МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до вивчення дисципліни «Вища математика»
(розділ «Числові та степеневі ряди»)
для студентів усіх спеціальностей

Дніпропетровськ НМетАУ 2009

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до вивчення дисципліни «Вища математика» (розділ «Числові та степеневі ряди») для студентів усіх спеціальностей

ЗАТВЕРДЖЕНО
на засіданні Вченої ради
академії
Протокол № 9 від 30.12.08

Дніпропетровськ НМетАУ 2009

УДК 517.3

Методичні вказівки до вивчення дисципліни «Вища математика» (розділ «Числові та степеневі ряди ») для студентів усіх спеціальностей / Укл.: В. С. Коноваленков, Т. М. Заборова. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2009. – 48с.

Містять відомості про дослідження числових та степеневих рядів. Дано основні визначення, ознаки збіжності для знакопостійних та знакозмінних числових рядів.

Розглянуті степеневі ряди та методи знаходження інтервалів їх збіжності або розбіжності, а також приклади застосування рядів для інтегрування функцій, розв'язання диференціальних рівнянь, наближених обчислень. Крім того, наведені варіанти завдань для індивідуальної роботи.

Призначені для студентів усіх спеціальностей

Друкується за авторською редакцією

Укладачі: В. С. Коноваленков, канд. техн. наук, доц.
Т. М. Заборова, ст. викладач

Відповідальний за випуск Г. Г. Швачич, канд. техн. наук, проф.

Рецензент Ю.Н. Головко, канд. фіз.-мат.наук, доц. (НГУ)

Підписано до друку 07.05.09. Формат 60x84 1/16. Папір друк. Друк плоский. Облік.-вид. арк. 2,82. Умов. друк. арк.2,78. Тираж 100 пр. Замовлення №

Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпропетровськ-5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ

ЗМІСТ

1. ЧИСЛОВА ПОСЛІДОВНІСТЬ. ЧИСЛОВІ РЯДИ. ЗБІЖНІСТЬ РЯДУ, ЙОГО СУМА. НЕОБХІДНА УМОВА ЗБІЖНОСТІ. ВЛАСТИВОСТІ ЗБІЖНИХ РЯДІВ

Розглянемо числову послідовність $u_1, u_2, u_3 \ldots, u_n, \ldots$, де $u_n = f(n)$. Побудуємо із цієї послідовності вираз $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$.
Цей вираз називається нескінченим числовим рядом, а член $u_n = f(n) -$ його загальним членом. Числовий ряд часто записують у вигляді $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Суму n членів числового ряду позначають S_n і називають n - ю частинною сумою ряду:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n.$$

Ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ називається збіжним, якщо його n – а частинна сума S_n при нескінченому зростанні n має кінцеву границю, тобто, якщо $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Число S називають сумою ряду. Якщо при $n \to \infty$ n – а частинна сума ряду не прямує до кінцевої границі, то ряд називають розбіжним.

Ряд, що складається із членів будь-якої спадної геометричної прогресії

$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \quad (|q| < 1)$, збігається і має суму $\dfrac{a}{1-q}$.

Так званий гармонійний ряд $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{n} + \ldots$ розбігається.

Сформулюємо ***основні теореми про числові ряди***:

1. Якщо збігається ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$, то збігається і ряд $u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \ldots$, що складається із членів даного ряду, починаючи з (m + 1) - ого. Цей останній ряд називають залишком даного ряду. І навпаки: із збіжності ряду $u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \ldots$ випливає збіжність ряду $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$.

2. Якщо збігається ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ і його сума дорівнює S, то збігається і ряд $au_1 + au_2 + au_3 + \ldots + au_n + \ldots$, причому його сума дорівнює aS.

3. Якщо збігаються ряди $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ і $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots$ відповідно із сумами S і σ, то збігається ряд

$(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+(u_3+v_3)+\ldots+(u_n+v_n)\ldots$, причому сумою останнього ряду буде $S+\sigma$.

4. Якщо збігається ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

тобто при $n\to\infty$ границя загального члена ряду дорівнює нулю (*необхідна умова збіжності)*.

Виконання необхідної умови збіжності не є достатнім. Таким чином, якщо необхідна умова збіжності не виконується, констатуємо розбіжність ряду, а якщо виконується, - проводимо додаткове дослідження, перевіряючи виконання, так званих, достатніх умов збіжності (див. Тему 2).

Приклад. Обчислити суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

Запишемо частинні суми ряду у вигляді, зручному для подальшого граничного переходу.

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}+\frac{1}{n\cdot(n+1)} =$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Після розкривання дужок одержуємо досить простий вираз для частинної суми:

$$.S_n = 1-\frac{1}{n+1}.$$

Знаходимо границю:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

Таким чином, ряд збігається, а його сума дорівнює 1.

Зауважимо, що знаходження сум ряду за визначенням, тобто за допомогою границі послідовності частинних сум, дуже непроста задача, розв’зання якої, взагалі кажучи, суттєво залежить від того, у якому вигляді задається конкретний ряд. З іншого боку, при розгляді великої кількості проблем дослідника може цікавити лише питання збіжності або розбіжності ряду, а не сама його сума. Тому дослідження збіжності відбувається за допомогою спеціальної теорії (див. Тему 2), а сума ряду, якщо її обчислення виявляється важким за визначенням, знаходиться наближено. (Останнє питання не входить у коло проблем, що розглядаються у даних методичних вказівках).

Запитання для самоперевірки

1. Що таке числова послідовність, границя послідовності?
2. Що називається числовим рядом, членами ряду, сумою ряду, залишком ряду?
3. Збіжність найпростіших числових рядів: спадна геометрична прогресія, гармонічний ряд.
4. Необхідна умова збіжності. Яке співвідношення задає цю умову?

Домашнє завдання

1. Записати u_n для наведених нижче рядів, якщо відомі декілька їх перших членів:

а) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$

б) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots$

в) $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\ldots$

г) $\frac{2}{5}+\frac{4}{8}+\frac{6}{11}+\frac{8}{14}+\ldots$

д) $1-1+1-1+1-1+\ldots.$

ж) $1+\frac{1}{2}+3+\frac{1}{4}+5+\frac{1}{6}+\ldots$

2. Записати 4 – 5 перших членів ряду, якщо відомо загальний член u_n.

а) $_n = \frac{3n-2}{n^2+1}$; б) $u_n = \frac{(-1)^n n}{2^n}$; в) $u_n = \frac{2+(-1)^n}{n^2}$; г) $u_n = \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$.

3. Переконатись в розбіжності ряду, застосовуючи необхідну ознаку збіжності:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{3n-1}{4n+3}};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n;\quad \sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n};\quad \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot arctg\,\frac{1}{n};\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.$$

4. №№ 2773, 2778 [3].

2. РЯДИ З ДОДАТНИМИ ЧЛЕНАМИ. ОЗНАКИ ПОРІВНЯННЯ . ОЗНАКИ ДАЛАМБЕРА І КОШІ. ІНТЕГРАЛЬНА ОЗНАКА КОШІ-МАКЛОРЕНА

Сформулюємо найважливіші ознаки збіжності і розбіжності рядів із додатними членами.

Теорема. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ два ряди з додатними членами. Тоді:

1) якщо $a_n \le b_n$, $n \in N$, то із збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а із розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$;

2) якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$, то обидва ряди збіжні або розбіжні одночасно.

При дослідженні рядів на збіжність користуються, так званими, “еталонними” рядами, тобто рядами збіжність або розбіжність яких завчасно відома. З цією метою часто використовують такі ряди, як

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots, \text{ і}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}} = 1 + \frac{1}{2^{\lambda}} + \frac{1}{3^{\lambda}} + \ldots + \frac{1}{n^{\lambda}} + \ldots.$$

До речі, останній ряд збіжний при $\lambda > 1$ і розбіжний при $\lambda \le 1$.

Приклади. Дослідити збіжність рядів:

1. $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln(n+1)} + \ldots$. Скористаємось ознакою порівняння.

Порівняємо даний ряд із гармонійним: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$. Так як виконується нерівність $\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}$,
досліджуваний ряд розбіжний.

2. $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3^2} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot 3^n} + \ldots$

Для порівняння вибираємо нескінченно спадну геометричну прогресію $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ зі знаменником $q=\frac{1}{3}$. Так як виконується нерівність $\frac{1}{3^n}\geq\frac{1}{n\cdot 3^n}$, то досліджуваний ряд збіжний.

3. $\frac{1}{2-1}+\frac{1}{2^2-2}+\frac{1}{2^3-3}+\ldots+\frac{1}{2^n-n}+\ldots$. Для порівняння вибираємо ряд

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$. Скористаємось теоремою порівняння: Так як ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ - збіжний, то і даний ряд збігається.

Збіжність ряду з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $a_n>0$ досліджується також за допомогою інших ознак збіжності.

Ознака Даламбера. Якщо існує скінчена границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l,$ то при l <1 ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ збіжний, при $l>1$ ряд розбіжний, при $l=1$ ознака не дає відповіді про збіжність чи розбіжність ряду і потрібні додаткові дослідження.

