6.3 Ідентифікація хаотичних систем

Нелінійні динамічні системи широко представлені в сучасних технологічних і природних процесах, незважаючи на детермінізм їх визначення, можуть проявляти хаотичні властивості. При цьому надзвичайно малі збурення у вхідних впливах і параметрах самої системи призводять до значних, але кінцевих збурень вихідного сигналу. Це призводить до певних труднощів при конструюванні і передбаченні поведінки таких систем.

При математичному та комп'ютерному моделюванні систем динамічного хаосу виникають специфічні для них проблеми. Насамперед – потрібно забезпечити наявність працездатного критерію адекватності моделі. Для задач ідентифікації наявність такого критерію є наріжним каменем. Найчастіше використовувані при моделюванні поведінки динамічних систем критерії, засновані на звичних мірах в просторі вихідних сигналів, виявляються непрацездатними. З іншого боку, такі спеціальні характеристики хаотичних систем, як фрактальна розмірність, показник Ляпунова, перетин Пуанкаре, недостатньо інформативні для задачі ідентифікації через обмежений діапазон зміни, велику похибку при їх вимірюванні для реальних систем та суттєву обчислювальну складність.

6.3.1 Параметрична ідентифікація хаотичної динамічної системи Дуффінга

Розглянемо особливості задачі синтезу критерію ідентифікації нелінійної динамічної системи – нелінійної коливальної системи Дуффінга, яка проявляє властивості динамічного хаосу.

Постановка задачі

Розглянемо нелінійну динамічну систему Дуффінга:

$$\ddot{x} + c_0\dot{x} + \Omega_0^2 x + \beta x^3 = u(t), \qquad (6.49)$$

або її ж із збереженням фізичних розмірностей:

$$m\ddot{x} + v\dot{x} + k_1 x + k_3 x^3 = F(t). \qquad (6.50)$$

Тут m – маса об'єкта, $x(t)$ – координата (вихідний сигнал), $u(t) = U\sin(\omega_{in}t)$ – зовнішня збурювальна сила, до k_1 – коефіцієнт лінійної компоненти повертаючої сили, k_3 – коефіцієнт при нелінійної частини, Ω_0 - власна частота при відсутності нелінійності, v і c_0 – розмірний і безрозмірний коефіцієнти демпфірування, β – безрозмірний коефіцієнт нелінійної частини.

У даній задачі як ідентифікований параметр буде використовуватися коефіцієнт β. Параметри об'єкта і вхідного сигналу були обрані таким чином ($U = 1$,

$\omega_{in} = 1$, $c_0 = 0.05$, $\Omega_0 = 1$, $\beta \approx 2$), щоб виявлялася хаотична динаміка. Вихід об'єкта $\mathbf{O}(x_0)$ спостерігається з похибкою $\omega(t)$ – випадковим сигналом з рівномірним розподілом, амплітудою $\omega_a = 0.05$ і характерним часом автокореляції $t_\omega = 0{,}1$. Вихід моделі $\mathbf{M}(x_m(t))$ вимірюється точно.

На рис. 6.9 наведені фрагменти вихідних сигналів системи (6.49) при близьких значеннях параметра β. Незважаючи на невелику різницю в значеннях параметрів і сильному впливі періодичного вхідного сигналу, виходи сильно розрізняються, що виключає можливість застосування класичних критеріїв ідентифікації.

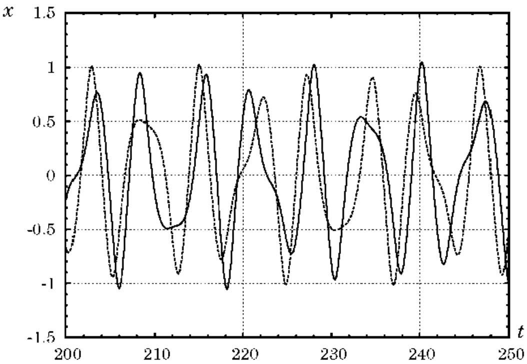

Рисунок 6.9 – Вихідні сигнали системи вигляду (6.49) при значеннях параметра $\beta = 1{,}9$ і $\beta = 2{,}0$

Слід відзначити, що дана система проявляє хаотичні властивості тільки при малих значеннях c_0. При більшому впливі дисипативної складової система (6.49) якісно не відрізняється від лінійної коливальної системи, і для її ідентифікації застосовуються відомі критерії.

На рис. 6.10 наведений фазовий портрет даної системи для $t \in [0; 500]$. При більшому часі моделювання графік практично повністю "зафарбовує" обмежену область, що є непрямим підтвердженням хаотичних властивостей системи.

