

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ**

О.В. БІЛОВА, І.Б. КОЧЕТКОВА

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 1

**Затверджено на засіданні Вченої ради академії
як навчальний посібник-довідник
Протокол № 3 від 25.03.19**

Дніпро НМетАУ 2019

УДК 517(07)

Вища математика. Ч.1: Навч. посібник-довідник/ О.В. Білова, І.Б. Кочеткова.–
Дніпро: НМетАУ, 2019.– 50 с.

Наведені основні означення, теоретичні положення та формули з розділів «Алгебра та аналітична геометрія», «Функції та границі», «Похідні та їх застосування», «Функції декількох змінних» та «Комплексні числа».

Призначений для студентів з вадами слуху спеціальності 136 – металургія (бак. р.), також може бути корисним студентам усіх спеціальностей.

Бібліогр.: 6 найм.

Друкується за авторською редакцією.

Відповідальний за випуск В.Л. Копорулін, канд. техн. наук, проф.

Рецензенти: Т.С. Кагадій, д-р фіз.-мат. наук, проф. (НТУ «Дніпровська політехніка»)

Ю.Л. Меншиков, канд. техн. наук, доц. (ДНУ)

© Національна металургійна академія
України, 2019

© Білова О.В., Кочеткова І.Б., 2019

ВСТУП

При навчанні студентів із вадами слуху виникає багато проблем різного характеру. Розв'язання цих проблем і підвищення рівня математичної освіти таких студентів у цілому диктує необхідність пошуку нових, сучасних методів активного навчання під час проведення як лекційних, так і практичних занять. Процес навчання студентів з обмеженими здібностями має свою специфіку, яку треба враховувати при викладанні матеріалу. Мета посібника, що пропонується, – допомогти студентам із проблемами слуху при вивченні дисципліни „Вища математика” структурувати й узагальнити теоретичний матеріал, щоб якісно його засвоїти.

Цей навчальний посібник, що представляє собою набір основних математичних означень, важливих теоретичних положень у вигляді формул, таблиць та рисунків, може виконувати роль компактного конспекту лекцій і бути довідником на практичних заняттях, що дає можливість полегшити адаптацію студентів із вадами слуху в процесі навчання.

Розділ 1

АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

1.1. Матриці та визначники. Системи лінійних рівнянь

Визначники

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ – визначник } n\text{-го порядку}$$

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ – мінор елемента } a_{ij}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \text{ – алгебраїчне доповнення елемента } a_{ij}$$

Обчислення визначників

Визначники другого порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Визначники третього порядку (розкладання за елементами першого рядка)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Визначники n -го порядку.

Розкладання за елементами i -го рядка:

$$\Delta = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik}.$$

Розкладання за елементами j -го стовпця:

$$\Delta = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj}.$$

Матриці та дії над ними

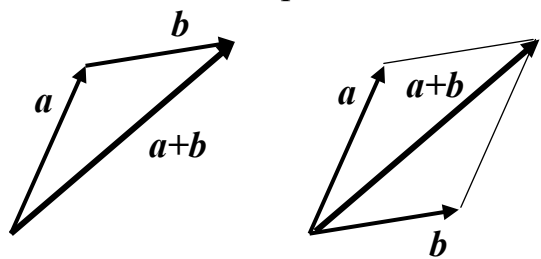
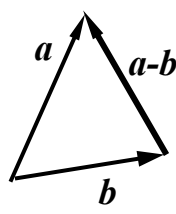
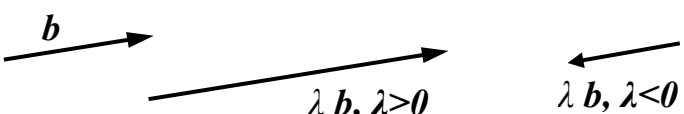
<p>Матриця <i>розмірності</i> $n \times m$</p> $A[n \times m] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$	<p>Матриця n-го <i>порядку</i> (квадратна)</p> $A[n \times n] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$
<p>Сума та різниця матриць</p> $A[n \times m] \pm B[n \times m] = C[n \times m],$ <p>якщо</p> $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}$	<p>Множення на число</p> $\lambda A[n \times m] = C[n \times m],$ <p>якщо</p> $c_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}$
<p>Добуток матриць</p> $A[n \times k] B[k \times m] = C[n \times m],$ <p>якщо</p> $c_{ij} = \sum_{l=1}^k a_{il} b_{lj}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}$	<p>Обернена матриця (до квадратної)</p> $B = A^{-1} \quad (\text{тобто } AB = BA = E),$ <p>якщо</p> $b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\Delta_A}, \quad i, j = \overline{1, n}$ <p>(A_{ji}—алгебраїчне доповнення елемента a_{ji}; E—одинична матриця)</p>

