10.2 Використання агрегатного принципу для імітаційного моделювання

Імітаційне моделювання суттєво спрощує процес отримання результатів через можливість використання агрегатного принципу. Це означає, що відпадає необхідність розв’язування складних систем рівнянь, які описують функціонування замкнених систем управління.

Пояснимо ці переваги на прикладі. Нехай необхідно здійснити моделювання нелінійної динамічної системи, структурна схема якої зображена на рис. 10.1

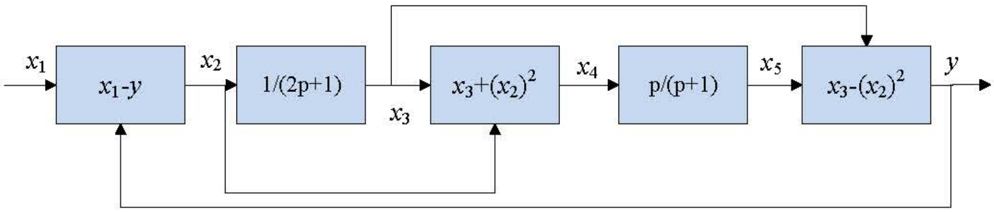

Рисунок 10.1 – Приклад нелінійної динамічної системи

Наведена система описується системою рівнянь

$$\begin{cases} x_2(t) = x_1(t) - y(t) \\ 2\dfrac{dx_3(t)}{dt} + x_3(t) = x_2(t) \\ x_4(t) = x_3(t) + x_2^2(t) \\ \dfrac{dx_5(t)}{dt} + x_5(t) = \dfrac{dx_4(t)}{dt} \\ y(t) = x_3(t) - x_2^2(t) \end{cases}. \tag{10.1}$$

Нелінійні перетворення (у наведеному прикладі – третє і п’яте) моделюються простими функціональними залежностями. Моделювання динамічних перетворень здійснюється на основі дискретної моделі (3.43) - (3.44):

$$y_0 = \sum_{i=0}^{n} K_{x_i} x_{-i} + \sum_{i=1}^{m} K_{y_i} y_{-i},$$

де від’ємні індекси означають попередні моменти часу, по відношенню до поточного моменту, а

$$K_{x_i} = \frac{(-1)^i \sum\limits_{j=i}^{n} C_j^i \dfrac{a_j}{\Delta t^j}}{\sum\limits_{j=0}^{m} \dfrac{b_j}{\Delta t^j}},$$

$$K_{y_i}=\frac{(-1)^{i+1}\sum\limits_{j=i}^{m}C_j^i\frac{b_j}{\Delta t^j}}{\sum\limits_{j=0}^{m}\frac{b_j}{\Delta t^j}}.$$

У окремих випадках:

1. $W(p)=\dfrac{1}{Tp}$. (10.2)

Тут n=0, m=1, a_0=1, b_1=T, b_0=0;

$$y_0=\frac{x_0-\left[\frac{T}{\Delta t}(-1)^i y_{-1}\right]}{\frac{T}{\Delta t}}=y_{-1}+\frac{1}{T}X\Delta t. \qquad (10.3)$$

Очевидно, передатна функція (10.2) відповідає інтегратору, а вираз (10.3) є кусково-ступінчастою апроксимацією інтегрування.

2. $W(p)=\dfrac{1}{Tp+1}$. (10.4)

Тут n=0, m=1, a_0=1, b_1=T, b_0=1;

$$y_0=\frac{x_0-\left[\frac{T}{\Delta t}(-1)y_{-1}\right]}{1+\frac{T}{\Delta t}}=\frac{\frac{T}{\Delta t}y_{-1}+x_0}{1+\frac{T}{\Delta t}}. \qquad (10.5)$$

Очевидно, передатна функція (10.4) відповідає аперіодичному ланцюгу, а вираз (10.5) є рекурсивною сумою зі зменшенням вагових коефіцієнтів "застарілих даних".

