

Ключові слова

Інтерполяція, метод Лагранжа, метод Ньютона, екстраполяція, апроксимація, метод найменших квадратів, сплайни, щільність імовірності, статистична обробка даних, закони розподілу імовірностей, кореляційна функція, цифрова фільтрація сигналів, перетворення Фур'є, дискретне перетворення Фур'є, швидке перетворення Фур'є, перетворення Лапласа, фільтрація зображень, інверсна фільтрація, фрактальні методи, вейвлет-перетворення, інтервальні числа, інтервальні обчислення.

Контрольні запитання та завдання до підрозділів 7.1–7.3

1. Сформулюйте задачу інтерполяції. В яких випадках інтерполяція неможлива?
2. З якою точністю можна обчислити $\sqrt{2}$ за допомогою формули Лагранжа для функції \sqrt{x} , якщо вибрати вузли інтерполяції $x_0 = 81$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$?
3. Виведіть інтерполяційну формулу Ньютона для рівновіддалених вузлів.
4. Складіть алгоритм обчислення полінома Лагранжа.
5. Що таке сплайн-інтерполяція? Як визначаються коефіцієнти сплайнів?
6. Опишіть сфери застосування різницевих методів інтерполяції.
7. Що таке екстраполяція?
8. Якими шляхами розв'язується задача апроксимації?
9. В чому полягає метод Рунге?
10. Чим відрізняється апроксимація від інтерполяції?
11. Виведіть систему рівнянь для визначення коефіцієнтів апроксимувального полінома в методі найменших квадратів.
12. Наведіть алгоритм апроксимації за методом найменших квадратів.
13. Які поліноми називаються ортогональними? Наведіть приклади.
14. Що таке сплайн?
15. Розробіть алгоритм та наведіть приклад комп'ютерної програми для оцінювання статистичних характеристик результатів вимірювання випадкової величини X .

Контрольні завдання та запитання до підрозділу 7.4

1. Які перетворення мають місце при цифровій обробці сигналів?
2. Що таке дискретний сигнал і дискретна послідовність?
3. У чому полягають взаємозв'язок і відмінність спектрів дискретного та аналогового сигналів?
4. Як за відомим спектром аналогового сигналу визначити спектр відповідного йому дискретного сигналу?

5. У чому полягає явище накладання спектрів при дискретизації сигналів?
6. Як здійснюється цифрове кодування сигналу?
7. Як визначається автокореляційна функція і спектральна щільність шуму квантування АЦП?
8. Відомо, що для отримання розбірливої людської мови її достаньно дискретизувати з частотою 8 кГц. Який діапазон частот може бути правильно переданий таким цифровим записом? Що необхідно зробити у разі дискретизації для правильної передачі частот цього діапазону?
9. Сигнал $x[n]$, відмінний від нуля на відрізку $[A, B]$, згортається з сигналом $h[n]$, відмінним від нуля на відрізку $[C, D]$. Знайти відрізок, на якому може бути відмінний від нуля результувальний сигнал.
10. Розрахувати, скільки множень потрібно зробити для обчислення згортки сигналу довжини N з ядром довжини M .
11. Частота дискретизації сигналу дорівнює 44100 Гц. Розмір ШПФ дорівнює 4096. Яка довжина аналізованого блока в секундах? За якими частотами (у герцах) буде розкладений сигнал?
12. Яку частотну роздільну здатність спектра ми отримаємо в попередньому прикладі? Який розмір ШПФ потрібно використовувати, щоб отримати частотну роздільну здатність близько 4 Гц?
13. Реалізувати знаходження і відображення спектра заданої ділянки сигналу. Ввести можливість вибору довжини сигналу, розміру ШПФ, вигляду вагового вікна.
14. Реалізувати швидке згортання двох сигналів через частотну область.
15. Реалізувати секційне згортання двох сигналів через частотну область.
16. Реалізувати алгоритм проектування фільтра за заданою частотною характеристикою. Спроекувати НЧ-фільтр з довільними параметрами.
17. Показати аналітично, що обернене ДПФ можна виконати за допомогою співвідношення (7.28).
18. Виконати чисельно ДПФ за формулами (7.27), (7.32), (7.33) і зрівняти відновлені сигнали. Розрахувати їх АЧХ і ФЧХ.
19. Обчислити обернене ДПФ використовуючи тільки інформацію про ФЧХ сигналу.
20. Чим відрізняється рекурсивний фільтр від нерекурсивного? Опишіть рівняння для обох фільтрів.
21. У чому полягає завдання проектування цифрових фільтрів? Які підходи при цьому використовуються?
22. Як виглядає алгоритм фільтрації із застосуванням ДПФ?
23. Які технічні обмеження впливають на характеристики проєктованих фільтрів?