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

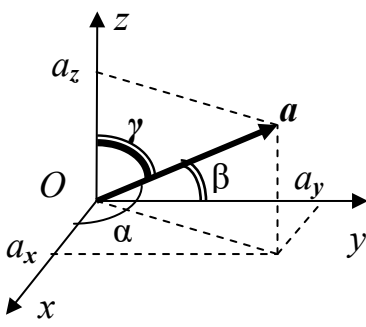
$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$	
<p style="text-align: center;">Метод Крамера розв'язування систем</p> $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta(A)}, \quad j = \overline{1, n}$ $\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$	<p style="text-align: center;">Матричний метод</p> $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}B$

1.2. Основи векторної алгебри

Дії над векторами

<p>Додавання векторів</p> 	<p>Віднімання векторів</p> 
<p>Множення на число</p> 	

Вектори в декартовій системі координат

	$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k} = (a_x; a_y; a_z)$
<p>Довжина вектора</p>	$ \bar{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$
<p>Напрямні косинуси</p>	$\cos \alpha = \frac{a_x}{ \bar{a} }; \quad \cos \beta = \frac{a_y}{ \bar{a} }; \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{ \bar{a} }$
<p>Зв'язок між координатами вектора і координатами точки</p> $\overline{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$	
<p>Дії над векторами, заданими в координатній формі:</p> $\bar{a} + \bar{b} = (a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z);$ $\bar{a} - \bar{b} = (a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z);$ $\lambda \bar{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)$	
<p>Умова колінеарності векторів</p>	$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$

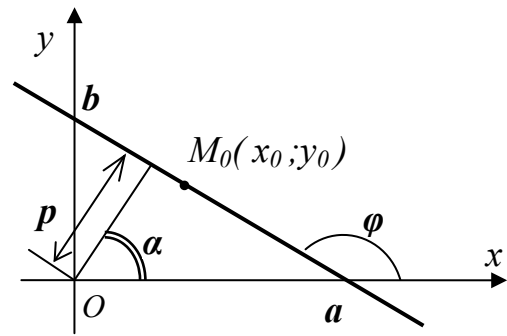
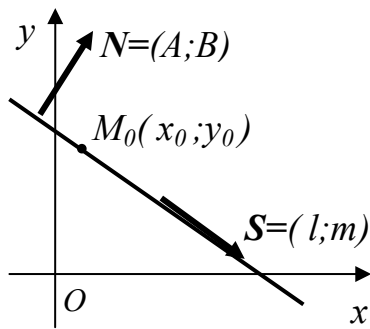
Скалярний та векторний добутки векторів

Добуток	скалярний	векторний
Позначення	$\vec{a} \cdot \vec{b}, (\vec{a}, \vec{b})$	$\vec{a} \times \vec{b}, [\vec{a}, \vec{b}]$
Тип величини	число	вектор
Означення	$ \vec{a} \vec{b} \cos(\vec{a}, \vec{b})$	$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, якщо: вектор \vec{c} перпендикулярний векторам \vec{a} і \vec{b} ; $ \vec{c} = \vec{a} \vec{b} \sin(\vec{a}, \vec{b})$; триїтка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – права
Властивості	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$ $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a} ^2$	$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$ $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ $\vec{a} \times \vec{a} = \mathbf{0}$
Добутки ортів	$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$ $\vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$	$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \mathbf{0}$ $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$ $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$
Обчислення в ДСК	$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$	$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$
Основні задачі	довжина вектора $ \vec{a} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ косинус куту між векторами $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \vec{b} }$ проекція вектора на інший вектор $np_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{b} } \vec{b}$ умова перпендикулярності $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$	площа паралелограма з сторонами \vec{a} і \vec{b} $S = \vec{a} \times \vec{b} $ площа трикутника $S_{\Delta} = \frac{ \vec{a} \times \vec{b} }{2}$ висота паралелограма $h_a = \frac{S}{ \vec{a} } = \frac{ \vec{a} \times \vec{b} }{ \vec{a} }$ висота трикутника $h_a = \frac{2S_{\Delta}}{ \vec{a} } = \frac{ \vec{a} \times \vec{b} }{ \vec{a} }$

