9 ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

З розвитком і поширенням використання обчислювальної техніки з'явилася можливість отримання результатів моделювання у задачах, де аналітичні методи або дуже складні для застосування, або взагалі не існують.Чисельне моделювання охоплює множину методів, переважно наближених, які використовуються для розв'язання прикладних математичних задач і орієнтовані на реалізацію у вигляді низки арифметичних і логічних операцій шляхом їхньої алгоритмізації та програмної реалізації на комп'ютерах. Методологічною базою для розвитку чисельних методів, що складають основу прикладного програмного забезпечення комп'ютерної техніки, стала теорія наближених обчислень, витоки якої слід шукати ще у старовинних математиків, які створювали такі методи для розв'язання задач, де не існувало точних розв'язків чи їх отрмання було дуже складним. Розглянемо основні типи задач проектування, моделювання, обробки даних, для розв'язання яких традиційно використовуються чисельні методи :

1. Ідентифікація динамічних характеристик лінійних ланок при використанні різних описів сигналів на їх входах і виходах.
2. Використання методу найменших квадратів для ідентифікації передатної характеристики на масивах даних, що описують перехідну і частотну характеристики або сигнали на входах і виходах ланки.
3. Дослідження стійкості лінійних динамічних систем на основі використання різних критеріїв. Побудова області стійкості на площині параметрів системи.
4. Аналіз якості лінійних систем автоматичного управління. Визначення оптимальних дій управління – розв'язання алгебраїчного рівняння Ріккаті (неперервний і дискретний випадки), до якого зводиться завдання про оптимальний лінійний регулятор. Розв'язання рівняння Ріккаті пов'язано з виконанням ряду перетворень і розв'язком окремих завдань (складання вихідної матриці, перетворення подібності), що дозволяють привести матриці до вигляду Гессенберга і вигляду Шура. Знаходження власних значень матриць.
5. Дослідження нелінійних автоматичних систем на основі наближених методів розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь. Застосування методів гармонічної лінеаризації і кусково-лінійної апроксимації.
6. Аналітичне імовірнісне моделювання систем на основі взаємопов'язаних імовірнісних (закони розподілу ймовірності) і енергетичних (спектральні щільності потужності) моделей.
7. Розв'язання задачі визначення розподілу значень фізичних величин (швидкостей потоку, звукової хвилі, температур) в замкнутій області на основі чисельних методів дослідження задач математичної фізики.
8. Дослідження систем методом планування експерименту.
9. Аналіз спектрів різних сигналів із застосуванням перетворення Фур'є в

завданнях розпізнавання образів і цифрової обробки сигналів.

10. Розв'язання завдань автоматизації проектування. У цьому напрямку накопичений великий досвід у створенні різних пакетів прикладних програм.

Цей перелік може бути продовжений і значно розширений, а з часом включає новітні методи, підходи, задачі чисельного моделювання.

9.1 Похибки та властивості обчислювальних методів та алгоритмів

Сьогодні множина методів, які використовуються для комп'ютерних обчислень, ширша, ніж множина саме обчислювальних методів чи так званих методів наближених обчислень. Але на практиці все ж таки саме ці методи стають основою для побудови комп'ютерних розв'язань математичних моделей систем і процесів. В них розглядаються такі алгоритми, які найчастіше пов'язані з розв'язанням дискретної задачі, що була задана як дискретна, чи виникла як результат дискретизації вихідної неперервної задачі. Простим прикладом дискретизації може слугувати побудова різницевої схеми, що виникає при заміні диференціальних рівнянь кінцево-різницевими співвідношеннями. При дискретизації неперервної задачі обов'язково виникає *похибка дискретизації* (sampling error). Ця похибка є однією з головних складових в *похибці обчислювального методу.*

Іншою складовою похибки є *похибка округлення* (rounding error), яка виникає завдяки скінченній довжині розрядної сітки комп'ютера, що призводить до наближеного подання дійсних чисел. Величина цієї похибки визначається не тільки довжиною розрядної комп'ютерної сітки, а й чутливістю конкретного алгоритму до похибок округлення.

Можна виділити також *похибку зрізання* (truncation error), що виникає при заміні нескінченних рядів скінченними.

Наведемо головні властивості арифметичних операцій з похибками:

– *абсолютна похибка суми k* (*k* – будь-яке ціле число) наближених чисел не перевищує суми абсолютних похибок цих чисел

$$\Delta\left[\sum_{i=1}^{k} a_i\right] \le \left[\sum_{i=1}^{k} \Delta_i\right];$$

– *відносна похибка суми k* наближених чисел не перевищує максимальної відносної похибки одного з цих чисел

$$\delta\left[\sum_{i=1}^{k} a_i\right] \le \max_{1\le i\le k} \delta_i \;;$$

– *відносна похибка добутку k* наближених чисел не перебільшує суми відносних похибок цих чисел

$$\delta\left[\prod_{i=1}^{k} a_i\right] \leq \delta \sum_{i=1}^{k} \delta_i ,$$

де $\prod_{i=1}^{k} a_i = a_1 * a_2 * ... * a_k$.

Треба розділяти *локальні* та *глобальні* похибки (local and global errors). *Локальні* виникають на кожному конкретному кроці обчислювального алгоритму, а *глобальні* охоплюють всі похибки, що виникли як на цьому кроці обчислень, так і на попередніх (ці похибки називають *похибками спадкування* чи *похибками поширення).*

Одним із головних критеріїв якості обчислювальних алгоритмів (окрім похибки при застосуванні наближених методів) є їх швидкодія, тобто кількість елементарних обчислювальних операцій (додавання, зсув, інверсія), яка потрібна для реалізації алгоритму.

Важливим є поняття *ітераційного (циклічного) алгоритму* (iterative algorithm), що визначається як багатокроковий, частіше за все, *рекурсивний (завданий на основі такої функції, яка визначається зверненням до себе з певними аргументами)* алгоритм, в якому кожний наступний крок виконується на основі попереднього. Причому можна відокремити суто ітераційні алгоритми за допомогою ітераційних процедур, де розглядаються розв'язки в окремих точках, та багатокрокові алгоритми, в яких розв'язок в попередній точці є основою для пошуку наступного. *Збіжність* є головною властивістю суто ітераційних рекурсивних алгоритмів: якщо вони не збігаються, то застосувати їх взагалі неможливо.

Наведемо декілька головних визначень властивостей обчислювальних методів та алгоритмів.

Стійкість алгоритму (stability of the algorithm) – здатність виконувати обчислення і отримувати кінцевий результат із заданою точністю при зміні параметрів алгоритму і вхідних даних в деякій області, яка називається областю стійкості.

Збіжність (convergence) – це властивість алгоритму шляхом зміни його параметрів виконувати обчислення зі скільки завгодно малою похибкою для заданого класу вхідних даних (тобто при збільшенні кількості ітерацій для алгоритмів, що збігаються, похибка буде прямувати до нуля). Причому підвищення точності досягається зміною внутрішніх параметрів алгоритму (наприклад, максимально допустимою різницею між попереднім та наступним наближенням).

Коректність обчислювального методу (the correctness of computational method) – це властивість безумовного існування розв'язку задачі та забезпечення стійкості обчислювального алгоритму, що реалізує цей метод.