Контрольні запитання та завдання до підрозділу 7.5

1. У чому полягає сутність поелементної обробки зображень?
2. Доведіть тотожність прямого й зворотного двовимірних ДПФ.
3. Поясніть, чому при обмеженому розмірі околу, що застосовується при КІХ-фільтрації, не можна досягти граничного заглушення шуму?
4. Назвіть умови, при виконанні яких інверсна фільтрація забезпечує високу якість відновлення зображень.
5. Яка структура двовимірного частотного спектра дискретного зображення?
6. За яких умов, використовуючи дискретне зображення, можна без втрат відновити неперервне?
7. Доведіть, що двовимірний фільтр із прямокутною частотною характеристикою ідеально відновлює неперервне зображення з дискретного.
8. Які методи покращення якості зображення ви знаєте?
9. Реалізуйте в ППП Matlab метод покращення якості зображення шляхом вирівнювання гістограми яскравості пікселів за допомогою функції *Image Processing Toolbox – histeq*.
10. За допомогою яких функцій можна накласти сторонній шум на зображення? Які види шуму ви знаєте?
11. В чому полягає суть двовимірного згортання зображення?
12. Розгляньте використання функції *roifill* для усунення дефектів півтонового зображення.
13. Реалізуйте за допомогою функції *nlfilter* операцію усереднення з порогом в цілях фільтрації імпульсного шуму.
14. Перевірте чи є зображення півтоновим, бінарним, палітровим чи повнокольоровим за допомогою функцій *isind, isgray, isrgb, isbw*.
15. Реалізуйте перетворення повнокольорового зображення в півтонове, а напівтонового в палітрове за допомогою функцій *im2double, gray2ind*.
16. Порівняйте алгоритми побудови множини Мандельброта та сніжинки Коха.
17. Який показник використовується для зв'язку фрактальної та топологічної розмірностей?
18. Порівняйте алгоритми стиску зображень (RLE, Хаффмана, LZW). В чому полягає особливість фрактального стиску зображень?
19. Поясніть поняття: розмірність Хаусдорфа-Безиковича деякої множини A .
20. Які перетворення називаються масштабними? Міра Хаусдорфа має властивість інваріантності щодо масштабних перетворень?
21. Сформулюйте загальні вимоги, які повинна задовольняти розмірність множини при будь-якому способі виміру цієї множини.
22. На основі яких функцій будуються найбільш поширені материнські бази? Чим це зумовлено?
23. Яким чином виконується пряме вейвлет-перетворення?

24. Порівняйте процедури компресії зображення за допомогою ДВП та фрактальних методів.

Контрольні завдання та запитання до підрозділу 7.6

1. Навести практичні приклади використання методів інтервального аналізу.
2. Сформулювати основні правила операцій над інтервалами.
3. Скласти алгоритми та програми реалізації найпростіших математичних операцій над інтервалами.
4. Подати у інтервальному вигляді такі функції: \sin , \cos , \tan , ctg , \exp , \ln .
5. Скласти алгоритми та програми інтервальної реалізації математичних функцій, наведених у завданні 4.
6. Сформулюйте задачу Коші для інтервальних чисел. В чому відмінність інтервальних методів розв'язання диференціальних рівнянь від класичних?
7. Чим відрізняється класична інтервальна арифметика від інтервальної арифметики Каухера?
8. Побудувати інтервальне розширення для функцій:

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 5;$$

$$f(x_1, x_2) = x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1.$$

9. Чи буде нижченаведена функція інтервальним розширенням деякої функції $f(x)$? Якщо так, то якої?

а) $F(x) = 2[\underline{x}, \bar{x}] + [-1, 1];$

б)
$$F(x) = \begin{cases} [0, \max\{\underline{x}^2, \bar{x}^2\}] + 2, & \underline{x}\bar{x} < 0; \\ [\underline{x}^2, \bar{x}^2] + 2, & \underline{x} \geq 0; \\ [\bar{x}^2, \underline{x}^2] + 2, & \underline{x} \leq 0. \end{cases}$$

10. Знайдіть інтервальний інтеграл на $[a, b]$ для функції

$$F(x) = [1, 2]x^2 + [-1, 1]x + [1, 0].$$

11. З використанням формули Тейлора знайдіть інтервальну оцінку інтеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx.$$