Приклади. 1. $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^5}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}+\ldots$

Скористаємось ознакою Даламбера. $a_n=\frac{2n-1}{2^n}$, $a_{n+1}=\frac{2n+1}{2^{n+1}}$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\cdot 2^n}{2^{n+1}(2n-1)}=\frac{1}{2}.\text{ Отже ряд }\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}\text{ - збіжний.}$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot(n+3)}$. Застосуємо ознаку Даламбера.

$$a_n=\frac{1}{(n+1)\cdot(n+3)},a_{n+1}=\frac{1}{(n+2)\cdot(n+4)};\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot(n+3)}{(n+2)\cdot(n+4)}=1.$$

Ознака Даламбера не дає відповіді на питання про збіжність ряду. У даному разі більш ефективно буде діяти ознака порівняння. Отже порівняємо даний ряд із збіжним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. За теоремою порівняння:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+2)\cdot(n+4)}=1$. Таким чином, даний ряд збіжний.

Радикальна ознака Коші. Нехай $a_n>0 \quad (n=1,2,3...)$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$. Тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ збіжний, якщо $l<1$ і розбіжний, якщо $l>1$. У випадку, якщо $l=1$ питання про збіжність ряду залишається відкритим.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2\mathrm{n}-1}\right)^n$.

Оскільки $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}<1$, то даний ряд збіжний.

Інтегральна ознака Коші - Маклорена. Якщо $\mathrm{f(x)}$ при $\mathrm{x}>1$додатна, монотонно спадна і неперервна, то

ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, де $a_n=f(n)$ збігається або розбігається у залежності від того, чи є невласний інтеграл $\int\limits_1^{\infty}\mathrm{f(x)dx}$ збіжним або розбіжним.

Приклад. Дослідити збіжність ряду

$$\frac{1}{2\ln^2 2}+\frac{1}{3\ln^2 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}+\ldots$$

Функція $\mathrm{f(x)}=\frac{1}{(\mathrm{x}+1)\ln^2(x+1)}$ додатна, монотонно спадна в неперервна на проміжку $1<\mathrm{x}<\infty$. Дослідимо інтеграл

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}=\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_1^{A}\frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}=-\lim\limits_{A\to\infty}\left(\frac{1}{\ln(x+1)}-\frac{1}{\ln 2}\right)=\frac{1}{\ln 2}.$$

Таким чином, невласний інтеграл збіжний. Тобто за інтегральною ознакою Коші – Маклорена даний ряд також є збіжний.

При дослідженні збіжності числового ряду з додатними членами треба вміло підбирати відповідну ознаку. Рекомендується починати дослідження з перевірки виконання необхідної умови збіжності ряду. Якщо необхідна умова збіжності ряду не виконується, ряд розбігається. Якщо вона виконується, треба обов'язково перевірити, чи виконуються достатні умови, тобто використати або ознаку порівняння, або ознаку Даламбера, або радикальну ознаку Коші, або інтегральну ознаку Коші – Маклорена. Найпростіша з цих ознак - ознака Даламбера. У випадку, коли ця ознака не працює, треба подивитись, чи можливо підібрати ряд для порівняння. Це може бути знайомий ряд (наприклад, сума нескінченно спадної геометричної прогресії, гармонійний ряд і т.и.), або ряд, який дослідити легше, ніж даний. Якщо легко знайти корінь ступеня *n* із a_n, бажано використати радикальну ознаку Коші. Якщо ви можете легко інтегрувати a_n, як функцію *n*, то найкращий вибір – це інтегральна ознака Коші – Маклорена.

Запитання для самоперевірки

1. Сформулювати три теореми про властивості збіжних рядів з додатними членами.
2. Необхідні і достатні умови збіжності ряду.
3. Сформулювати теореми порівняння.
4. Сформулювати ознаки Даламбера, Коші (радикальний), Коші – Маклорена (інтегральний).

Домашнє завдання

1. №№2778, 2754, 2782, 2783, 2760, 2777, 2757, 2763, 2764, 2766, 2767, 2769, 2740, 2771, 2748, 2781, 2752*, 2745* [3].

3. ЗНАКОЗМІННІ РЯДИ. АБСОЛЮТНА ТА УМОВНА ЗБІЖНІСТЬ РЯДУ. ОЗНАКА ЛЕЙБНІЦА. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Ряд вигляду $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots$, де $u_n > 0$ (n=1, 2, 3, …) є ряд, знаки членів якого чергуються.

Ознака Лейбніца. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ збігається, якщо виконуються дві умови:

$$1)\ u_1 > u_2 > u_3 > \ldots \quad \text{і} \quad 2)\ \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Якщо деякий ряд задовольняє ознаці Лейбніца, то його називають збіжним умовно.

Знакозмінним рядом називається ряд, членами якого є числа довільного знаку. Такий ряд із довільним чергуванням знаків його членів

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots.$$

збігається, якщо збігається ряд

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots$$

У цьому випадку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається абсолютно збіжним.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається абсолютно, то ряд, одержаний після будь-якої перестановки його членів, буде збігатися абсолютно і мати ту ж саму суму, що і первісний ряд.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається умовно, то при перестановці нескінченної кількості його членів сума ряду може змінитися. А в деяких випадках при відповідній перестановці членів умовно збіжного ряду можна одержати розбіжний ряд.

Приклади. 1. Дослідити збіжність знакозмінного ряду:

$$\frac{\sin\alpha}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \ldots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + \ldots.$$

Складемо ряд із абсолютних величин членів цього ряду:

$\left|\frac{\sin\alpha}{1^2}\right| + \left|\frac{\sin 2\alpha}{2^2}\right| + \left|\frac{\sin 3\alpha}{3^2}\right| + \ldots + \left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right| + \ldots$. Це ряд з додатними членами. Має місце нерівність $\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - збіжний. Отже за теоремою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|$ теж збіжний, а значить досліджуваний ряд збігається абсолютно.

Рекомендується завжди починати дослідження знакозмінних рядів з перевірки, чи має місце абсолютна збіжність. У теорії доведено, що абсолютна збіжність сильніша, ніж умовна: якщо ряд збігається абсолютно, для нього завжди виконуються умови ознаки Лейбніца. Лише якщо абсолютної збіжності немає, перевіряємо, чи є умовна, тобто чи задовольняє ряд ознаці Лейбніца. Ряд вважається розбіжним, якщо він не має навіть умовної збіжності.

2. Дослідити збіжність ряду: $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \ldots$.

Складемо ряд з абсолютних величин членів даного ряду. Одержимо ряд з додатними членами:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$

Ми одержали узагальнений гармонійний ряд з показником $\lambda=\frac{1}{2}$. Це розбіжний ряд. Отже ряд з абсолютних величин членів даного ряду розбіжний. У той же час умови ознаки Лейбніца виконуються:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0;\quad \frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}\quad (n=1,2,3,\ldots).$$

Таким чином, даний ряд збігається умовно.

Запитання для самоперевірки

1. Який ряд називається знакозмінним?
2. Дайте визначення абсолютної і умовної збіжності ряду.
3. В чому полягає ознака Лейбніца?
4. У якій послідовності доцільно аналізувати поведінку знакозмінних рядів?

Домашнє завдання

№№2790, 2791, 2782, 2794, 2795, 2796, 2797 [3].

4. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

Ряд $u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$, члени якого – функції від *x*, називається функціональним рядом. Сукупність значень *x*, для яких функції $u_1(x), u_2(x),\ldots,u_n(x),\ldots$ визначені і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ - збігається, називають областю збіжності функціонального ряду. Областю збіжності функціонального ряду частіше всього буває деякий проміжок осі *Ox*.

Кожному значенню з області збіжності X відповідає певне значення величини $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$. Цю величину, що є функцією *x*, будемо називати сумою функціонального ряду і позначати її через $S(x)$.

Представимо $S(x)$ у вигляді $S(x)=S_n(x)+R_n(x)$, де $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$,

$\mathrm{R_n}(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$. ($R_n(x)$ - залишок функціонального ряду).

Збіжний функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається рівномірно збіжним у деякий області X, якщо для кожного скільки завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке ціле додатне число N, що при $n > N$ виконується нерівність $|R_n(x)| < \varepsilon$ для усякого x з області *X.* Корисно мати на увазі, що сума S(x) рівномірно збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ у області *X,* де $\mathrm{u_n}(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ - неперервні функції, є неперервна функція.

Сформулюємо достатню ознаку рівномірної збіжності – ознаку Вейерштрасса.

Якщо функції $\mathrm{u}_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ у деякій області X не перевищують за абсолютною величиною додатних чисел $\mathrm{a}_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, причому числовий ряд $\mathrm{a}_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ збігається, то функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в цій області збігається рівномірно.