3. $W(p)=Tp$. (10.6)

Тут n=1, m=0, a_0=0, a_1=T, b_0=1;

$$y_0=\frac{T}{\Delta t}(x_0-x_{-1})=T\frac{x_0-x_{-1}}{\Delta t}. \qquad (10.7)$$

Очевидно, передатна функція (10.6) відповідає диференціатору, а вираз (10.7) є дискретним аналогом похідної.

Скориставшись наведеним способом, отримуємо систему (10.1) у дискретному вигляді

$$\begin{cases} x_2(i) = x_1(i) - y(i) \\ x_3(i) = \dfrac{2x_3(i-1) + x_2(i)}{3} \\ x_4(i) = x_3(i) + x_2^2(i) \\ x_5(i) = \dfrac{x_4(i) - x_4(i-1) + x_5(i-1)}{2} \\ y(i) = x_3(i) - x_2^2(i) \end{cases}. \qquad (10.8)$$

Наведені системи рівнянь (10.1) і (10.8) важко розв'язати аналітично відносно $y(t)$ (або $y(i)$ у дискретному варіанті): перша через нелінійність диференціального рівняння, до якого зводиться система, друга – через велику кількість невідомих. В результаті система, зображена на рис. 10.1, не може бути промодельована за комплексним принципом, тобто одразу уся в цілому, натомість легко моделюється за агрегатним принципом, коли кожне перетворення здійснюється окремо і послідовно. У дискретному варіанті, який власне і використовується для імітаційного моделювання, необхідно лише визначити попередні і початкові значення усіх змінних (виходячи з міркування, що початок моделювання збігається з моментом увімкнення системи, звичайно вважають, що початковий і попередні стани системи нульові).

Приклад. Нехай задана система керування (рис. 10.2).

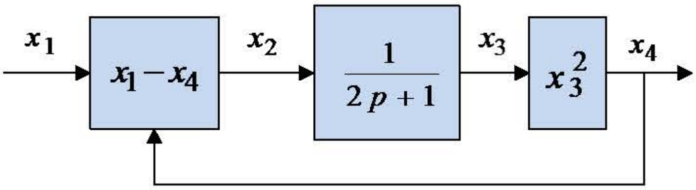

Рисунок 10.2 – Приклад замкненої системи керування

Тоді динамічний блок буде моделюватися перетворенням (10.5)

$$x_3 = \frac{\frac{2}{\Delta t} x_3 + x_2}{1 + \frac{2}{\Delta t}}.$$

Вважатимемо $\Delta t = 1$ с. Тоді загальний алгоритм імітаційного моделювання буде складатися з таких дій.

1) Задаємо інтервал кореляції τ і діапазон D вхідного сигналу, кількість тактів генерування вхідного сигналу N.

2) Визначаємо кількість тактів на інтервалі кореляції $m = \tau / \Delta t$

3) Задаємо початкові умови $x_{10}=0$, $x_{20}=0$, $x_{30}=0$, $x_{40}=0$.

4) Генеруємо m випадкових чисел $u_1 \dots u_m$ *з нормальним розподілом і розкидом D.*

5) Задаємо $i = 1$.

6) Обчислюємо $x_{1i} = \frac{1}{m}\sum_{j=i}^{i+m-1} u_j$.

7) Обчислюємо $x_{2i} = x_{1i} - x_{4i-1}$.

8) Обчислюємо $x_{3i} = \frac{2x_{3i-1} + x_{2i}}{3}$.

9) Обчислюємо $x_{4i} = x_{3i}^2$.

10) Обчислюємо $i = i + 1$.

11) Якщо $i \le N$ *генеруємо нове число* u_j *і повертаємось до кроку 6*

12) Розраховуємо математичні сподівання M_{x_1}, M_{x_4} *і дисперсії* D_{x_1}, D_{x_4}.

13) Змінюємо інтервал кореляції τ і діапазон D вхідного сигналу і повертаємось до кроку 2.

14) Будуємо графіки залежності коефіцієнта перетворення $k_1 = \frac{M_{x_4}}{M_{x_1}}$ *і коефіцієнату фільтрації* $k_2 = \frac{D_{x_4}}{D_{x_1}}$ *від інтервалу кореляції τ і діапазону D вхідного сигналу.*

15) Аналізуємо властивості системи і робимо висновки.