9.3 Нелінійні задачі

До нелінійних рівнянь і систем рівнянь зводиться багато практичних задач, наприклад, розрахунки нелінійних електричних кіл та систем керування, розв’язання нелінійних диференціальних рівнянь, аналіз стійкості систем шляхом оцінювання їх власних значень та ін.

Якщо для найпростіших алгебраїчних рівнянь (не вище третього степеня) існують точні аналітичні формули, то для трансцендентних рівнянь і будь-яких систем рівнянь таких методів взагалі не існує і слід користуватися тільки наближеними ітераційними методами та алгоритмами, найбільш поширені з яких розглянуто нижче.

9.3.1 Розв’язання нелінійних рівнянь

Рівняння, в які входять тільки степені аргументу з відповідними коефіцієнтами, називаються алгебраїчними.

Загальний вигляд алгебраїчного рівняння:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0\,. \qquad (9.10)$$

Нелінійні рівняння, що містять тригонометричні, експоненціальні, логарифмічні або інші спеціальні функції, називають трансцендентними. Наприклад, трансцендентне рівняння може мати вигляд:

$$x^3 + x\sin(x) - 2 = 0\,.$$

Геометричний сенс розв’язання рівняння $f(x) = 0$, як алгебраїчного, так і трансцендентного, полягає у знаходженні точки перетину графіка функції $f(x)$ з віссю OX.

Можна виділити деякі важливі властивості алгебраїчних рівнянь, що спрощують визначення коренів. З метою полегшення розуміння матеріалу нагадуємо необхідні означення.

Функція $f(x)$ ***неперервна в точці*** x_0, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Функція $f(x)$ ***неперервна на відрізку*** $[a,b]$, якщо вона неперервна в будь-якій точці цього відрізка.

Похідною функції $f(x)$ в точці x_0 називають:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)\,.$$

Якщо функція має похідну в точці, то вона неперервна в ній. Обернене твердження не є достовірним.

Функція $f(x)$ ***монотонна на відрізку*** $[a,b]$, якщо її похідна має однаковий знак (>0 або <0) на всьому відрізку $[a,b]$.

Функція *f(x)* ***опукла (увігнута)*** в точці x_0, якщо її друга похідна $f''(x_0)>(<)0$.

1. ***Основна теорема алгебри.*** Алгебраїчне рівняння степеня n має n коренів, які можуть бути як дійсними, так і комплексними.

Кожен корінь рахується відповідну кількість разів, що дорівнює його кратності. Кратність кореня x_0 дорівнює k, якщо

$$f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(k-1)}(x_0) = 0 .$$

2. Якщо всі коефіцієнти a_i рівняння (9.10) дійсні, то всі комплексні корені утворюють комплексно-спряжені пари.

3. ***Теорема Декарта.*** Число додатних дійсних коренів дорівнює (або менше) числу змін знаків в послідовності коефіцієнтів (те ж твердження справедливе відносно числа від'ємних дійсних коренів при заміні в (9.10) x на $-x$).

4. ***Теорема Лагранжа.*** Верхня межа позитивних дійсних коренів

$$R = 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}, \quad a_0 > 0,$$

де k – номер першого від'ємного коефіцієнта; B – найбільша абсолютна величина від'ємного коефіцієнта.

5. ***Теорема Гюа.*** Якщо рівняння (9.10) має дійсні корені і дійсні коефіцієнти, то

$$a_k^2 > a_{k-1} a_{k+1}.$$

Нагадаємо, що прямі аналітичні методи існують лише для алгебраїчних рівнянь не вище третього порядку, а для трансцендентних рівнянь прямих методів взагалі не існує. При визначенні дійсних коренів чисельними методами треба враховувати три теореми. Перші дві дозволяють відокремити корені, тобто встановити якомога тісніші інтервали $[a,b]$, в яких знаходиться один і тільки один корінь рівняння, а третя – оцінити ступінь наближення.

Теорема 1. Якщо неперервна функція $f(x)$ приймає значення різних знаків на кінцях відрізка $[a,b]$, тобто $f(a)f(b)<0$, то всередині цього відрізка міститься щонайменше один корінь рівняння $f(x)=0$, тобто знайдеться хоча б одне число $\xi \in (a,b)$ таке, що $f(\xi)=0$.

Теорема 2. Якщо монотонна функція $f(x)$ приймає значення різних знаків на кінцях відрізка $[a,b]$, тобто $f(a)f(b)<0$, то на цьому відрізку міститься рівно один корінь рівняння $f(x)=0$.

Теорема 3. Нехай ξ – точний, а $\bar{x}$ – наближений корені рівняння $f(x)=0$, які знаходяться на одному й тому ж відрізку $[a,b]$, причому $\left|f'(x)\right| \geq m,\ \ a \leq x \leq b$.

Тоді

$$\left|\bar{x}-\xi\right| \leq \frac{\left|f(\bar{x})\right|}{m}.$$

Розв'язання нелінійних рівнянь складається з двох етапів.

На першому етапі необхідно знайти відрізок $[a,b]$, на якому функція має рівно один нуль (відділення коренів).