Мішаний добуток векторів

Позначення	$\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ або $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$
Означення	$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$
Властивості	$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$
Обчислення у ДСК	$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$
Основні задачі	<p>умова компланарності трьох векторів $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$</p> <p>орієнтація трійки векторів:</p> <p style="text-align: right;">$\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$ – права трійка ;</p> <p style="text-align: right;">$\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$ – ліва трійка</p> <p>об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$</p> <p style="text-align: right;">$V_{\text{паралелепіпеда}} = \vec{a}\vec{b}\vec{c}$</p> <p>об'єм піраміди, побудованої на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$</p> <p style="text-align: right;">$V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{6} \vec{a}\vec{b}\vec{c}$</p> <p>висота паралелепіпеда</p> <p style="text-align: right;">$h = \frac{V_{\text{паралелепіпеда}}}{S_{\text{грані}}} = \frac{ \vec{a}\vec{b}\vec{c} }{ \vec{a} \times \vec{b} }$</p> <p>висота піраміди</p> <p style="text-align: right;">$h = \frac{3V_{\text{піраміди}}}{S_{\text{грані}}} = \frac{ \vec{a}\vec{b}\vec{c} }{ \vec{a} \times \vec{b} }$</p>

1.3. Прямі на площині



Основні види рівняння прямої

<p>Найпростіше рівняння $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$</p>	<p>Рівняння з кутовим коефіцієнтом $y = kx + b$, $k = \operatorname{tg} \varphi$</p>
<p>Загальне рівняння $Ax + By + C = 0$</p>	<p>Рівняння прямої, яка проходить у заданому напрямку (рівняння в'язки) $y - y_0 = k(x - x_0)$</p>
<p>Рівняння у відрізках на осях $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (перехід: $Ax + By = -C \quad :(-C)$)</p>	<p>Нормальне рівняння $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ (перехід: $Ax + By + C = 0 \quad \left \cdot \mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right.)$</p>
<p>Канонічне рівняння $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$</p>	<p>Рівняння прямої, яка проходить через дві точки $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$; $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$</p>
<p>Рівняння координатних осей</p>	<p>$Ox: y = 0$; $Oy: x = 0$</p>

Найпростіші задачі

Умова паралельності прямих	$k_2 = k_1$ або $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$
Умова перпендикулярності прямих	$k_2 = -\frac{1}{k_1}$ або $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$
Кут між прямими (гострий)	$\operatorname{tg} \phi = \left \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right = \left \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} \right $
Відстань від точки M до прямої	$d(M) = x_M \cos \alpha + y_M \sin \alpha - p $ або $d(M) = \frac{ Ax_M + By_M + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$

1.4. Криві другого порядку

*Класифікація кривих,
осі симетрії яких паралельні координатним осям*

$$\underline{Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0}$$

Ознака	Назва лінії
$A = B$	Коло
$A \neq B$, знаки A і B однакові	Еліпс
Знаки A і B різні	Гіпербола
$A = 0$ або $B = 0$	Парабола

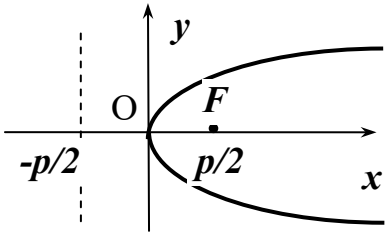
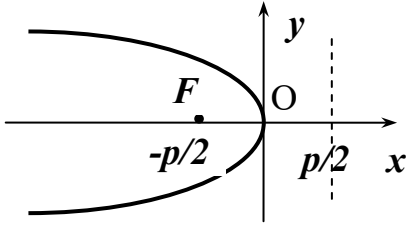
Еліпс і гіпербола з фокусами на осі Ox