Функціональний ряд вигляду

$\mathrm{a}_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \ldots + a_n(x - a)^n + \ldots$, де $a, a_1, a_2, \ldots, a_n$ - дійсні числа називається степеневим.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд збігається при $x = x_0$, то він буде збігатись (і при цьому абсолютно) при всякому значенні *x,* що задовольняє нерівність

$$|x - a| < |x_0 - a|.$$

Одним з наслідків теореми Абеля є факт існування для всякого степеневого ряду *інтервалу збіжності* с центром у точці *a* $\{|\mathrm{x} - \mathrm{a}| < R \text{ або } \mathrm{a} - \mathrm{R} < \mathrm{x} < \mathrm{a} + \mathrm{R}\}$, у якому степеневий ряд збігається абсолютно і за межами якого розбігається. На кінцях інтервалу збіжності (у точках $\mathrm{x} = \mathrm{a} \pm \mathrm{R}$) різні степеневі ряди поводять себе по-різному: деякі збігаються абсолютно на обох кінцях, інші або збігаються умовно на обох кінцях, або на одному з них збігаються умовно, а на другому розбігаються, також зустрічаються ряди, які розбігаються на обох кінцях.

Число R – половина довжини інтервалу збіжності – називається радіусом збіжності степеневого ряду.

У деяких випадках радіус збіжності може дорівнювати нулюві або нескінченності.

Якщо $R = 0$, то степеневий ряд збігається тільки при $x = a$, якщо $R = \infty$, то ряд збігається на усій числовій осі.

Для розшуку інтервалу і радіусу збіжності степеневого ряду можна використовувати один з наступних способів:

1. Якщо серед коефіцієнтів ряду $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ немає рівних нулю (тобто ряд містить усі цілі додатні ступені різниці $(x - a)$), то $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$,

2. Якщо $a_0 + a_1(x-a)^p + a_2(x-a)^{2p} + \ldots + a_n(x-a)^{np} + \ldots$ де p – деяке ціле додатне число, то

$$R = \sqrt[n]{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}.$$

3. Якщо серед коефіцієнтів ряду є рівні нулю і послідовність показників ступенів $(x - a)$, що залишились, довільна, то радіус збіжності можна находити за формулою:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}},$$

в який використовуються тільки значення a_n, що відмінні від нуля. (Зауважимо, що ця формула може бути використана у випадках 1) і 2).

4. В усіх випадках інтервал збіжності можна знаходити, використовуючи ознаку Даламбера або радикальну ознаку Коші до ряду, складеному із абсолютних величин членів даного ряду.

Записавши ряд у вигляді $u_0(x) + u_1(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$(де $u_o = a_0, u_n(x) = a_n(x-a)^N$, залежність N від n будь- яка, a_n - це коефіцієнт при $(x - a)^n$, а коефіцієнт n – ого члена ряду), знаходимо інтервал збіжності із нерівностей: $a)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < 1$ *або* $б)\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} < 1.$

Властивості степеневих рядів. Ряди, що одержані шляхом операцій диференціювання і інтегрування степеневого ряду, мають той же інтервал збіжності, що і даний ряд, і їх сума в межах інтервалу збіжності дорівнює відповідно похідній і інтегралу від суми даного ряду.

Якщо

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n, \text{ òîä³}$$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n (x-a)^{n-1}, \qquad -R < x - a < R.$$

$$\int_0^x S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (x-a)^{n+1}}{n+1}$$

Операцію диференціювання і інтегрування можна проводити над степеневим рядом скільки завгодно разів. Таким чином, сума степеневого ряду у межах його інтервалу збіжності нескінченно диференційована.

Приклади. Знайти інтервали збіжності степеневих рядів і дослідити їх збіжність на кінцях інтервалів збіжності.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{3^{n}}.$

Парні коефіцієнти дорівнюють нулю. Тому для знаходження інтервалу збіжності доцільно застосувати ознаку Даламбера.

$$u_n=\frac{x^{2n-1}}{3^n},\quad u_{n+1}=\frac{x^{2n+1}}{3^{n+1}},\quad R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}3^n}{3^{n+1}x^{2n-1}}\right|=\left|\frac{x^2}{3}\right|<1.$$

Згідно з ознакою Даламбера ряд збіжний, якщо $\left|x^2\right|<3,$ *або* $|x|<\sqrt{3}.$ Таким чином, радіус збіжності даного ряду дорівнює $R=\sqrt{3},$ а інтервал збіжності $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}.$ Дослідимо поведінку ряду на кінцях інтервалу збіжності. При $x=\sqrt{3}$ одержуємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3}},$ при $x=-\sqrt{3}$ - ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{3}}.$ Обидва ці ряди розбіжні, тому що для них не виконується необхідна умова збіжності рядів. Отже інтервал збіжності – відкритий: $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}.$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}.$ Маємо $a_n=\frac{1}{n\cdot 2^n},\quad a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}.$ Знайдемо радіус збіжності:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^{n+1}}{n\cdot 2^n}=2.$$

Звідси $-2<x+1<2,$ $-3<x<1.$ При $x=-3$ маємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n},$ який збігається умовно (за ознакою Лейбніца), при $x=3$ одержимо гармонійний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$ що розбігається. Остаточно маємо такий інтервал збіжності: $-3\le x<1.$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n\cdot(x-2)^{2n}.$

У даному випадку маємо: $a_{\text{n}} = 0$ при $n = 2k - 1$ *і* $a_n = \left(\dfrac{k+1}{2k+1}\right)^k$ при $n = 2k$. Для розшуку радіуса збіжності доцільно скористатись формулою:

$$\text{R} = \frac{1}{\lim\limits_{\text{n}\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Знаходимо:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[2k]{\left(\dfrac{k+1}{2k+1}\right)^k}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{2k+1}{k+1}} = \sqrt{2}.$$

Дослідимо ряд на кінцях інтервалу збіжності. Нехай $x - 2 = \sqrt{2}$. Одержимо числовий ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k \cdot 2^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k+\frac{1}{2}}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2k+1}\right)^k.$$

Але $\lim\limits_{k\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2k+1}\right)^k = \sqrt{e} \neq 0.$ Таким чином, при $x - 2 = \sqrt{2}$ ряд розбігається. Те ж саме буде при $x - 2 = -\sqrt{2}$. Тому область збіжності даного ряду $2 - \sqrt{2} < \text{x} < 2 + \sqrt{2}.$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(\text{x}-1)^{n(n+1)}}{n^n}.$

Застосуємо радикальну ознаку Коші: $\text{u}_{\text{n}} = \dfrac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}.$ $\sqrt[n]{|u_n|} = \dfrac{|x-1|^{n+1}}{n}.$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad |x-1| < 1 \\ \infty & \textit{при} \quad |x-1| > 1. \end{cases}$$

Таким чином, ряд збігається, якщо $|\text{x} - 1| < 1$, тобто при $0 < x < 2.$

5. Знайти суму ряду $1 + 2\text{x} + 3\text{x}^2 + 4x^3 + \ldots \quad (|x| < 1)$ шляхом диференціювання ряду $1 + \text{x} + \text{x}^2 + x^3 + \ldots \quad (|x| < 1).$

Застосуємо формулу суми членів нескінченної спадної геометричної прогресії:

$S=\dfrac{a}{1-q}$. Одержуємо: $1+x+x^2+x^3+\ldots=\dfrac{1}{1-x}$.

Залишається знайти похідну останнього співвідношення:

$$1+2x+3x^2+4x^3+\ldots=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

Завдання для самоперевірки

1. Сформулюйте визначення функціонального ряду, степеневого ряду.
2. Що представляє собою радіус збіжності? Які є способи розшуку радіуса збіжності степеневого ряду?
3. Дайте визначення інтервалу збіжності степеневого ряду. Як досліджуються степеневі ряди на кінцях інтервалу збіжності?

Домашнє завдання

Дослідити збіжність рядів: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+3)^n}{n\cdot 4^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{3n+1}$.

5. РЯДИ ТЕЙЛОРА І МАКЛОРЕНА

Усяка функція, що має безліч похідних у інтервалі $|x-x_0|<r$, може бути розкладена у цьому інтервалі у збіжний до неї нескінченний ряд Тейлора

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

якщо у цьому інтервалі виконується умова $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0$ ($R_n(x)-$ це, так званий, залишковий член формули Тейлора, $c=x_0+\theta(x-x_0)$, $0<\theta<1$).

При $x_0=0$ одержуємо ряд Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}+\ldots$$

Якщо у деякому інтервалі, що містить точку x_0, при будь-якому n виконується нерівність $\left|f^{(n)}(x)\right| < M$, де M - додатна стала, то $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ і функція f(x) розкладається у ряд Тейлора.

Наведемо відомі розклади у ряди Тейлора наступних функцій:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{(n)}}{n!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^{(n-1)} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \ -\infty < x < \infty.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^{(n-1)} x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \ -\infty < x < \infty.$$

$$shx = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \ -\infty < x < \infty.$$

$$ch x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, -\infty < x < \infty.$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots.$$

Останнє співвідношення виконується:

$$\text{при } \ m > 0, \text{якщо } -1 < x \le 1;$$
$$\text{при } \ -1 < m < 0, \text{якщо } -1 < x \le 1;$$
$$\text{при } \ m < -1, \text{якщо } -1 < x < 1.$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \ldots, \quad -1 < x \le 1.$$

$$arctg\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots, \quad -1 \le x \le 1.$$

Приклади. 1. Розкласти у степеневий ряд функцію $f(x) = 2^x$.

