frac{1}{\sin 3x}.$

Варіант № 26

1) $(1-e^{x})\sin y\cdot y'=e^{x}\cos^{3}y,\ y(0)=\frac{\pi}{4};$ 2) $(y^{2}-2xy)dx+x^{2}dy=0,\ y(0)=1;$

3) $y'-\frac{1}{x}y=\ln x,\ y(1)=5;$ 4) $y'+\frac{2}{x}y=\frac{2\sqrt{y}}{\cos^{2}x};$ 5) $y''tgx=y'+1,\ y(\frac{\pi}{4})=0,\ y'(\frac{\pi}{4})=-1;$

6) $2y''-3y'-35y=0,\quad y(0)=1,\ y'(0)=5;$

7) $y''+16y=16Cos4x;$ 8) $y''+y=\frac{1}{Sin^{3}x}.$

Варіант № 27

1) $3y'-x^{2}y'+x=0,\quad y(5)=0;$ 2) $xdy-(y+\sin\frac{2y}{x})dx=0,\ y(1)=\frac{\pi}{4};$

3) $y'\cos x-y\sin x=\cos 5x;$ 4) $xy'+y=y^{2}\ln 3x,\ y(1)=1;$ 5) $xy''+y'=x+1;$

6) $3y''+7y'+2y=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=2;$

7) $y''-13y'+12y=x-1,\quad y(1)=3,\quad y'(1)=2;$ 8) $y''+2y'+y=\frac{e^{-x}}{x^{2}-1}.$

Варіант № 28

1) $(2xy+y)y'=3-y^{2},\ y(0)=2;$ 2) $2x^{3}y'=y(2x^{2}-y^{2}),\ y(1)=1;$

3) $y'+\frac{1}{x-1}y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^{2}}};$ 4) $y'-y\cdot tgx=-\frac{2}{3}y^{4}\cdot\sin x,\ y(0)=1;$

5) $xy''-y'=x^{2},\ y(1)=2,\ y'(1)=0;$ 6) $2y''+4y'+y=0,\quad y(\frac{\pi}{2})=0,\quad y'(\frac{\pi}{2})=1;$

7) $y''+64y=Cos8x+2\sin 8x,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0;$ 8) $y''+y=\frac{1}{\sin^{3}x}.$

Варіант № 29

1) $3y'-x^{2}y'+x=0,\ y(5)=0;$ 2) $xy'=x\cos\frac{y}{x}+y,\ y(1)=\frac{\pi}{2};$

3) $\sin x\cdot y'+\cos x\cdot y=tg^{2}x;$ 4) $3xy'+5y=(4x-5)y^{4};$

5) $y''-\frac{2x}{x^{2}+1}y'=0;$ 6) $y''+y=0,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=0;$

7) $y''-y'=2x,\quad y(0)=0,\ y'(0)=2;$ 8) $y''+y=\frac{1}{Sin^{2}x}.$

Варіант № 30

1) $y' - \frac{4xy}{x^2 - 1} = 0, y(\sqrt{2}) = 1;$ 2) $xy' = y(1 + \ln\frac{y}{x}), y(1) = \frac{1}{\sqrt{e}};$ 3) $y' + tgx \cdot y = \cos^3 x;$

4) $(y' + y^2) \cdot (x + 1) = -y, y(0) = 1;$ 5) $xy'' \ln x = y' + 1;$ 6) $y'' - 6y' + 34y = 0;$

7) $y'' - 4y' = 1 + 6x^2,\ \ y(0) = 2,\ \ y'(0) = 3;$ 8) $y'' - y' = e^{2x} \cdot \sin e^x.$

ЛІТЕРАТУРА

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1978. – Т.2.
2. Гутер Р.С., Янпольский А.Р. Дифференциальные уравнения: Учебное пособие для втузов. – Изд.2-е, перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1976.
3. Данко П. Е., Попов А. Г. Высшая математика в примерах и задачах: Учебное пособие, ч. 2. – М.: Высшая школа, 1967.
4. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа для втузов. – М.: Наука, 1972.
5. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие для вузов. – 10-е издание. – М.: Наука,1990.
6. Валєєв К. Г., Джаладова І. А., Лютий О.І. та ін. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. – К.: КНЕУ, 2002.