Крива	Еліпс	Гіпербола
Рівняння	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Піввісі ($2a, 2b$ –вісі)	a –велика b –мала	a – дійсна b – уявна
Відстань від центра до фокусів	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$
Координати фокусів	$F_1(c; 0); F_2(-c; 0)$	$F_1(c; 0); F_2(-c; 0)$
Ексцентриситет	$\varepsilon = \frac{c}{a} (\varepsilon < 1)$	$\varepsilon = \frac{c}{a} (\varepsilon > 1)$
Рівняння директрис	$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} \left(x = \pm \frac{a^2}{c} \right)$	$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} \left(x = \pm \frac{a^2}{c} \right)$
Рівняння асимптот	—	$y = \pm \frac{b}{a} x$
Відстані від точки M до фокусів	$F_1M = r_1 = a - \varepsilon x_M$ $F_2M = r_2 = a + \varepsilon x_M$	$F_1M = r_1 = a - \varepsilon x_M $ $F_2M = r_2 = a + \varepsilon x_M $
Рисунок		

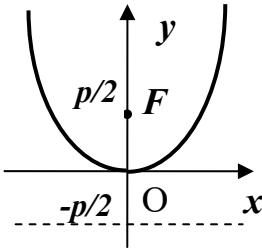
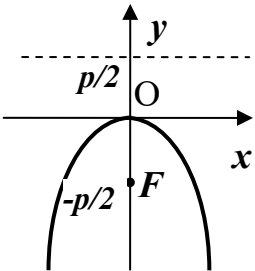
Еліпс і гіпербола з фокусами на осі Oy

Крива	Еліпс	Гіпербола
Рівняння	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a < b$	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Піввісі ($2a, 2b$ –вісі)	a – мала b – велика	a – уявна b – дійсна
Відстань від центра до фокусів	$c = \sqrt{b^2 - a^2}$	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$
Координати фокусів	$F_1(0;c); F_2(0; -c)$	$F_1(0;c); F_2(0; -c)$
Ексцентриситет	$\varepsilon = \frac{c}{b} (\varepsilon < 1)$	$\varepsilon = \frac{c}{b} (\varepsilon > 1)$
Рівняння директрис	$x = \pm \frac{b}{\varepsilon} \left(x = \pm \frac{b^2}{c} \right)$	$x = \pm \frac{b}{\varepsilon} \left(x = \pm \frac{b^2}{c} \right)$
Рівняння асимптот	—	$y = \pm \frac{b}{a} x$
Відстані від точки M до фокусів	$F_1M = r_1 = b - \varepsilon y_M$ $F_2M = r_2 = b + \varepsilon y_M$	$F_1M = r_1 = b - \varepsilon y_M $ $F_2M = r_2 = b + \varepsilon y_M $
Рисунок		

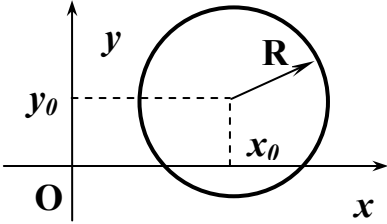
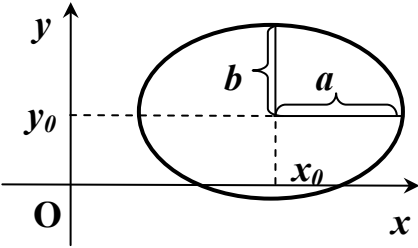
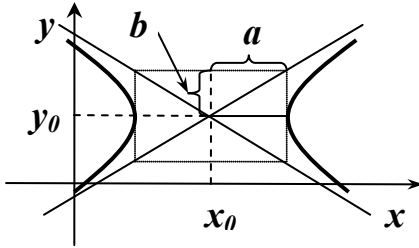
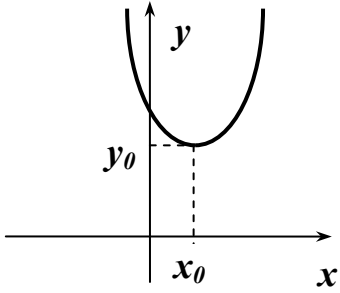
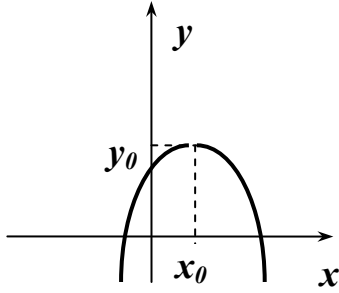
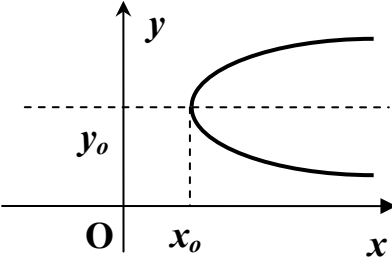
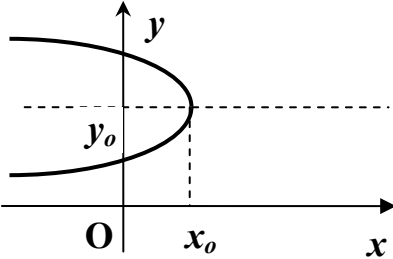
Параболи, симетричні відносно осі Ox