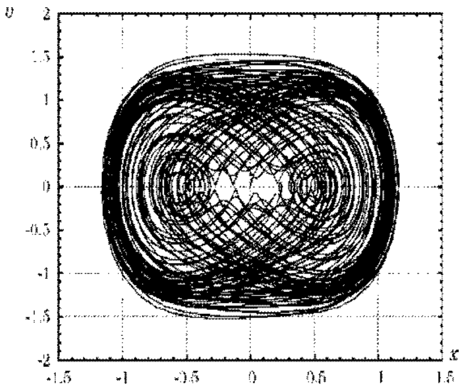

Рисунок 6.10 – Фазовий портрет системи вигляду (6.49)

Ставиться задача розробки такого виду критерію, на підставі якого можна було б використовувати існуючі методи ідентифікації.

Вимоги ідентифікації в реальному часі без суттєвих обчислювальних витрат, високої завадостійкості і універсальності обґрунтовують застосування як базових адаптивно-пошукових методів ідентифікації.

Аналіз властивостей системи

Для працездатності методів ідентифікації необхідно, щоб критерій ідентифікації $F\,(x_0(t), x_m(t))$:

– визначався не миттєвим виходом системи, а деякою інтегральною величиною;

– в свою чергу, ця величина повинна явно залежати від значення ідентифікованого параметра;

– мати достатню стійкість до шумів;

– обчислення критерію за виміряними величинами $x_0(t)$, $x_m(t)$ не повинно вимагати істотних обчислювальних витрат.

Насамперед відзначимо, що при незмінних параметрах системи і вхідного сигналу, незважаючи на те, що система та її оточення постійно обмінюються енергією, середнє значення повної енергії системи залишається сталим. У повну енергію вносять свій внесок кінетична

$$E_k = m\frac{\dot{x}(t)^2}{2} \tag{6.51}$$

і потенціальна енергія

$$E_p = \int_0^x (k_1 x + k_3 x^3)dx = \frac{k_1 x^2}{2} + \frac{k_3 x^4}{4}. \tag{6.52}$$

Як випливає з (6.52), ідентифікована величина β (в розмірному вигляді їй відповідає параметр k_3) безпосередньо входить тільки в вираз для потенційної енергії, причому її вплив відіграє більше значення при максимальних значеннях x.

Скористаємося тим, що вплив параметра β найбільш істотний при максимальних значеннях x, і отже, визначає величину

$$A = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau x^2(t)dt, \tag{6.53}$$

де τ – досить великий інтервал усереднення.

У свою чергу, дану величину просто вимірювати, оскільки через велике значення τ (зазвичай порядка декількох десятків періодів вхідного сигналу) вплив шумів вимірювання мінімальний. За критерій ідентифікації при цьому можна вважати як величину $|A_0\text{-}A_m|$, так і $(A_0\text{-}A_m)^2$.

6.3.2. Адаптивно-пошукова ідентифікація хаотичної динамічної системи Ресслера

Розглянемо ще один тип хаотичної системи – систему Ресслера на прикладі хімічного реактора. Використаємо для синтезу критерію якості ідентифікації та побудови системи метод адаптивно-пошукової ідентифікації.

Постановка завдання

Розглянемо нелінійну динамічну систему Ресслера:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + a \cdot y \\ \dot{z} = b + z \cdot (x - c) \end{cases} . \tag{6.54}$$

Тут *x, y, z* – змінні стану системи, які відповідають концентраціям основних реагентів в модельованій хімічній системі. Відповідно *a, b, c* – параметри, що визначають динаміку системи (в даній системі визначаються константами хімічної рівноваги і концентраціями допоміжних реагентів).

При моделюванні даної системи припустимо $a = 0.25$, $b = 1$. У цьому випадку параметр c визначає тип динаміки системи. Визначення значення даного параметра і буде метою задачі ідентифікації.

Вихід об'єкта $\mathbf{O}(x_o)$ спостерігається з похибкою $\omega(t)$ – випадковим сигналом з рівномірним розподілом, амплітудою ω_a= 0,05 і інтервалом автокореляції τ_ω = 0,1. Виходи моделей M_t $(x_{mt}(t))$ і M_b $(x_{mb}(t))$ вимірюються точно.

У даній системі немає вхідного сигналу *u(t)*. Це пояснюється тим, що, за рахунок підтримки постійних концентрацій допоміжних компонент, постійного поповнення вихідних речовин і видалення продуктів реакції, система має власне джерело енергії, яке забезпечує динаміку системи і при відсутності вхідного сигналу.