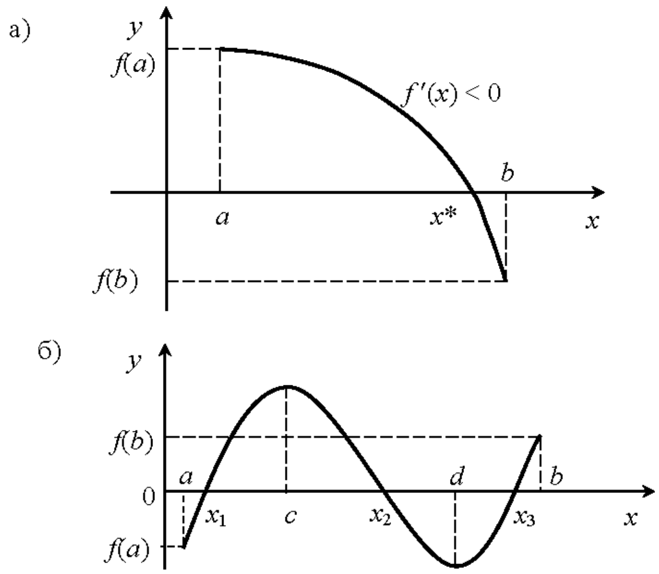
На другому етапі відбувається уточнення кореня на знайденому відрізку за допомогою одного з чисельних методів з заданою точністю.

Відділити корінь x^* рівняння $f(x)=0$ – означає вказати окіл точки x^*, який не містить інших коренів цього рівняння.

Якщо неперервна функція $f(x)$ на кінцях відрізка $[a,b]$ приймає значення різних знаків, тобто якщо $f(a)\cdot f(b) < 0$, то всередині цього відрізка існує, принаймні, один корінь рівняння $f(x)=0$ (рис. 9.3). При цьому корінь x^* буде єдиним, якщо $f'(x)$ зберігає знак усередині інтервалу $[a,b]$ (рис. 9.3, а).

На практиці відділення кореня рівняння $f(x)=0$ на відрізку $[a,b]$ починається з перевірки умови $f(a)\cdot f(b) < 0$. Якщо ця умова виконана, то на $[a,b]$ є корінь, і подальше завдання полягає в з'ясуванні його одиничності або неодиничності.

Для відділення коренів практично досить провести процес половинного розділення, відповідно до якого відрізок $[a,b]$ ділиться на 2, 4, 8,... рівних частин і послідовно визначаються знаки функції в точках поділу. При цьому якщо в точках поділу $\{x_i, x_{i+1}\}$ виконується умова $f(x_i)\cdot f(x_{i+1})<0$, то на інтервалі (x_i, x_{i+1}) є корінь рівняння $f(x)=0$. При визначенні коренів завжди намагаються знайти інтервал (x_i, x_{i+1}) якомога меншої довжини.



Графічне відділення коренів рівняння полягає в знаходженні абсциси точки перетину графіка $y = f(x)$ з прямою $y = 0$, тобто віссю абсцис. При цьому, якщо побудувати графік $y = f(x)$ складно, то функцію подають у еквівалентному вигляді

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

з таким розрахунком, щоб графіки $y_1 = f_1(x)$ і $y_2 = -f_2(x)$ було простіше побудувати. Абсциси їх точок перетину будуть коренями рівняння. При графічному відділенні коренів рівняння результат залежить від точності побудови графіків.

Існує ряд методів наближеного розв'язання нелінійних рівнянь, доцільність застосування кожного з яких визначається виглядом рівняння, його порядком, потрібною точністю і т. д. При розгляді методів будемо вважати, що корені вже відділені.

Слід також пам'ятати, що при визначенні великої кількості коренів знижувати степінь початкового нелінійного рівняння шляхом ділення на $(x - x_i)$ (де x_i – знайдений корінь) треба дуже обережно, що пов'язано з накопиченням похибки розповсюдження, яка буде в коефіцієнтах нового рівняння.

9.3.1.1 Метод половинного ділення

Нехай дано рівняння $f(x)=0$. Необхідно знайти його корінь з точністю $\boldsymbol{\varepsilon}$ на відрізку $[a,b]$, на якому функція неперервна і на кінцях має значення різних знаків, тобто $f(a)\cdot f(b) < 0$. Таким чином, згідно з теоремою 1, на цьому відрізку існує хоча б один розв'язок рівняння.

Знаходиться середина відрізка $[a,b]$ точка c (рис. 9.4). Корінь може опинитись на відрізку $[a,c]$ або на $[c,b]$, чи збігатися з c. В останньому випадку метод припиняє роботу, інакше за допомогою перевірки виконання умов $f(a)\cdot f(c)<0$ і $f(c)\cdot f(b)<0$ з'ясовується, на якій частині відрізка залишився корінь. Далі процедура повторюється для тієї половини відрізка, на якій є корінь, доки відрізок не зменшиться настільки, що його довжина буде менше від заданої похибки.