Розв'язок. Знайдемо значення функції і її похідних при $x = 0$.

$$f(x) = 2^x \quad \ldots\ldots \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = 2^x \ln 2 \quad \ldots\ldots \quad f'(0) = \ln 2$$

$$f''(x) = 2^x \ln^2 2 \ldots\ldots \quad f''(0) = \ln^2 2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(x) = 2^x \ln^n 2 \ldots\ldots \quad f^{(n)}(0) = \ln^n 2.$$

Так як $0 < \ln 2 < 1$, то при фіксованому x має місце нерівність $\left|f^{(n)}(x)\right| < 2^x$ при усіх *n*. Таким чином, шуканий ряд у даному випадку

$$2^x = 1 + x \cdot \ln 2 + \frac{x^2 \ln^2 2}{2!} + \frac{(x \cdot \ln 2)^3}{3!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Цей же ряд можна було б одержати, користуючись відомим розкладом для e^x, у якому треба x замінити на $x \ln 2$. (Користуємось відомим співвідношенням $a^x = e^{x \ln a}, \quad a > 0$).

2. Розкласти $\frac{1}{x}$ у ряд по ступенях $x - 2$.

Розв'язок. Скористаємось рівністю $\frac{1}{x} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{x-2}{2}}$. Праву частину рівності можна розглядати як суму нескінченної спадної геометричної прогресії з першим членом $a = \frac{1}{2}$ і знаменником $q = -\frac{x-2}{2}$. Звідси маємо:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x-2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-2}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-2}{2}\right)^3 + \ldots, \text{або}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3 + \ldots.$$

Збіжність ряду має місце, якщо $\left|\frac{x-2}{2}\right| < 1$, або $0 < x < 4$.

3. Розкласти у степеневий ряд функцію $f(x) = \sin^2(x)$.

Розв'язок. Розклад можна одержати двома шляхами. По-перше, використовуючи стандартну схему, пов'язану з диференціюванням даної функції $n+1$ раз, фіксуванням одержаних похідних у точці $x = 0$ і підставляючи одержані значення у формулу Маклорена. По-друге, є більш раціональний підхід, пов'язаний із використанням відомих формул.

У рівності $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ замінюємо функцію $\cos 2x$ розкладом у степеневий ряд:

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \ldots.$$

Виконавши неважкі перетворення, одержимо бажаний розклад.

Отже, якщо розклад у степеневий ряд Тейлора або Маклорена існує, одержати його неважко, якщо використати відповідні формули безпосередньо, або скористатися відомими розкладами і, якщо необхідно, потрібними формулами із тригонометрії.

Запитання для самоперевірки

1. Яким умовам повинна задовольняти функція, щоб її можна було розкласти у ряд Тейлора або Маклорена?
2. Розкласти функції у ряди Маклорена, користуючись відомими розкладами:

   а) $f(x) = \ln(x+3)$; б) $f(x) = \sqrt[3]{27 - x^3}$; в) $f(x) = x \cdot e^{-3x}$.

6.ЗАСТОСУВАННЯ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ ДО НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ, ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ФУНКЦІЙ І РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Зауважимо, що у цьому розділі корисно мати на увазі формули для розкладу у степеневі ряди функцій

$$e^x, \sin x, \cos x, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x, (1+x)^m, \ln(1+x), arctg\, x.$$

Для обчислення логарифмів корисна формула

$$\ln(1+t) = \ln t + 2\left[\frac{1}{2t+1} + \frac{1}{3(2t+1)^3} + \frac{1}{5(2t+1)^5} + \ldots\right].$$

Ряд у правій частині цієї рівності швидко збігається.

Для обчислення наближеного значення функції f(x) у її розкладі у степеневий ряд залишаються перші n членів (n - кінцева величина), а інші відкидаються. Для оцінки погрішності знайденого наближеного значення треба оцінити суму відкинутих членів. Якщо даний ряд знакопостійний, то ряд, зіставлений з відкинутих членів, порівнюють із нескінченною спадною геометричною прогресією. У випадку знакозмінного ряду, члени якого задовольняють ознаці Лейбніца, використовується оцінка $|R_n| < u_{n+1}$, де u_{n+1} - перший з відкинутих членів.

Приклади. 1. Використовуючи розклад у ряд функції $\cos x$, обчислити $\cos 18^\circ$ з точністю 0,0001.

Розв’язок.

$$\cos 18^\circ = \cos\frac{\pi}{10} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^4 - \ldots$$

$$\frac{\pi}{10} = 0{,}31416, \left(\frac{\pi}{10}\right)^2 = 0{,}09870, \left(\frac{\pi}{10}\right)^4 = 0{,}00974.$$

Достатньо взяти три члени ряду, тому що $\frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^6 < 0{,}0001.$ Отже

$$\cos 18^\circ \approx 1 - \frac{0{,}09870}{2} + \frac{0{,}00974}{24}, \quad \cos 18^\circ \approx 0{,}9511.$$

2. Обчислити $\sqrt[3]{130}$ із точністю до 0,001.

Розв’язок. Тому що 5^3 є найближчий до числа 130 куб цілого числа, то доцільно число 130 представити у вигляді суми : 130 = 5^3 +5.

$$\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{5^3+5} = 5\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{25}} = 5(1+0{,}04)^{1/3} =$$

$$= 5\cdot\left[1 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}04 + \frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}\cdot 0{,}0016 + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{3!}\cdot 0{,}000064 + \ldots\right] =$$

$$= 5 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}2 - \frac{1}{9}\cdot 0{,}008 + \frac{5}{81}\cdot 0{,}00032 - \ldots$$

Четвертий член менший за 0,001, тому його та слідуючі за ним члени можна відкинути. Отже, $\sqrt[3]{130} \cong 5 + 0{,}0667 - 0{,}0009 = 5{,}066.$

3. Обчислити $\ln 1{,}04$ з точністю до 0,0001.

Розв’язок. Скористаємось розкладом $\ln(1+x)$.

$$\ln 1{,}04 = \ln(1+0{,}04) = 0{,}04 - \frac{0{,}04^2}{2} + \frac{0{,}04^3}{3} - \frac{0{,}04^4}{4} + \ldots =$$

$$= 0{,}04 - 0{,}0008 + 0{,}000021 - 0{,}00000064 + \ldots$$

$$\ln 1{,}04 \cong 0{,}0392.$$

4. Обчислити з точністю до 0,0001 визначений інтеграл $\int\limits_0^{1/2} \frac{1-\cos x}{x^2}dx$.

Розв’язок. Замінимо у підінтегральному виразі cosx його розкладом у степеневий ряд

$$\int_0^{1/2}\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\int_0^{1/2}\frac{1-1+\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^4}{4!}+\dfrac{x^6}{6!}-\ldots}{x^2}dx=\int_0^{1/2}\left(\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^4}{6!}-\ldots\right)dx=$$

$$=\left(\frac{1}{2!}x-\frac{x^3}{4!\cdot 3}+\frac{x^5}{6!\cdot 5}-\ldots\right)\Bigg|_0^{1/2}=\frac{1}{2!\cdot 2}-\frac{1}{4!\cdot 3\cdot 2^3}+\frac{1}{6!\cdot 5\cdot 2^5}-\ldots\cong 0{,}25-0{,}0017.$$

Таким чином,

$$\int_0^{1/2}\frac{1-\cos x}{x^2}dx\cong 0{,}2483.$$

5. Обчислити з точністю 0,001 визначений інтеграл $\int_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx.$

Розв’язок.

$$\int_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx=\int_0^{0,1}\frac{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots}{x}dx=$$

$$=\int_0^{0,1}\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\ldots\right)dx=\left(x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{16}x^4+\ldots\right)\Bigg|_0^{0,1}=$$

$$=0{,}1-\frac{1}{4}\cdot 0{,}01+\frac{1}{9}\cdot 0{,}001-\ldots\;.\quad \int_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx.\cong\ 0\ 098.$$

Розглянемо застосування степеневих рядів для розв’язування диференціальних рівнянь.

У деяких випадках, коли інтегрування диференціальних рівнянь у елементарних функціях неможливо, можна шукати розв’язок такого рівняння у вигляді степеневого ряду

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^n.$$

Невизначені коефіцієнти C_n (n =0, 1, 2, …) знаходяться за допомогою підстановки цього ряду у дане рівняння і прирівнювання коефіцієнтів при однакових ступенях різниці $x-x_0$ у обох частинах одержаної рівності. Якщо удається визначити усі коефіцієнти, то одержаний ряд визначає розв’язок в усій області своєї збіжності.

У тих випадках, коли для рівняння $y'=f(x)$ треба розв’язати задачу Коші при початкових умовах $y\big|_{x=x_0}=y_0,$ розв’язок можна шукати за допомогою ряду Тейлора:

$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$, де $y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=f(x_0,y_0)$, а інші похідні $y^{(n)}(x_0)\ (n=2,3,\ldots)$ знаходяться послідовним диференціюванням даного рівняння і підстановкою замість x, y, y' і т.п. - x_0, y_0, y_0' і значень інших знайдених похідних. Аналогічно за допомогою ряду Тейлора можна інтегрувати і рівняння вищих порядків.