Рівняння	$y^2 = 2px$	$y^2 = -2px$
Координати фокуса	$F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$	$F\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$
Рівняння директриси	$x = -\frac{p}{2}$	$x = \frac{p}{2}$
Рисунок		

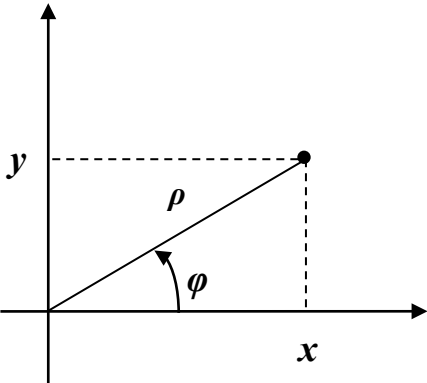
Параболи, симетричні відносно осі Oy

Рівняння	$x^2 = 2py$	$x^2 = -2py$
Координати фокуса	$F\left(0; \frac{p}{2}\right)$	$F\left(0; -\frac{p}{2}\right)$
Рівняння директриси	$y = -\frac{p}{2}$	$y = \frac{p}{2}$
Рисунок		

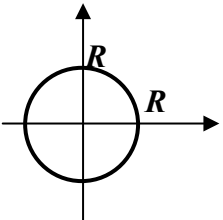
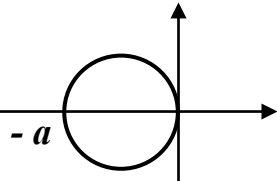
Зсунені криві

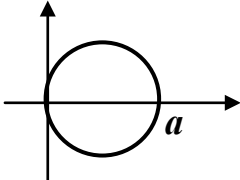
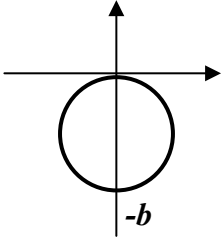
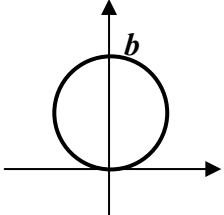
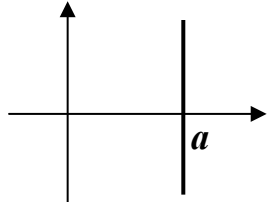
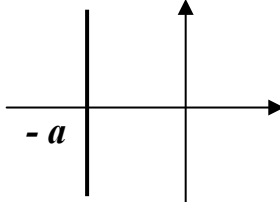
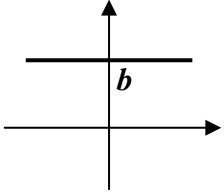
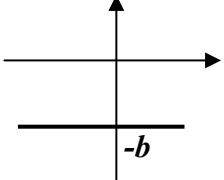
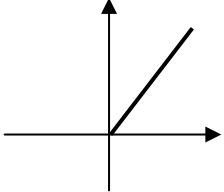
<p>Коло $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$</p>	
<p>Еліпс $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$</p> 	<p>Гіпербола $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$</p> 
<p>Параболи $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$</p> 	<p>$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$</p> 
<p>$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$</p> 	<p>$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$</p> 