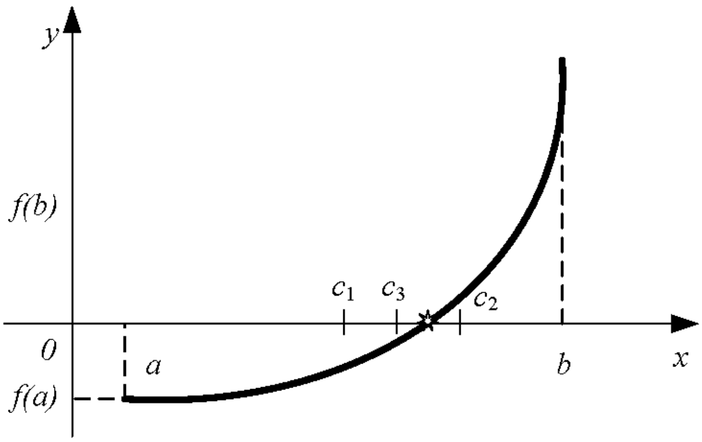


Рисунок 9.4 – Метод половинного ділення

Алгоритм методу

Крок 1. Знаходиться середина відрізка $c:= (b+a)/2$.

Крок 2. Перевіряються нижчевикладені умови.

1. *Якщо $f(c)=0$ – корінь знайдено.*
2. *Якщо $f(a)\cdot f(c)<0$ – корінь на $[a, c]$, тому $b:=c$.*
3. *Якщо $f(c)\cdot f(b)<0$ – корінь на $[c, b]$, тому $a:=c$.*

Крок 3. Перевіряється умова $b-a<\varepsilon$. Якщо вона виконується, то корінь знайдено. В цьому випадку він дорівнює $(a+b)/2$. Інакше повертаються до кроку 1.

Блок-схема методу наведена на рис. 9.5.

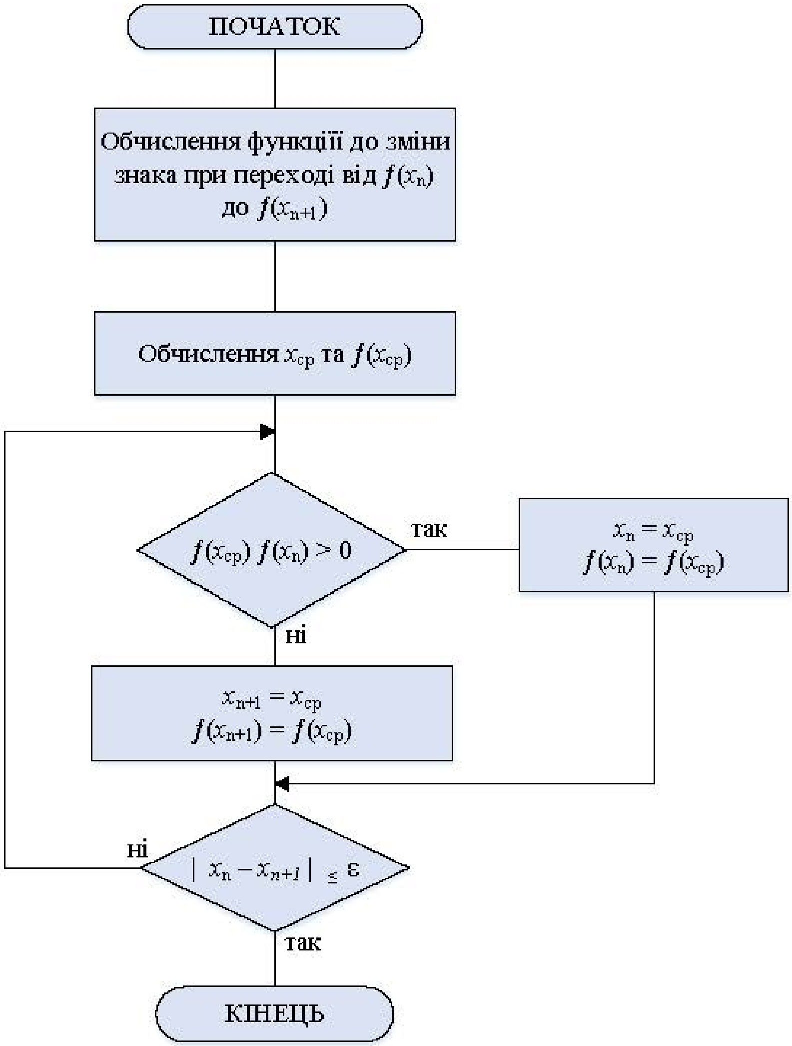


Рисунок 9.5 – Алгоритм методу половинного ділення

Похибка розв'язку Δ через n ітерацій знаходиться в межах

$$\Delta \le \frac{1}{2^n}|x_1 - x_0|.$$

Метод має малу швидкість збіжності, оскільки інтервал, де знаходиться корінь, з кожним кроком зменшується не більше, ніж в два рази.

9.3.1.2 Метод хибного положення (хорд)

Нехай дано рівняння $f(x)=0$. Необхідно знайти його корінь з точністю ε на відрізку $[a,b]$, на якому функція неперервна і на кінцях має значення різних знаків, тобто $f(a){\cdot}f(b)<0$. Таким чином, згідно з теоремою 1, на цьому відрізку існує хоча б один розв'язок рівняння.

Ідея методу хорд полягає в заміні на відрізку $[a,b]$ функції *f(x)* на пряму, що проходить через кінці її графіка (точки A з координатими (*a, f(a)*) та B (*b, f(b)*)) (рис. 9.6).

