9.7 Чисельне диференціювання

Задача полягає в тому, щоб для заданої диференційовної функції *f(x)* знайти похідну в точці x_0.

9.7.1 Чисельне диференціювання аналітично заданих функцій

Наближене диференціювання аналітично заданих функцій може бути потрібне при розробці універсальної процедури пошуку похідної для великої кількості різних функцій, або у випадку, коли аналітичний вигляд похідної надто громіздкий і призводить до втрати точності.

В основі чисельного диференціювання (numerical differentiation) аналітично заданих функцій покладено визначення похідної:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Оскільки невідомо, яке значення h узяти, будується послідовність $\{h_k\}$ так, щоб $h_k \to 0$ (наприклад, $h_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$) і, відповідно, формується послідовність $\{D_k\}$

$$D_k = \frac{f(x + h_k) - f(x)}{h_k}, \text{ k} = 1,2,3,\ldots,\text{n},... \qquad (9.41)$$

Розрахунок елементів послідовності проводять до тих пір, поки виконується умова:

$$|D_{n+1} - D_n| < |D_n - D_{n-1}|.$$

Якщо відома точність ε, з якою потрібно знайти похідну, то умова завершення може бути такою:

$$|D_{n+1} - D_n| < \varepsilon.$$

Порядок точності результату в цьому методі перший *O(h)*.

Порядок точності (найвища степінь поліному, для якої чиельний метод дає точний розв'язок) попереднього методу можна підвищити, використовуючи замість формули (9.41) інші вирази. Розглянемо ці формули.

Формула другого порядку точності $O(h^2)$ для обчислення похідної:

$$f'(x) \approx \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h}.$$

Аналогічно можна отримати такі формули для старших похідних точності порядку $O(h^2)$:

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2},$$

$$f'''(x) \approx \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^3},$$

$$f^{(4)}(x) \approx \frac{f(x+2h) - 4f(x+h) + 6f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{h^4}.$$

Сам алгоритм залишається незмінним. Формується послідовність $\{h_k\}$ так, щоб $h_k \to 0$ й відповідно обчислюються елементи послідовності $\{D_k\}$, для розрахунку яких замість виразу (9.41) використовується одна з отриманих формул.

Існують формули більш високих порядків точності, їх можна знайти в спеціальній літературі.

9.7.2 Чисельне диференціювання таблично заданих функцій

При розв'язанні багатьох практичних задач виникає необхідність визначення похідних від функцій, що задаються масивами даних, отриманих з експерименту. В цьому випадку безпосереднє диференціювання може дати хибні результати, тому що не відокремлено шум, що суттєво впливає на похідну. Приклад зображено на рис. 9.24, де $f(t)$ – корисний сигнал, $\tilde{f}(t)$ – виміряний сигнал (з шумом).

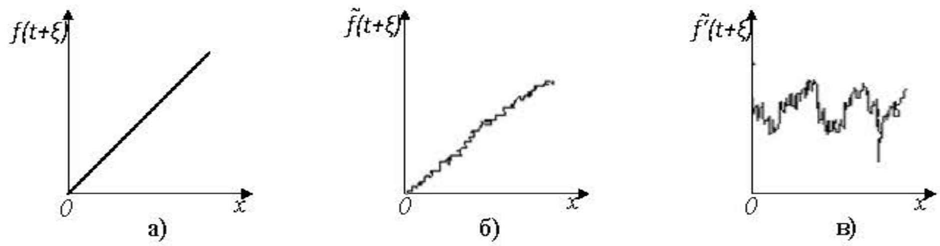

Рисунок 9.24 – Приклади корисного та виміряного сигналу

Зрозуміло, що похідна від $f(t)$ буде містити випадкову складову (якщо завада описується $\xi = A\sin(\omega t)$, то її похідна $\xi' = A\omega\cos(\omega t)$, тобто диференціювання збільшує заваду у ω разів, що вносить велику похибку у визначення реальної похідної від x. Практичним шляхом розв'язання цієї проблеми є згладжування сигналу, що отриманий з експерименту, шляхом інтерполяції чи апроксимації, а далі диференціювання інтерполяційного полінома (чи апроксимувальної функції). При цьому для отримання похідних вищих порядків треба ставити умову їх збігання для сигналу та його інтерполяційного полінома. Похибка похідної інтерполяційної функції $P(t)$ дорівнює похідній від похибки цієї функції:

$$\Delta(t) = \widetilde{f}(t) - P(t),$$

$$\Delta^*(t) = \widetilde{f}'(t) - P'(t),$$

тобто внаслідок лінійності операцій диференціювання та віднімання маємо

$$\Delta^*(t) = \Delta'(t).$$

В довідниках існують спеціальні таблиці, що дозволяють знаходити з застосуванням різних різницевих інтерполяційних формул значення похідних. Взагалі такі формули нескладно отримати для будь-яких методів інтерполяції шляхом диференціювання інтерполяційних формул в загальному вигляді.