Приклади.

1. $$y'' - x^2 y = 0.$$

Розв'язок. Будемо шукати розв'язок цього рівняння у вигляді ряду

$y=C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots+C_nx^n+\ldots$. Підставляємо цей ряд і його другу похідну у дане рівняння:

$$[2\cdot C_2+3\cdot 2C_3\,x+4\cdot 3C_4x^2+\ldots+(n+2)(n+1)C_{n+2}x^n+\ldots]-$$
$$-x^2[C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots+C_nx^n+\ldots]=0.$$

Зберемо члени з однаковими ступенями *x*:

$$2\cdot xC_2+3\cdot 2C_3x^2+\sum_{n=0}^{\infty}[(n+4)(n+3)C_{n+4}-C_n]x^{n+2}=0$$

Прирівнюючи нулю усі коефіцієнти одержаного ряду (щоб рівняння перетворилось у тотожність), маємо:

$$C_2=C_3=0,\quad C_{n+1}=\frac{C_n}{(n+3)(n+4)}\quad (n=0,1,\ldots).$$

Останнє співвідношення дозволяє найти послідовно коефіцієнти шуканого розкладу (C_0 і C_1 залишаються довільними і грають роль довільних сталих інтегрування):

$$C_{4k}=\frac{C_0}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\ldots(4k-1)4k};\quad C_{4k+1}=\frac{C_1}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\ldots 4k(4k+1)}.$$

$$C_{4k+2}=C_{4k+3}=0.\quad (k=0,1,2,\ldots).$$

Таким чином, знаходимо:

$$y=C_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{4k}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\ldots(4k-1)4k}+C_1\sum\frac{x^{4k+1}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\ldots 4k(4k+1)}.$$

Одержані ряди збігаються на усій числовій осі і визначають два лінійно незалежних частинних розв'язки даного рівняння.

2. Знайти шість перших, не рівних нулю, членів розкладу у ряд Тейлора розв'язку рівняння $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$.

Розв'язок. Із даного рівняння і початкової умови одержуємо:

$$y'(0) = 0^2 + 1^2 = 1.$$

Диференціюючи дане рівняння, знаходимо послідовно:

$$y'' = 2x + 2yy', \quad y''' = 2 + 2y'^2 + 2yy'', \quad y^{IV} = 6y'y'' + 2yy''',$$
$$y^{V} = 6y''^2 + 8y'y''' + 2yy^{IV}.$$

Підставляючи $x = 0$ і використовуючи значення $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, знаходимо послідовно:

$$y''(0) = 2, \quad y'''(0) = 8, \quad y^{IV}(0) = 28, \quad y^{V}(0) = 144.$$

Таким чином, шуканий розв'язок має вигляд:

$$y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{2x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{28x^4}{4!} + \frac{144x^5}{5!} + \dots$$

3. $y'' = x + y^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

Знайти перші чотири (відмінних від нуля) члени розкладу .
Розв'язок. Диференціюючи дане рівняння, маємо:

$$y''' = 1 + 2yy', \quad y^{IV} = 2yy'' + 2y'^2, \quad y^{V} = 2yy''' + 6y'y'',$$
$$y^{VI} = 2yy^{IV} + 8y'y^{IV} + 6y''^2.$$

При $x = 0$ одержуємо:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 1,$$
$$y^{IV}(0) = 2, \quad y^{V}(0) = 0, \quad y^{VI}(0) = 16.$$

Отже

$$y = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{16x^6}{6!} + \ldots = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + \ldots.$$

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

ВАРІАНТ 1

1. Записавши загальний член ряду, дослідити ряд на збіжність:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\ldots$$

2. Дослідити збіжність рядів. Використати ознаки Даламбера, Коші (радикальну) і інтегральну ознаку Маклорена-Коші.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{20^{n}}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{n}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

3. Дослідити збіжність знакозмінних рядів. Встановити, чи має місце абсолютна збіжність, умовна збіжність або розбіжність ряду.

а) $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2^{n}}{4n^{2}-1}$.

4. Знайти інтервал збіжності ряду і дослідити збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності.

а) $\frac{x}{\sqrt{2}\cdot 3}-\frac{x^{2}}{\sqrt{2^{3}}\cdot 7}+\frac{x^{3}}{\sqrt{2^{5}}\cdot 11}-\ldots$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{3n}}{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x+3)^{n}}{n^{n}}$.

5. а) Обчислити інтеграл з точністю до 0,001, б) Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int\limits_{0}^{0,1}e^{-6x^{2}}dx$; б) $\int\limits_{0}^{x}\frac{\ln(1+3x)}{x}dx$.

6. Знайти перші чотири члени розкладу у степеневий ряд рішення диференціального рівняння:

$y'=y-x;\quad y(0)=1.$

ВАРІАНТ 2

1. Записавши загальний член ряду, дослідити ряд на збіжність: $\frac{1}{3}+\frac{2}{7}+\frac{3}{11}+\ldots$
2. Дослідити збіжність рядів. Використати ознаки Даламбера, Коші (радикальну) і інтегральну ознаку Маклорена-Коші.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{2^{n}+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln^2 n+1)}$.

3. Дослідити збіжність знакозмінних рядів. Встановити, чи має місце абсолютна збіжність, умовна збіжність або розбіжність ряду.

а) $\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{2^n}$.

4. Знайти інтервал збіжності ряду і дослідити збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності.

а) $\frac{2x}{3}-\frac{2^2x^2}{5\cdot 2^2}+\frac{2^3x^3}{7\cdot 3^3}-\ldots$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n-1}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^4x^{2n}}{2n+1}$.

5. а) Обчислити інтеграл з точністю до 0,001, б) Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int\limits_0^1 \sin(100x^2)dx$; б) $\int\limits_0^x \frac{e^{x^2}}{x^2}dx$.

6. Знайти перші чотири члени розкладу у степеневий ряд рішення диференціального рівняння:

$y' = x+\frac{1}{y};\quad y(0)=1.$

ВАРІАНТ 3

1. Записавши загальний член ряду, дослідити ряд на збіжність:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\ldots$

2. Дослідити збіжність рядів. Використати ознаки Даламбера, Коші (радикальну) і інтегральну ознаку Маклорена-Коші.

а) $\sum\limits_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2-1}$.

3. Дослідити збіжність знакозмінних рядів. Встановити, чи має місце абсолютна збіжність, умовна збіжність або розбіжність ряду.

а) $\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\ldots$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{2n}$.

4. Знайти інтервал збіжності ряду і дослідити збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності.

а) $\frac{3x+2}{1\cdot 2}-\frac{(3x+2)^2}{3\cdot 2^2}+\frac{(3x+2)^3}{5\cdot 2^3}-\ldots.;$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2x^n}{(2n!)^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{n-1}\cdot x^{n-1}$.

5. а) Обчислити інтеграл з точністю до 0,001, б) Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int\limits_0^1 \cos\mathrm{x}^2 dx$; б) $\int\limits_0^x (x-1)e^{x^2}dx$.

6. Знайти перші чотири члени розкладу у степеневий ряд рішення диференціального рівняння:

$\mathrm{y}'=\mathrm{y}+\mathrm{x}\mathrm{e}^{\mathrm{y}};\quad \mathrm{y}(0)=0.$

ВАРІАНТ 4

1. Записавши загальний член ряду, дослідити ряд на збіжність:

$1+\frac{3}{4}+\frac{5}{7}+\ldots$

2. Дослідити збіжність рядів. Використати ознаки Даламбера, Коші (радикальну) і інтегральну ознаку Маклорена-Коші.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$.

3. Дослідити збіжність знакозмінних рядів. Встановити, чи має місце абсолютна збіжність, умовна збіжність або розбіжність ряду.

а) $\frac{\sqrt{1}}{101}-\frac{\sqrt{2}}{102}+\frac{\sqrt{3}}{103}+\ldots$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n+1}{2^{n+1}}$.

4. Знайти інтервал збіжності ряду і дослідити збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності.

а) $\frac{x-4}{1}-\frac{(x-4)^2}{3\cdot 2}+\frac{(x-4)^3}{5\cdot 2^2}-\ldots.;$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-5)^n}{n\cdot 3^n}$.

5. а) Обчислити інтеграл з точністю до 0,001, б) Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int_0^{0,5}\frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{1+\mathrm{x}^4}}$, б) $\int_0^x\frac{\cos x^3}{x}dx$.

6. Знайти перші чотири члени розкладу у степеневий ряд рішення диференціального рівняння:

$y' = 2x+\cos y \quad y(0)=0.$

ВАРІАНТ 5

1. Записавши загальний член ряду, дослідити ряд на збіжність:

$\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{4}{5}}+\sqrt{\frac{6}{7}}+\ldots$

2. Дослідити збіжність рядів. Використати ознаки Даламбера, Коші (радикальну) і інтегральну ознаку Маклорена-Коші.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{(2n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{e^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

3. Дослідити збіжність знакозмінних рядів. Встановити, чи має місце абсолютна збіжність, умовна збіжність або розбіжність ряду.