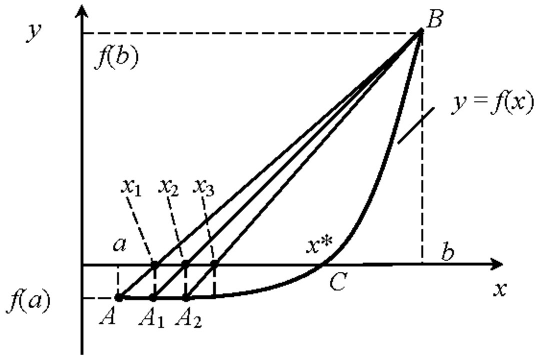


Рисунок 9.6 – Метод хорд

Шуканим коренем C буде перетин *f(x)* з віссю *OX*. Рівняння прямої AB запишемо у вигляді:

$$\frac{x-b}{y-f(b)}=\frac{x-a}{y-f(a)}.$$

Приймаючи $y = 0$, знаходимо $x_1=\dfrac{a\cdot f(b)-b\cdot f(a)}{f(b)-f(a)}$. Цей вираз можна записати в вигляді:

$$\left.\begin{aligned} &x_1 = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)};\\ &\textit{або}\\ &x_1 = b - f(b)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}. \end{aligned}\right\} \tag{9.11}$$

Якщо x_1 виявляється недостатньо точним, знаходять друге наближення:

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{b-x_1}{f(b)-f(x_1)}. \tag{9.12}$$

На підставі (9.11) і (9.12) можна записати рекурентну послідовність:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{b-x_k}{f(b)-f(x_k)}, \tag{9.13}$$

якщо $f(x_k)\cdot f(b)<0$, і

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k-a}{f(x_k)-f(a)} \tag{9.14}$$

якщо $f(x_k) \cdot f(a) < 0$.

Алгоритм методу

Крок 1. Знаходиться перша точка $x_t := a - \dfrac{f(a) \cdot (b-a)}{f(b) - f(a)}$.

Крок 2. Перевіряються нижчевикладені умови.

1. *Якщо f(*x_t*)=0 – корінь знайдено.*
2. *Якщо f(a)·f(*x_t*)<0 – корінь на [a,* x_t*], тому b:=* x_t.
3. *Якщо f(*x_t*)·f(b)<0 – корінь на [*x_t*,b], тому a:=* x_t.

Крок 3. Запам'ятовується останнє наближення $x_p := x_t$.

Крок 4. Знаходиться нове наближення $x_t := a - \dfrac{f(a) \cdot (b-a)}{f(b) - f(a)}$.

Крок 5. Перевіряються нижчевикладені умови.

1. *Якщо f(*x_t*)=0 – корінь знайдено.*
2. *Якщо f(a)·f(*x_t*)<0 – корінь на [a,* x_t*], тому b:=* x_t.
3. *Якщо f(*x_t*)·f(b)<0 – корінь на [*x_t*,b], тому a:=* x_t.

Крок 6. Перевіряється умова $|x_t - x_p| < \varepsilon$. *Якщо вона виконана, то вважається, що корінь знайдено. В цьому випадку він приймається рівним* x_t. *Інакше перехід на крок 3.*

Похибка розв'язку оцінюється за формулою:

$$\Delta \le \frac{M_1 - m_1}{M_1} |x_{n+1} - x_n|,$$

де M_1, m_1 – відповідно, найбільше та найменше значення модуля першої похідної *f(x)* на відрізку.

Якщо функція *f(x)* монотонна та опукла (ввігнута), процес наближення до кореня буде відбуватись завжди з одного боку. Тому після визначення на кроці 2 частини відрізку, на якій є корінь, можна запам'ятати її нерухомий кінець і вилучити в циклі перевірку умов на кроці 5.

9.3.1.3 Метод Ньютона (дотичних)

На відміну від методу хорд, в методі Ньютона функція *f*(*x*) замінюється на дотичну, і наближення до кореня рівняння визначається точкою перетину дотичної з віссю OX.

Рівняння дотичної має вигляд:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0),$$

де x_0 – точка, в якій проведена дотична.

З геометричної точки зору x_{n+1} є значенням абсциси точки перетину дотичної до кривої $y=f(x)$ в точці $(x_n, f(x_n))$ з віссю абсцис. Тому метод Ньютона називають також методом дотичних.

Теорема 1. Якщо $f(x)\in C^2[a,b]$, $f(a)f(b)<0$, а $f''(x)$ не змінює знака на $[a,b]$, то, виходячи з початкового наближення $x_0 \in [a,b]$, що задовольняє умову $f(x_0)f''(x_0)>0$, можна обчислити методом Ньютона єдиний корінь x_0 рівняння з будь-яким ступенем точності.

Очевидно, що точка перетину дотичної з віссю OX, яка визначає перше наближення до кореня, знаходиться за формулою:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

У точці x_1 проводиться ще одна дотична і знаходиться точка її перетину з віссю OX (рис. 9.7).