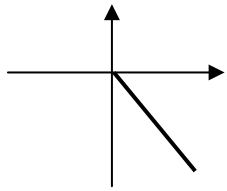
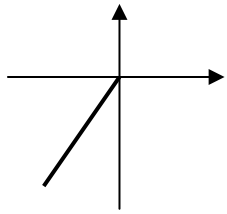
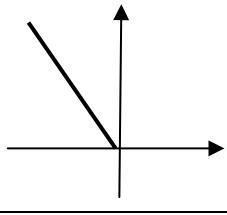
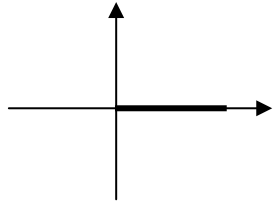
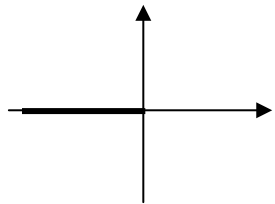
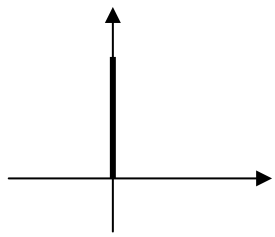
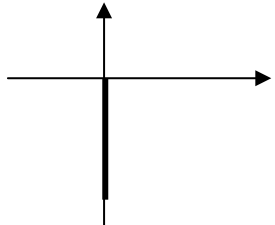
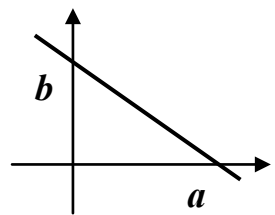
1.5. Полярні координати

	$x = \rho \cos \varphi; y = \rho \sin \varphi$
	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2};$ $\varphi = \begin{cases} + \arccos \frac{x}{\rho}, & y \geq 0 \\ - \arccos \frac{x}{\rho}, & y < 0 \end{cases}, \varphi \in (-\pi; \pi]$ <p>або</p> $\varphi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\rho}, & y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{\rho}, & y < 0 \end{cases}, \varphi \in [0; 2\pi)$

Коло та пряма в полярних координатах

Рівняння в декартових координатах	Рисунок	Рівняння в полярних координатах
$x^2 + y^2 = R^2$		$\rho = R$ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi \text{ або } -\pi \leq \varphi \leq \pi)$
$x^2 + y^2 + ax = 0$		$\rho = -a \cos \varphi$ $\left(\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} \right)$

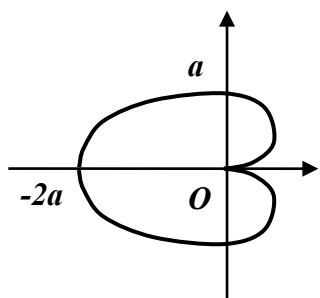
$x^2 + y^2 - ax = 0$		$\rho = a \cos \varphi$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right)$
$x^2 + y^2 + by = 0$		$\rho = -b \sin \varphi$ $(-\pi \leq \varphi \leq 0 \text{ або } \pi \leq \varphi \leq 2\pi)$
$x^2 + y^2 - by = 0$		$\rho = b \sin \varphi$ $(0 \leq \varphi \leq \pi)$
$x = a$		$\rho = \frac{a}{\cos \varphi}$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right)$
$x = -a$		$\rho = -\frac{a}{\cos \varphi}$ $\left(\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} \right)$
$y = b$		$\rho = \frac{b}{\sin \varphi}$ $(0 \leq \varphi \leq \pi)$
$y = -b$		$\rho = -\frac{b}{\sin \varphi}$ $(-\pi \leq \varphi \leq 0 \text{ або } \pi \leq \varphi \leq 2\pi)$
$y = kx, x \geq 0$		$\varphi = \arctg k$

$y = -kx, x \geq 0$		$\varphi = -\arctg k$ або $\varphi = 2\pi - \arctg k$
$y = kx, x \leq 0$		$\varphi = \pi + \arctg k$ або $\varphi = -\pi + \arctg k$
$y = -kx, x \leq 0$		$\varphi = \pi - \arctg k$
$y = 0, x \geq 0$		$\varphi = 0$ або $\varphi = 2\pi$
$y = 0, x \leq 0$		$\varphi = \pi$ або $\varphi = -\pi$
$x = 0, y \geq 0$		$\varphi = \frac{\pi}{2}$
$x = 0, y \leq 0$		$\varphi = -\frac{\pi}{2}$ або $\varphi = \frac{3\pi}{2}$
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$		$\rho = \frac{1}{\frac{\cos \varphi}{a} + \frac{\sin \varphi}{b}}$