а) $\frac{1}{1}-\frac{2}{7}+\frac{3}{13}+\ldots$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2}{3^n}.$

4. Знайти інтервал збіжності ряду і дослідити збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності.

а) $\frac{3}{4}x+\frac{5}{7}x^2+\frac{7}{10}x^3 \ldots.;$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n\cdot 5^n};$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}x^{2n-1}}{n^2+1}.$

5. а) Обчислити інтеграл з точністю до 0,001, б) Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int_0^{0,1}\frac{1-e^{-2x}}{x}dx;$ б) $\int_0^x \frac{\ln x}{x^2}dx.$

6. Знайти перші чотири члени розкладу у степеневий ряд рішення диференціального рівняння:

$y' = x^2 + y^3; \quad y(1)=1.$

ВАРІАНТ 6

1. Записавши загальний член ряду, дослідити ряд на збіжність:

$\frac{2}{3}+\frac{6}{5}+\frac{10}{7}-\ldots$

2. Дослідити збіжність рядів. Використати ознаки Даламбера, Коші (радикальну) і інтегральну ознаку Маклорена-Коші.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n\cdot 2^n}};$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n;$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}.$

3. Дослідити збіжність знакозмінних рядів. Встановити, чи має місце абсолютна збіжність, умовна збіжність або розбіжність ряду.

а) $\left(\frac{3}{1}\right)^1-\left(\frac{4}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^3-\ldots$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n\cdot n!}$.

4. Знайти інтервал збіжності ряду і дослідити збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності.

а) $\frac{2x}{3^2}-\frac{5x^3}{3^4}+\frac{8x^5}{3^6}\ldots.;$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n x^{2n-1}$.

5. а) Обчислити інтеграл з точністю до 0,001, б) Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int_0^1\frac{\ln(1+\frac{x}{5})}{x}dx$; б) $\int_0^x\sqrt[5]{(1+12x^5)}dx$.

6. Знайти перші чотири члени розкладу у степеневий ряд рішення диференціального рівняння:

$y''=xy'-y^2;\quad y(0)=1,\quad y'(0)=2.$

ВАРІАНТ 7

1. Записавши загальний член ряду, дослідити ряд на збіжність:

$\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{5}{4}}+\sqrt{\frac{8}{5}}+\ldots$

2. Дослідити збіжність рядів. Використати ознаки Даламбера, Коші (радикальну) і інтегральну ознаку Маклорена-Коші.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$.

3. Дослідити збіжність знакозмінних рядів. Встановити, чи має місце абсолютна збіжність, умовна збіжність або розбіжність ряду.

а) $\frac{1}{101}-\frac{1}{201}+\frac{1}{301}+\ldots$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n n!}$.

4. Знайти інтервал збіжності ряду і дослідити збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності.

а) $\frac{2}{3^2}x - \frac{5}{3^4}x^3 + \frac{8}{3^6}x^5$ ....;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n\cdot 9^n}$.

5. а) Обчислити інтеграл з точністю до 0,001, б) Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int_0^{1,5}\frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$; б) $\int_0^x \cos\left(\frac{3x}{2}\right)^2 dx$.

6. Знайти перші чотири члени розкладу у степеневий ряд рішення диференціального рівняння:

$y'' = (y')^2 + xy$; $y(0) = 4$, $y'(0) = -2$.

ВАРІАНТ 8

1. Записавши загальний член ряду, дослідити ряд на збіжність:

$\frac{2}{3} + \frac{6}{5} + \frac{10}{7} + \ldots$

2. Дослідити збіжність рядів. Використати ознаки Даламбера, Коші (радикальну) і інтегральну ознаку Маклорена-Коші.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{(n+1)^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-3}{3n+1}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+3)}$.

3. Дослідити збіжність знакозмінних рядів. Встановити, чи має місце абсолютна збіжність, умовна збіжність або розбіжність ряду.

а) $\frac{2}{2} - \frac{3}{5} + \frac{4}{10} + \ldots$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{n^n}$.

4. Знайти інтервал збіжності ряду і дослідити збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності.

а) $1 + 2x + (2x)^2 + (2x)^3$ ....;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$.

5. а) Обчислити інтеграл з точністю до 0,001, б) Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int_0^{0,2}\sin(25x^2)dx$; б) $\int_0^x x^{30}\sin x^2 dx$.

6. Знайти перші чотири члени розкладу у степеневий ряд рішення диференціального рівняння:

$y' = y - x; \quad y(0) = 1.$

ВАРІАНТ 9

1. Записавши загальний член ряду, дослідити ряд на збіжність:

$\sqrt{\frac{2}{5}}+\sqrt{\frac{5}{7}}+\sqrt{\frac{8}{9}}+\ldots$

2. Дослідити збіжність рядів. Використати ознаки Даламбера, Коші (радикальну) і інтегральну ознаку Маклорена-Коші.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{2n}\sin^n\frac{1}{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln(n+3)}$.

3. Дослідити збіжність знакозмінних рядів. Встановити, чи має місце абсолютна збіжність, умовна збіжність або розбіжність ряду.

а) $\frac{1}{\sqrt{1\cdot2}}-\frac{1}{\sqrt{2\cdot3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot4}}+.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n-1)^2}$.

4. Знайти інтервал збіжності ряду і дослідити збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності.

а) $\frac{x}{1\cdot3^1}+\frac{x^2}{2\cdot3^2}+\frac{x^3}{3\cdot3^3}+\ldots.;$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^3x^{2n}}{3n+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot9^n}$.

5. а) Обчислити інтеграл з точністю до 0,001, б) Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int\limits_{0}^{0,2} e^{-3x^2}dx;$ б) $\int\limits_{0}^{x} x\cdot e^{-x^3}dx.$

6. Знайти перші чотири члени розкладу у степеневий ряд рішення диференціального рівняння:

$y' = 2y + xe^{y};\quad y(0) = 1.$

ВАРІАНТ 10

1. Записавши загальний член ряду, дослідити ряд на збіжність:

$$\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\ldots$$

2. Дослідити збіжність рядів. Використати ознаки Даламбера, Коші (радикальну) і інтегральну ознаку Маклорена-Коші.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^2+1};$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^n};$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+3)}.$

3. Дослідити збіжність знакозмінних рядів. Встановити, чи має місце абсолютна збіжність, умовна збіжність або розбіжність ряду.

а) $\frac{1}{2}-\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}.$

4. Знайти інтервал збіжності ряду і дослідити збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності.

а) $\frac{x}{2^2}+\frac{x^2}{2^3}+\frac{x^3}{2^4}+\ldots.;$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4n+1};$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n(x+3)^n.$

5. а) Обчислити інтеграл з точністю до 0,001, б) Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int\limits_{0}^{0,5} \cos(4x^2)dx;$ б) $\int\limits_{0}^{x} \frac{1-e^{-x^2}}{x}dx.$

6. Знайти перші чотири члени розкладу у степеневий ряд рішення диференціального рівняння:

$y' = x + \cos y; \quad y(0) = 0.$

ВАРІАНТ 11

1. Записавши загальний член ряду, дослідити ряд на збіжність:

$\frac{2}{3} + \frac{4}{4} + \frac{6}{5} + \ldots$

2. Дослідити збіжність рядів. Використати ознаки Даламбера, Коші (радикальну) і інтегральну ознаку Маклорена-Коші.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n - 3}{\sqrt{n \cdot 3^n}};$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(2 + \frac{2}{n}\right)^n};$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100n + 2}.$

3. Дослідити збіжність знакозмінних рядів. Встановити, чи має місце абсолютна збіжність, умовна збіжність або розбіжність ряду.

а) $\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + .$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{6n - 5}.$

4. Знайти інтервал збіжності ряду і дослідити збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності.

а) $\frac{x}{\sqrt[3]{1^3 + 1}} + \frac{x^2}{\sqrt[3]{2^3 + 1}} + \frac{x^3}{\sqrt[3]{3^3 + 1}} + \ldots.;$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n + 1};$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n (x + 4)^n.$

5. а) Обчислити інтеграл з точністю до 0,001, б) Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}$; б) $\int_0^x e^{-3x^2}dx.$

6. Знайти перші чотири члени розкладу у степеневий ряд рішення диференціального рівняння:

$y' = y^3 + x^3;\quad y(1) = 1.$

ВАРІАНТ 12

1. Записавши загальний член ряду, дослідити ряд на збіжність:

$$\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{5}{7}} + \sqrt{\frac{9}{11}} + \ldots$$

2. Дослідити збіжність рядів. Використати ознаки Даламбера, Коші (радикальну) і інтегральну ознаку Маклорена-Коші.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(2n-1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+9}$.

3. Дослідити збіжність знакозмінних рядів. Встановити, чи має місце абсолютна збіжність, умовна збіжність або розбіжність ряду.

а) $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln^2 3} + \frac{1}{\ln^3 4} + .$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[5]{n+1}}$.

4. Знайти інтервал збіжності ряду і дослідити збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності.