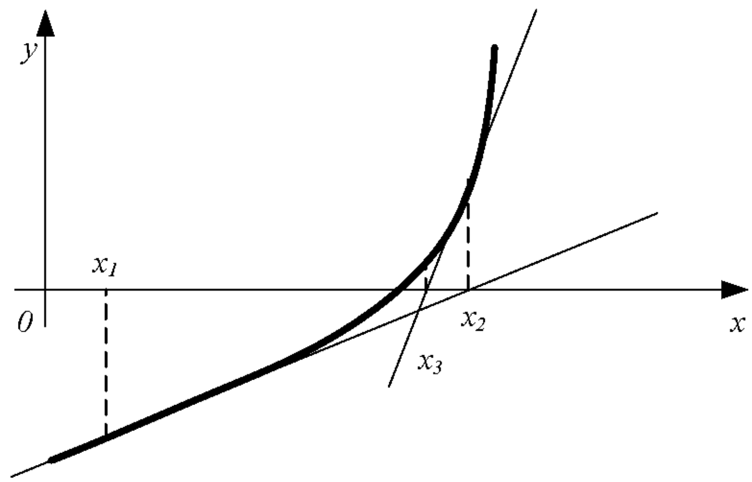


Рисунок 9.7 – Метод Ньютона

Таким чином, наступні наближення розраховуються за формулою:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

В основі цього методу лежить розкладання функції в ряд Тейлора

$$f(x_n + h) = f(x_n) + hf'(x_n) + \frac{h^2}{2}f''(x_n)+..$$

Члени, що містять h у другому і більших степенях, відкидаються і в результаті отримується наведена вище наближена формула для оцінювання x_{n+1}.

Метод завершує роботу тоді, коли відстань між двома останніми точками не стане меншою за необхідну точність ε.

Для збіжності алгоритму необхідно, щоб функція $f(x)$ була монотонна та опукла (ввігнута) на відрізку $[a,b]$. Коли в процесі обчислень кут нахилу дотичної $f'(x)$ перетворюється на нуль, застосування цього методу ускладнюється. Можна також показати, що у випадку дуже великих значень $f''(x)$ чи кратних коренів метод Ньютона стає неефективним.

Початкове наближення слід вибирати за формулою:

$$x_0 = \begin{cases} a, & f(a)\cdot f''(a) > 0 \\ b, & f(b)\cdot f''(b) > 0 \end{cases}.$$

Як і в методі хорд, при програмній реалізації методу необхідно запам'ятовувати лише дві останні точки наближення.

Алгоритм методу

Крок 1. Знаходиться перша точка $x_t = \begin{cases} a, & f(a)\cdot f''(a) > 0 \\ b, & f(b)\cdot f''(b) > 0 \end{cases}$.

Крок 2. Запам'ятовується останнє наближення $x_p := x_t$.

Крок 3. Знаходиться нове наближення $x_t = x_p - \dfrac{f(x_p)}{f'(x_p)}$.

Крок 4. Перевіряється умова $|x_t - x_p| < \varepsilon$. *Якщо вона виконується, то корінь знайдено. В цьому випадку він приймається рівним* x_t. *Інакше перехід на крок 2.*

Похибка методу оцінюється як

$$\Delta \le \frac{M_2}{2m_1}(x_{n+1} - x_n)^2,$$

де M_2 – найбільше за модулем значення другої похідної на інтервалі $[x_n, x_{n+1}]$.

9.3.1.4 Метод січних

Однією з головних проблем при застосуванні методу Ньютона є необхідність аналітичного опису похідної. Якщо це складно чи неможливо, то можна застосувати її наближену оцінку. Тоді замість методу дотичних застосовується метод січних, за яким

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{F'(x_n)},$$

де $F'(x_n)$ – наближена оцінка похідної, що розглядається як січна, а не як дотична, і може бути оцінена за формулою

$$F'(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}},$$

чи

$$F'(x_n) = \frac{f(x_n + h) - f(x_n)}{h},$$

де h – деякий невеликий крок.

Алгоритм цього методу подібний до алгоритму методу Ньютона, але з іншою ітераційною формулою.

Геометрична інтерпретація методу наведена на рис. 9.8.

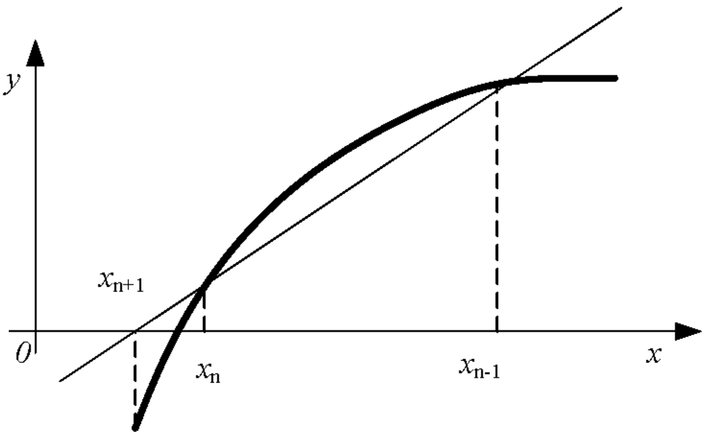


Рисунок 9.8 – Метод січних

9.3.1.5 Метод простої ітерації

Метод простої ітерації застосовується до розв'язування нелінійного рівняння вигляду

$$x = \varphi(x) .$$

Вибравши нульове наближення x_0, наступні наближення знаходяться за формулою

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{9.15}$$

Наведемо достатні умови збіжності методу простої ітерації.