Аналіз властивостей системи

Як і інші системи хаотичної динаміки, система Ресслера не дозволяє побудувати систему ідентифікації, основану на формуванні критерію якості ідентифікації як міри близькості значень вихідних сигналів об'єкта $x_o(t)$ і моделі $x_m(t)$. Більше того, сам вигляд поведінки даної системи може значно змінюватись при малих змінах параметрів, здійснюючи перехід від хаотичного до складно-періодичного і назад.

При малих значеннях параметра ($c \approx 2$) система проявляє регулярну динаміку, здійснюючи коливальний рух навколо точки нестійкості рівноваги. При збільшенні значення параметра c відбувається подвоєння періоду, поведінка системи стає все складнішою, і в певному діапазоні значень параметра система демонструє хаотичну динаміку.

На рис. 6.11 наведені портрети динаміки системи (6.54) при близьких значеннях параметра *c*, а на рис. 6.12 – спектральні характеристики, побудовані за значеннями *x(t)*.

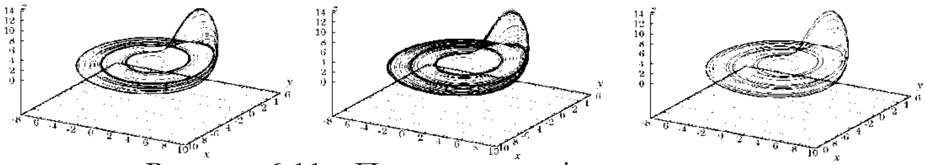

Рисунок 6.11 – Портрет динаміки системи при значеннях параметра c = 5.58, c = 5.59 і c = 5.60

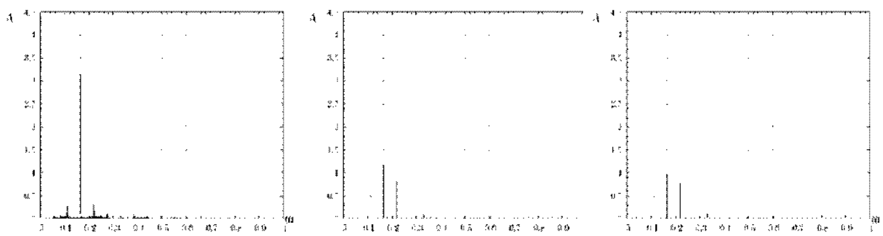

Рисунок 6.12 – Спектр системи при c = 5.58, c = 5.59 і c = 5.60

При значенні параметра c = 5.58 спектр системи має в певних областях неперервний характер, причому ця неперервність зберігається при моделюванні на значних часових інтервалах. Це дає підстави зарахувати систему до систем хаотичної динаміки.

При збільшенні параметра *c* всього на 0.2% спектр системи практично являє собою набір обмеженої кількості частот, і система демонструє складно-періодичний рух. Однак на фазовому портреті при обмеженому інтервалі моделювання графік візуально більш щільно заповнює область атрактора. При збільшенні параметра *c* ще на 0,2% спектральна характеристика практично не змінюється, проте візуально спостерігається значно менш щільне заповнення фазового простору.

Слід зазначити, що такий поділ видів динаміки системи допустимий тільки в ідеальному випадку, коли повністю відсутні завади, і система спостерігається необмежений час. У разі обмеження часу вимірювання неможливо розрізнити неперервний спектр від ряду близько розташованих частот. Якщо ж у самій системі (6.54) діють малі неконтрольовані збурення, то різниця між хаотичним і складно-періодичним рухом практично зникає.

Розглянута система (6.54) являє собою модель гіпотетичної хімічної реакції, причому вона відбувається в особливих умовах, які практично неможливо реалізувати. Це не дає скористатися очевидними законами збереження або ж іншими фізичними інваріантами для визначення критерію працездатної системи ідентифікації.

Тим не менш, аналіз як вихідної системи рівнянь, так і результатів чисельного моделювання, дозволяє знайти принаймні один з працездатних критеріїв. Насамперед відзначимо, що ідентифікований параметр c безпосередньо входить тільки в рівняння для $z(t)$. При моделюванні динаміки системи можна помітити, що при періодичному режимі роботи величина z мала. При збільшенні значення параметра c спостерігається зростання аттрактора уздовж осі аплікат. Чисельний експеримент показав, що характерним критерієм є $max(A_z)$, а значення таких інтегральних величин, як $\left|\overline{z(t)}\right|$, $\left|\overline{z^2(t)}\right|$, недостатньо сильно залежать від параметра c.

Необхідний час вимірювання максимального значення $z(t)$ в розглянутій системі становить близько 100–150 періодів, що відповідають найбільш вираженій частоті в спектрі системи. Тим не менш, це не є гарантованою оцінкою, оскільки для системи хаотичної динаміки не можна точно передбачити, коли буде досягнутий максимум якоїсь зі змінних стану.