а) $\frac{2x^0}{1!} + \frac{2^2 x}{2!} + \frac{2^3 x^2}{3!} + \ldots.;$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^{2n-1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{2n \cdot 4^n}$.

5. а) Обчислити інтеграл з точністю до 0,001, б) Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int_0^2 \frac{1-e^{-x}}{x} dx$; б) $\int_0^x \sin(12x^{3)} dx.$

6. Знайти перші чотири члени розкладу у степеневий ряд рішення диференціального рівняння:

$$y'' = y - y^2 x; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

ВАРІАНТ 13

1. Записавши загальний член ряду, дослідити ряд на збіжність:

$$1 + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{5}} + \ldots$$

2. Дослідити збіжність рядів. Використати ознаки Даламбера, Коші (радикальну) і інтегральну ознаку Маклорена-Коші.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1} \right)^{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2-4}$.

3. Дослідити збіжність знакозмінних рядів. Встановити, чи має місце абсолютна збіжність, умовна збіжність або розбіжність ряду.

а) $\frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \frac{1}{14} + .$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{n}$.

4. Знайти інтервал збіжності ряду і дослідити збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності.

а) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots.;$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^4 x^n}{4n-3}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1) \cdot 2^n}$.

5. а) Обчислити інтеграл з точністю до 0,001, б) Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int\limits_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{64+x^3}} dx$; б) $\int\limits_0^x \frac{1-e^{5x}}{x} dx$.

6. Знайти перші чотири члени розкладу у степеневий ряд рішення диференціального рівняння:

$y' = y + x; \quad y(1) = 1.$

ВАРІАНТ 14

1. Записавши загальний член ряду, дослідити ряд на збіжність:

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{7}{10} + \ldots$$

2. Дослідити збіжність рядів. Використати ознаки Даламбера, Коші (радикальну) і інтегральну ознаку Маклорена-Коші.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2n-1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \ldots (3n)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{10n+5} \right)^{n^2}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln^2(n+2)}$.

3. Дослідити збіжність знакозмінних рядів. Встановити, чи має місце абсолютна збіжність, умовна збіжність або розбіжність ряду.

а) $\frac{1}{1} - \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{2}} + \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{3}} + .$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

4. Знайти інтервал збіжності ряду і дослідити збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності.

а) $\frac{x}{1 \cdot 4} + \frac{x^2}{2 \cdot 4^2} + \frac{x^3}{3 \cdot 4^3} + \ldots.;$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^{2n+1}}{2n+3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (x-3)^n$.

5. а) Обчислити інтеграл з точністю до 0,001, б) Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int_0^{0,4} \sin\left(\frac{5x}{2} \right)^2 dx$; б) $\int_0^x \frac{\ln(1+x)}{x} dx$.

6. Знайти перші чотири члени розкладу у степеневий ряд рішення диференціального рівняння:

$y'' = y' + xy; \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -2.$

ВАРІАНТ 15

1. Записавши загальний член ряду, дослідити ряд на збіжність:

$$\frac{2}{7} + \frac{4}{9} + \frac{6}{11} + \ldots$$

2. Дослідити збіжність рядів. Використати ознаки Даламбера, Коші (радикальну) і інтегральну ознаку Маклорена-Коші.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{2^n(n-1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^{n+2}}{5^n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+4)\ln^3(n+4)}$.

3. Дослідити збіжність знакозмінних рядів. Встановити, чи має місце абсолютна збіжність, умовна збіжність або розбіжність ряду.

а) $\dfrac{1}{2\ln 2} - \dfrac{1}{3\ln 3} + \dfrac{1}{4\ln 4} + .$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{(n+1)\cdot 2^n}$.

4. Знайти інтервал збіжності ряду і дослідити збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності.

а) $-x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + \ldots.;$

б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^{2n-1}}{n\ln n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n!(x-1)^n}{3n^2}$.

5. а) Обчислити інтеграл з точністю до 0,001, б) Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int\limits_0^{1,5} \dfrac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}$; б) $\int\limits_0^{x} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{1-5x^3}}$.

6. Знайти перші чотири члени розкладу у степеневий ряд рішення диференціального рівняння:

$y' = x + 3y; \quad y(0) = 1.$

ВАРІАНТ 16

1. Записавши загальний член ряду, дослідити ряд на збіжність:

$2 + \dfrac{3}{6} + \dfrac{4}{8} + \ldots$

2. Дослідити збіжність рядів. Використати ознаки Даламбера, Коші (радикальну) і інтегральну ознаку Маклорена-Коші.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{2^n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)\ln(n+4)}$.

3. Дослідити збіжність знакозмінних рядів. Встановити, чи має місце абсолютна збіжність, умовна збіжність або розбіжність ряду.

а) $\frac{1}{3\ln^2 3}-\frac{1}{4\ln^2 4}+\frac{1}{5\ln^2 5}+$. б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{10n^2+100n}}$.

4. Знайти інтервал збіжності ряду і дослідити збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності.

а) $\frac{2}{1}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{4}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3+....$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}x^{2n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(n+1)\cdot 2^n}$.

5. а) Обчислити інтеграл з точністю до 0,001, б) Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int\limits_0^{0,4}\frac{1-e^{-\frac{x}{2}}}{x}dx$; б) $\int\limits_0^x\sin(3x^2)dx$.

6. Знайти перші чотири члени розкладу у степеневий ряд рішення диференціального рівняння:

$y'-y^3=x^2$; $y(0)=1$.

ВАРІАНТ 17

1. Записавши загальний член ряду, дослідити ряд на збіжність:

$1+\frac{2}{4}+\frac{3}{7}+\ldots$

2. Дослідити збіжність рядів. Використати ознаки Даламбера, Коші (радикальну) і інтегральну ознаку Маклорена-Коші.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{n^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)\ln(\ln(n+1))}$.

3. Дослідити збіжність знакозмінних рядів. Встановити, чи має місце абсолютна збіжність, умовна збіжність або розбіжність ряду.

а) $\frac{1}{1}-\frac{3}{4}+\frac{5}{9}+$.   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(n+1)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n}}$.

4. Знайти інтервал збіжності ряду і дослідити збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності.

а) $\frac{\sqrt{1}x}{1}+\frac{\sqrt{2}x^{2}}{2!}+\frac{\sqrt{3}x^{3}}{3!}+....;$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{\frac{n}{3}}}{n!}x^{n};$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{2n-1}\cdot(x+3)^{n}$.

5. а) Обчислити інтеграл з точністю до 0,001, б) Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int\limits_{0}^{0,4}\frac{\ln(1+2x)}{x}dx;$ б) $\int\limits_{0}^{x}e^{-\frac{3x^{2}}{4}}dx.$

6. Знайти перші чотири члени розкладу у степеневий ряд рішення диференціального рівняння:

$y'=\frac{x}{2}+\frac{1}{y};\quad \mathrm{y}(0)=1.$

ВАРІАНТ 18

1. Записавши загальний член ряду, дослідити ряд на збіжність:

$\frac{1}{3}+\frac{2}{7}+\frac{3}{11}+\dots$

2. Дослідити збіжність рядів. Використати ознаки Даламбера, Коші (радикальну) і інтегральну ознаку Маклорена-Коші.

а) $\sum\limits_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{\mathrm{arctg}\frac{5}{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}!};$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n-1}\cdot e^{-n};$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^{4}-9}$.

3. Дослідити збіжність знакозмінних рядів. Встановити, чи має місце абсолютна збіжність, умовна збіжність або розбіжність ряду.

а) $\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{2}{(\sqrt{3})^2}+\frac{3}{(\sqrt{3})^3}+.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n-1}.$

4. Знайти інтервал збіжності ряду і дослідити збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності.

а) $1-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{5}}{2^2}x^2-\frac{\sqrt{7}}{2^3}x^3+....;$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-1)x^{2n}}{4^n};$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{5\cdot 2^n}.$

5. а) Обчислити інтеграл з точністю до 0,001, б) Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int_0^{2,5}\frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}};$ б) $\int_0^x \sin\frac{3}{2}x^5\,dx.$

6. Знайти перші чотири члени розкладу у степеневий ряд рішення диференціального рівняння:

$y'=\frac{y}{5}+\mathrm{e}^{\mathrm{y}};\quad \mathrm{y}(0)=1.$

ВАРІАНТ 19

1. Записавши загальний член ряду, дослідити ряд на збіжність:

$\frac{5}{4}+\frac{7}{5}+\frac{9}{6}+\ldots$

2. Дослідити збіжність рядів. Використати ознаки Даламбера, Коші (радикальну) і інтегральну ознаку Маклорена-Коші.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+2)!};$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n;$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4+9}.$

3. Дослідити збіжність знакозмінних рядів. Встановити, чи має місце абсолютна збіжність, умовна збіжність або розбіжність ряду.

а) $\frac{21}{3}-\frac{31}{3^2}+\frac{41}{3^3}+.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[3]{n+4}}.$

4. Знайти інтервал збіжності ряду і дослідити збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності.