Теорема 2. Нехай для вибраного початкового наближення x_0 на проміжку

$$S = \{x : |x - x_0| \le \delta\}$$

функція $\varphi(x)$ задовольняє умову Ліпшица

$$|\varphi(x') - (x'')| \le q|x' - x''|, \quad x', x'' \in S, \tag{9.16}$$

де $0<q<1$, і виконується нерівність

$$|\varphi(x_0) - x_0| \le (1-q)\delta .$$

Тоді рівняння $x = \varphi(x)$ має на проміжку S єдиний корінь x_*, до якого збігається послідовність (9.15), причому швидкість збіжності визначається нерівністю

$$|x_n - x_*| \le \frac{q^n}{1-q}|\varphi(x_0) - x_0| .$$

Якщо функція $\varphi(x)$ має на проміжку S неперервну похідну $\varphi'(x)$, яка задовольняє умову

$$|\varphi'(x)| \le q < 1 ,$$

то функція $\varphi(x)$ буде задовольняти умову (9.16) теореми 1.

Наведемо ще одну оцінку, що характеризує збіжність методу простої ітерації,

$$|x_n - x_*| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| .$$

Похибка методу на n-ій ітерації

$$\Delta \le \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| .$$

Алгоритм методу

Крок 1. Знаходиться перша точка $x_t := (a+b)/2$.

Крок 2. Запам'ятовується останнє наближення $x_p := x_t$.

Крок 3. Знаходиться нове наближення $x_t = g(x_p)$.

Крок 4. Перевіряється умова $|x_t - x_p| < \varepsilon$. *Якщо вона виконана, то вважається, що корінь знайдено. В цьому випадку він приймається рівним* x_t. *Інакше перехід на крок 2.*

Геометрична інтерпретація методу наведена на рис. 9.9.

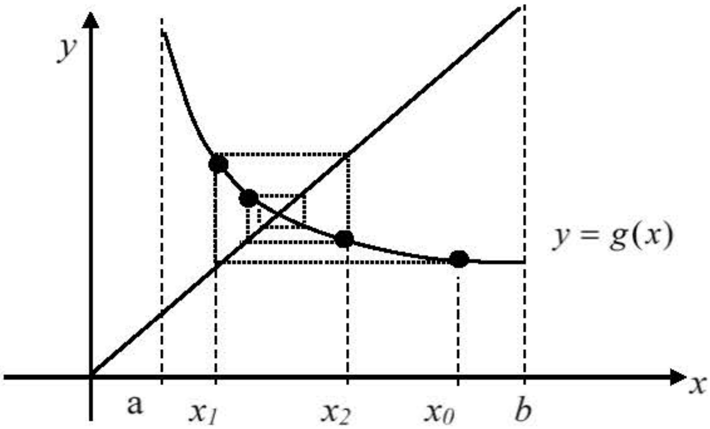


Рисунок 9.9 – Метод простої ітерації для випадку

9.3.1.6 Визначення комплексних коренів

Для визначення комплексних коренів можна застосовувати ті ж самі методи, що й для дійсних коренів, але при цьому оперують вже арифметикою комплексних чисел (контроль збіжності та похибки ведеться за модулем комплексного числа), що не завжди зручно.

Існує низка спеціальних методів, які дозволяють оцінювати комплексні корені, проводячи обчислення з дійсними числами. Більшість з цих методів базується на перетворенні початкового алгебраїчного рівняння (9.10) на добуток квадратичних множників виду

$$x^2 + px + q,$$

де p, q – коефіцієнти.

Проміжною формою для здійснення такого перетворення є рівняння у вигляді

$$\left(x^2 + px + q\right) \cdot \left(x^{n-2} + b_{n-1}x^{n-3} + \ldots + b_3 x + b_2\right) + b_1 x + b_0 = 0, \quad (9.17)$$

де $b_1 x + b_0$ – лінійний залишковий член, який прагнуть звести до нуля, і щоб початкове рівняння (9.10) ділилося на квадратичний співмножник $x^2 + px + q$ без залишку.

Для того, щоб знайти коефіцієнти b_{n-1}, $b_{n-2}, \ldots$, b_3, b_2 при припущенні $b_1 = b_0 = 0$, розглянемо систему рівнянь, що виходять з еквівалентності рівнянь (9.10) та (9.17):

$$\begin{cases} b_{n-1} = a_{n-1} - p, \\ b_{n-2} = a_{n-2} - pb_{n-1} - q, \\ \vdots \\ b_{n-j} = a_{n-j} - pb_{n+1-j} - qb_{n+2-j}, \\ b_3 = a_3 - pb_4 - qb_5, \\ b_2 = a_2 - pb_3 - qp_4, \\ 0 = a_1 - pb_2 - qb_3, \\ 0 = a_0 - qb_2. \end{cases} \qquad (9.18)$$

Вона може бути розв'язана методом прогонки чи ітераційним методом Ліна, алгоритм якого наведений на рис. 9.10.