12. Побудуйте інтервальний кубічний сплайн на відрізку $[0, 1]$ якщо $f_0 = [0.5, 1]$, $f_1 = [0, 0.5]$, $f_0' = [-0.5, -0.5]$, $f_1' = [-0.5, -0.5]$.
13. Знайти множину розв'язків системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$Ax = b, \text{ де } A = \begin{pmatrix} [2, 3] & [-1, 1] \\ [-1, 1] & [2, 3] \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} [0, 2] \\ [0, 2] \end{pmatrix}.$$

14. Розв'яжіть систему рівнянь методом Гаусса

$$Ax = b, \text{ де } A = \begin{pmatrix} [2, 3] & [-1, 1] \\ [-1, 1] & [2, 3] \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} [0, 2] \\ [0, 2] \end{pmatrix}.$$

Література

1. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 486 с.
2. Буняк Ю. А. Метод нулевого пространства в задачах обработки и анализа изображений / Буняк Ю. А., Кветный Р. Н., Софина О. Ю. – Germany : Palamarium Academic Publishing, 2014 – 268 с.
3. Гонсалес Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – М. : Техносфера, 2005. – 1072 с.
4. Кветный Р. Н. Интервальные моделі перетворень сигналів в інформаційно-вимірювальних системах / Кветный Р. Н., Бойко О. Р. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2009. – 88 с.
5. Кветный Р. Н. Методи комп'ютерних обчислень / Кветный Р. Н. – Вінниця : ВНТУ, 2001. – 218 с.
6. Кветный Р. Н. Методи фільтрації текстурованих зображень у задачах розпізнавання та класифікації / Кветный Р. Н., Софина О. Ю. – Вінниця : ВНТУ, 2011. – 119 с.
7. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика / Л. Коллатц. – М. : Мир, 1969. – 448 с.
8. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень / [під заг. ред. Р. Н. Кветного] – Вінниця : ВНТУ. 2012. – ч. 1– 196 с.; ч. 2 – 230 с.
9. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1986. – 832 с.
10. Краскевич В. Е. Численные методы в инженерных исследованиях / Краскевич В. Е., Зеленский К. Х., Гречко В. И. – К. : Вища школа, 1986. – 264 с.
11. Ляшенко М. Я. Чисельні методи : підручник / Ляшенко М. Я., Головань М. С. – К. : Либідь, 1996. – 288 с.
12. Маликов В. Т. Вычислительные методы и применение ЭВМ / Маликов В. Т., Кветный Р. Н. – К. : Вища школа, 1989. – 362 с.
13. Рабинер Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Л. Рабинер, Б. Гоулд ; пер. с англ. – М. : Мир, 1979. – 578 с.
14. Рудаков П. И. Обработка сигналов и изображений. Matlab 5.x / Рудаков П. И., Сафонов И. В. – М. : ДИАЛОГ-МИФИ, 2000. – 416 с.
15. Кветный Р. Н. Різницеві методи та сплайни в задачах багатовимірної інтерполяції / Кветный Р. Н., Дементьев В. Ю., Машницький М. О.,

- Юдін О. О. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2009. – 87 с.
16. Самарский А. А. Введение в численные методы / Самарский А. А. – М. : Наука, 1987. – 234 с.
 17. Самарский А. А. Теория разностных схем / Самарский А. А. – М. : Наука, 1977. – 400 с.
 18. Скурихин В. Н. Математическое моделирование / Скурихин В. Н., Шифрин В. Б., Дубровский В. В. – К. : Техніка, 1983. – 270 с.
 19. Усов А. В. Математичні методи моделювання : підручник / А. В. Усов, О. С. Савельєва, І. І. Становська – Одеса : Пальміра, 2011. – 500 с.
 20. Фельдман Л. П. Чисельні методи в інформатиці : підручник / Фельдман Л. П., Петренко А. І., Дмитрієва О. А. – К. : Вид. група ВНУ, 2006. – 480 с.
 21. Фисенко В. Т. Компьютерная обработка и распознавание изображений : учеб. пособие / Фисенко В. Т., Фисенко Т. Ю. – СПб. : СПбГУ ИТМО, 2008. – 192 с.
 22. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М. : Мир, 1980. – 279 с.
 23. Усов А. В. Чисельні методи та їх реалізація у середовищі SCILAB : навч. посібник / Усов А. В., Шпинковський О. А., Шпинковська М. І. – Київ : Освіта України, 2013 – 192 с.
 24. Чабан В. Чисельні методи / В. Чабан. – Львів : Вид. Нац. ун-ту “Львівська політехніка”, 2001. – 186 с.
 25. Kvyetnyy R. Basics of Modelling and Computational Methods / R. Kvyetnyy. – Вінниця : ВДТУ, 2007. – 147 с.