а) $\frac{x}{2\cdot 1!}-\frac{x^2}{7\cdot 3!}+\frac{x^3}{12\cdot 5!}+....;$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{4n-3};$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(2n-1)\cdot 2^{3n}}.$

5. а) Обчислити інтеграл з точністю до 0,001, б) Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int_0^{0,4} e^{-\frac{3x^2}{4}}dx;$ б) $\int_0^x \cos(1-x^3)dx.$

6. Знайти перші чотири члени розкладу у степеневий ряд рішення диференціального рівняння:

$y'-2x=\cos y;\quad y(0)=0.$

ВАРІАНТ 20

1. Записавши загальний член ряду, дослідити ряд на збіжність:

$2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^3+\ldots$

2. Дослідити збіжність рядів. Використати ознаки Даламбера, Коші (радикальну) і інтегральну ознаку Маклорена-Коші.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2};$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{4^n};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{\sqrt{n^3+4}}.$

3. Дослідити збіжність знакозмінних рядів. Встановити, чи має місце абсолютна збіжність, умовна збіжність або розбіжність ряду.

а) $\frac{1}{2}-\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{2^n}.$

4. Знайти інтервал збіжності ряду і дослідити збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності.

а) $\frac{2}{\sqrt{2}}x-\frac{5}{\sqrt{2^3}}x^2+\frac{8}{\sqrt{2^5}}x^3-...+....;$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(3x-2)^n}{3n-2};$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{3n-2}}{(2n-1)\cdot 2^{3n}}.$

5. а) Обчислити інтеграл з точністю до 0,001, б) Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int_0^{0,4}\sin(4x^2)dx;$ б) $\int_0^x\frac{dx}{\sqrt[4]{16-x^4}}.$

6. Знайти перші чотири члени розкладу у степеневий ряд рішення диференціального рівняння:

$y'=x^4-y^3;\quad y(1)=1.$

ВАРІАНТ 21

1. Записавши загальний член ряду, дослідити ряд на збіжність:

$\sqrt{\frac{2}{1}}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{4}{3}}+...$

2. Дослідити збіжність рядів. Використати ознаки Даламбера, Коші (радикальну) і інтегральну ознаку Маклорена-Коші.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot\sqrt[3]{n}}{(n+1)!};$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^n\cdot(n+1)^3;$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{10n-1}}.$

3. Дослідити збіжність знакозмінних рядів. Встановити, чи має місце абсолютна збіжність, умовна збіжність або розбіжність ряду.

а) $\frac{3}{1\cdot 2}-\frac{5}{2\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 4}+.$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin 3^n}{3^n}.$

4. Знайти інтервал збіжності ряду і дослідити збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності.

а) $x-\frac{2!x^2}{3\cdot 3}+\frac{3!x^3}{5\cdot 3^2}-...$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-3)^n}{(2n-1)\cdot 2^n};$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(3n-2)}.$

5. а) Обчислити інтеграл з точністю до 0,001, б) Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int_0^{0,4} \cos\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx;$ б) $\int_0^x \frac{e^x - 1}{x} dx.$

6. Знайти перші чотири члени розкладу у степеневий ряд рішення диференціального рівняння:

$y'' = 2y' - y^2 x; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

ВАРІАНТ 22

1. Записавши загальний член ряду, дослідити ряд на збіжність:

$\frac{\sqrt{2}}{1} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{3} + \ldots$

2. Дослідити збіжність рядів. Використати ознаки Даламбера, Коші (радикальну) і інтегральну ознаку Маклорена-Коші.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!};$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n^3};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 2n + 3}.$

3. Дослідити збіжність знакозмінних рядів. Встановити, чи має місце абсолютна збіжність, умовна збіжність або розбіжність ряду.

а) $\frac{1}{2} - \frac{2}{5} + \frac{5}{9} - \ldots$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{\pi}{2^n}.$

4. Знайти інтервал збіжності ряду і дослідити збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності.

а) $\frac{x}{2\cdot\sqrt{5}} - \frac{x^2}{5\cdot\sqrt{5^3}} + \frac{x^3}{8\cdot\sqrt{5^5}} - \ldots$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(2n+1)\cdot 3^n};$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3n+1}.$

5. а) Обчислити інтеграл з точністю до 0,001, б) Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{256+x^4}}$;   б) $\int\limits_0^x \frac{\ln(1-17x)}{x}dx.$

6. Знайти перші чотири члени розкладу у степеневий ряд рішення диференціального рівняння:

$y'' = -2y' + xy;\quad y(0)=4,\quad y'(0)=-2.$

ВАРІАНТ 23

1.Записавши загальний член ряду, дослідити ряд на збіжність:

$$\frac{1}{101}+\frac{2}{201}+\frac{3}{301}+\ldots$$

2. Дослідити збіжність рядів. Використати ознаки Даламбера, Коші (радикальну) і інтегральну ознаку Маклорена-Коші.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cdot\sqrt[3]{n}}{3^n+2}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 arctg^n \frac{\pi}{3^n}$;   в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)}$.

3. Дослідити збіжність знакозмінних рядів. Встановити, чи має місце абсолютна збіжність, умовна збіжність або розбіжність ряду.

а) $\frac{1}{2}-\frac{2}{6}+\frac{3}{24}-\ldots.$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$

4. Знайти інтервал збіжності ряду і дослідити збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності.

а) $\frac{2}{3}x - \frac{2^3}{5}x^2+\frac{2^4}{7}x^3-\ldots$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-3)^n}{(3n-2)\cdot 3^n}$;   в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}x^{2n+1}}{(3n-1)\cdot 3^{2n-1}}.$

5. а) Обчислити інтеграл з точністю до 0,001, б) Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$;   б) $\int\limits_0^x \sin(21x^2)dx.$

6. Знайти перші чотири члени розкладу у степеневий ряд рішення диференціального рівняння:

$y' = -x + 3y; \quad y(0) = 1.$

ВАРІАНТ 24

1. Записавши загальний член ряду, дослідити ряд на збіжність:

$$\frac{3}{\sqrt{1}} + \frac{5}{\sqrt{6}} + \frac{7}{\sqrt{11}} + \ldots$$

2. Дослідити збіжність рядів. Використати ознаки Даламбера, Коші (радикальну) і інтегральну ознаку Маклорена-Коші.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \arcsin^n \frac{\pi}{4^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\cdot \ln(n+1) \cdot \ln\ln(n+1)}$.

3. Дослідити збіжність знакозмінних рядів. Встановити, чи має місце абсолютна збіжність, умовна збіжність або розбіжність ряду.

а) $\left(\frac{1}{3}\right)^1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{7}\right)^3 + .$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}$.

4. Знайти інтервал збіжності ряду і дослідити збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності.

а) $\frac{2x}{\sqrt{1\cdot 2}} + \frac{2^2 x^2}{\sqrt{3\cdot 5}} + \frac{2^3 x^3}{\sqrt{5\cdot 8}} \ldots$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-3)^n}{2n\cdot 3^{n-1}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n-2}}{(4n-4)\cdot 4^{2n}}$.

5. а) Обчислити інтеграл з точністю до 0,001, б) Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int\limits_0^{0,5} e^{-\frac{3x^2}{25}} dx$; б) $\int\limits_0^{x} \frac{\ln(1+3x)}{x} dx$.

6. Знайти перші чотири члени розкладу у степеневий ряд рішення диференціального рівняння:

$y' = y^4 - x; \quad y(0) = 1.$

ВАРІАНТ 25

1. Записавши загальний член ряду, дослідити ряд на збіжність:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{7}} + \frac{5}{\sqrt{12}} + \ldots$$

2. Дослідити збіжність рядів. Використати ознаки Даламбера, Коші (радикальну) і інтегральну ознаку Маклорена-Коші.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(3^n+1)(2n)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^4\left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

3. Дослідити збіжність знакозмінних рядів. Встановити, чи має місце абсолютна збіжність, умовна збіжність або розбіжність ряду.

а) $\frac{\cos\alpha}{1}-\frac{\cos 2\alpha}{2}+\frac{\cos 3\alpha}{3}-\dots$. б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

4. Знайти інтервал збіжності ряду і дослідити збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності.

а) $\frac{x}{1\cdot\sqrt{1}}+\frac{x^2}{3\cdot\sqrt{2}}+\frac{x^3}{5\cdot\sqrt{3}}+\dots$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{(2n+1)\cdot 2^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{2n}}{2^n\cdot\sqrt{2n+1}}$.

5. а) Обчислити інтеграл з точністю до 0,001, б) Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int\limits_0^1 \sin(x^2)dx$; б) $\int\limits_0^x e^{-3x^7}dx$.

6. Знайти перші чотири члени розкладу у степеневий ряд рішення диференціального рівняння:

$y' = y+\sin x$; $y(0)=1$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1978. – Т.2.

2. Данко П. Е., Попов А. Г. Высшая математика в примерах и задачах: Учебное пособие, ч. 2. – М.: Высшая школа, 1967.

3. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа для втузов. – М.: Наука, 1972.

4. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие для вузов.– 10-ое издание. – М.: Наука,1990.

5. Валєєв К. Г., Джаладова І. А., Лютий О.І. та ін. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. – К.: КНЕУ, 2002.