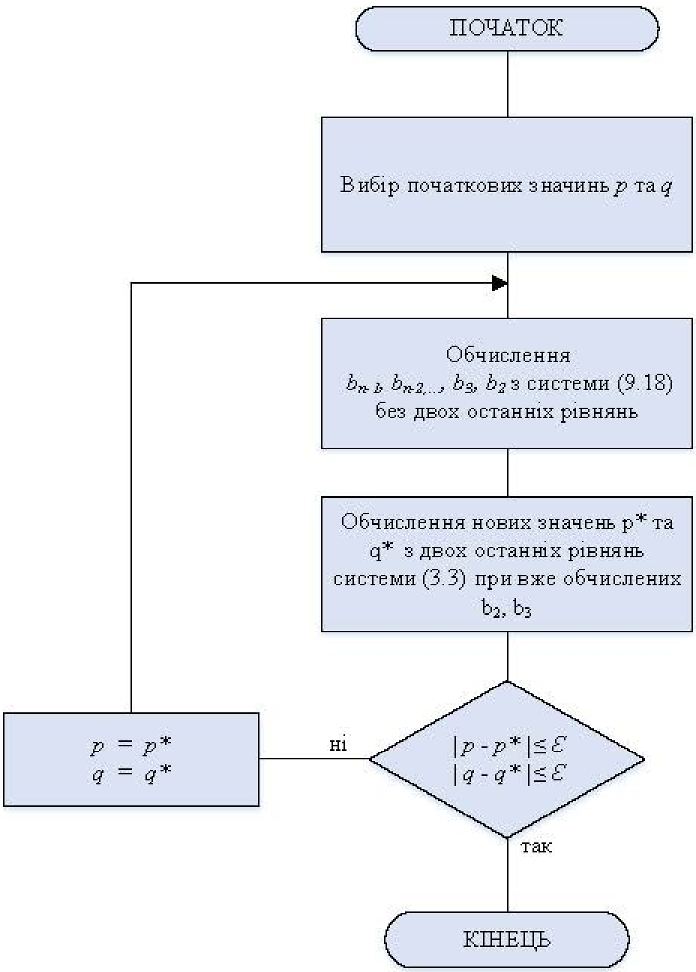


Рисунок 9.10 – Алгоритм методу Ліна

9.3.2 Розв'язання систем нелінійних рівнянь

В загальному випадку система з n нелінійних рівнянь з n невідомими подається у вигляді:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \end{cases} \tag{9.19}$$

Оскільки нелінійні функції, що входять до системи, неможливо описати якоюсь визначеною загальною формою, то не може бути запропоновано будь-якого аналітичного прямого методу для розв'язання такої системи. З наближених ітераційних методів найбільш простим є метод простої ітерації, що базується на приведенні системи (9.19) до системи нелінійних рівнянь у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_2 = g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases}$$

або

$$X = G(X),$$

де $G(x) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{bmatrix}.$

Далі може бути застосований алгоритм, аналогічний методу Гаусса-Зейделя для систем лінійних рівнянь. В його основі ітераційні рівняння, що пов'язують (m+1) та m ітерації

$$\begin{cases} x_1^{(m+1)} = g_1\left(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}\right), \\ x_2^{(m+1)} = g_2\left(x_1^{(m+1)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}\right), \\ \vdots \\ x_n^{(m+1)} = g_n\left(x_1^{(m+1)}, x_2^{(m+1)}, \ldots, x_n^{(m)}\right). \end{cases}$$

Для цього методу дуже важко забезпечити збіжність, а інтервал збіжності може бути настільки вузьким, що вибір початкових наближень сильно ускладнюється.

В загальному випадку цей метод буде збігатися, якщо $\|G'(x)\| < 1$, де $\|G'(x)\|$ – норма матриці частинних похідних функцій за змінними $x_1, x_2, ..., x_n$.

$$G'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Для розв’язання систем нелінійних рівнянь широке застосування набув більш стійкий метод – метод Ньютона. Він є аналогом методу Ньютона для одного рівняння і базується на розкладанні всіх *n* рівнянь у ряд Тейлора:

$$f_1(x_1 + \Delta x_1, ..., x_n + \Delta x_n) = f_1(x_1, ..., x_n) + \Delta x_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + ... + \Delta x_n \frac{\partial f_1}{\partial x_n} + R_n;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_n(x_1 + \Delta x_1, ..., x_n + \Delta x_n) = f_n(x_1, ..., x_n) + \Delta x_1 \frac{\partial f_n}{\partial x_1} + ... + \Delta x_n \frac{\partial f_n}{\partial x_n} + R_n;$$

де R_n – члени другого та більших порядків, що в подальшому відкидаються.

Задача зводиться до розв’язання системи лінійних рівнянь

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ \vdots \\ -f_n \end{bmatrix}.$$

В цій системі матрицю частинних похідних називають матрицею Якобі і позначають J(X).

Знайдені для певного (*m*+1) кроку ітерації значення Δx_i використовуються як поправки до попередніх наближень

$$\begin{cases} x_1^{(m+1)} = x_1^{(m)} + \Delta x_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n^{(m+1)} = x_n^{(m)} + \Delta x_n. \end{cases}$$

Загальна ітераційна формула в матричному поданні має вигляд:

$$X^{(m+1)} = X^{(m)} - J^{-1}\left[X^{(m)}\right]F\left[X^{(m)}\right],$$

де $F\left[X^{(m)}\right]$ – вектор-стовпець значень функцій $f_1, f_2, ..., f_n$ для наближень $X^{(m)}$; $J^{-1}\left[X^{(m)}\right]$ – обернена матриця Якобі.

Алгоритм методу Ньютона наведено на рис. 9.11.

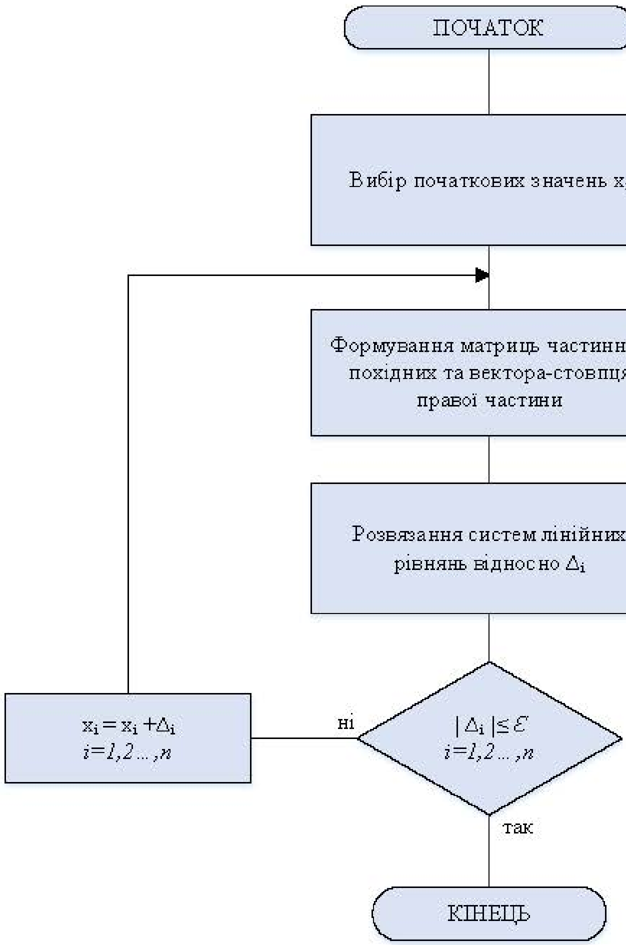


Рисунок 9.11 – Алгоритм методу Ньютона для систем нелінійних рівнянь

Певні труднощі при реалізації алгоритму методу Ньютона виникають при оберненні матриці Якобі. Для цього використовуються відомі з лінійної алгебри способи обернення матриць.

Існує багато варіантів застосування методу Ньютона. Наприклад, модифікований метод Ньютона

$$X^{(m+1)} = X^{(m)} - J^{-1}\left[X^{(0)}\right]F\left[X^{(m)}\right].$$

В цьому методі не треба обчислювати обернену матрицю Якобі на кожному кроці розрахунків, що спрощує алгоритм, але уповільнює збіжність і робить метод більш чутливим до вибору початкового наближення.

Метод Ньютона з параметром τ

$$X^{(m+1)} = X^{(m)} - \tau J^{-1}\left[X^{(m)}\right] F\left[X^{(m)}\right].$$

Цей метод дещо схожий з методом послідовної верхньої релаксації для систем лінійних рівнянь.

Застосовуються також різноманітні гібридні методи, в яких поєднується метод Ньютона з методом простої ітерації.

Збіжність методу Ньютона оцінюється шляхом обчислення показника

$$q = \frac{M^2 LP}{2} < 1,$$

де

$$M \geq \left\| J^{-1}(X) \right\|,$$
$$L \geq \left\| J(X) \right\|,$$
$$P \geq \left\| J(X) \right\|,$$

причому

$$\lim_{l \to \infty} MP \sum_{m=0}^{l} q^{2^m - 1} \to 0.$$

Похибка на m-й ітерації визначається нерівністю

$$\Delta \leq MP \frac{q^{2^m - 1}}{1 - q^{2^m}}.$$

9.3.3 Загальні висновки щодо застосування методів розв'язання нелінійних задач

При відшукуванні комплексних коренів розв'язання алгебраїчних рінянь слід користуватися методами, що базуються на розкладанні вихідного рівняння на добуток квадратичних співмножників. Якщо треба відшукати всі корені рівняння (наприклад, в задачах аналізу стійкості систем автоматичного керування високого порядку), то треба контролювати кількість та кратність коренів за допомогою базових алгебраїчних теорем та правил, які наведено в цьому розділі. При знаходженні одного кореня у заданому інтервалі значень (наприклад, в задачах градуювання нелінійних перетворювачів та засобів вимірювання) можна використовувати метод Ньютона чи простої ітерації (якщо виконуються умови їх збіжності в інтервалі, де проводяться обчислення), як найшвидші методи, а у випадку, коли збіжність забезпечити важко,– метод половинного ділення як більш повільний, але надійний метод. В задачах з трансцендентними рівняннями загальні рекомендації дати дуже важко і більш покладаються на досвід дослідника, який розв’язує задачу та фізичну інтерпретацію досліджуваного процесу.