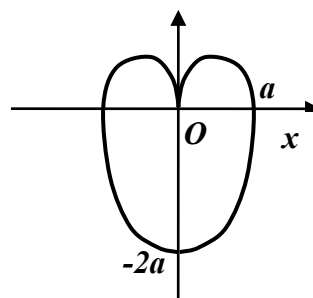
Деякі лінії в полярних координатах

Кардіоїда

$$\rho = a(1 - \cos \varphi)$$

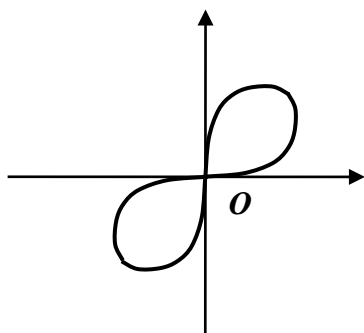


$$\rho = a(1 - \sin \varphi)$$

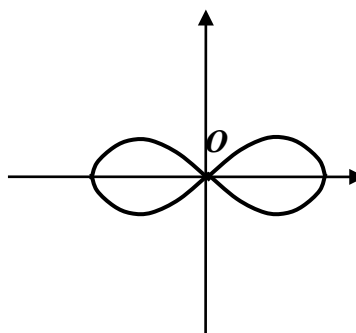


Розетки (рози)

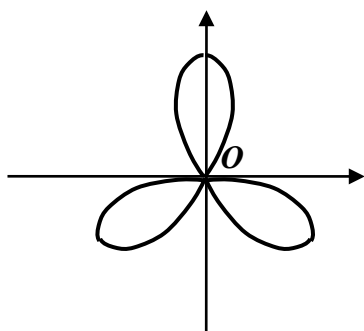
двопелюсткова $\rho = a \sin 2\varphi$



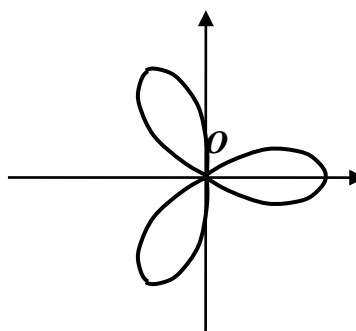
двопелюсткова $\rho = a \cos 2\varphi$



трипелюсткова $\rho = a \sin 3\varphi$



трипелюсткова $\rho = a \cos 3\varphi$

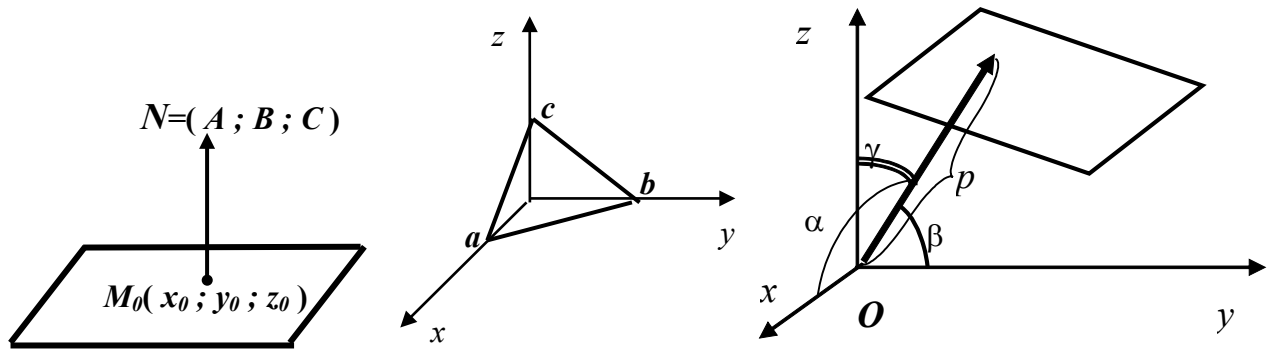


Криві другого порядку $\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$

(поліус знаходиться у фокусі лінії;
 ε —ексцентриситет)

$0 < \varepsilon < 1$ — еліпс;
 $\varepsilon = 1$ — парабола;
 $\varepsilon > 1$ — гіпербола;

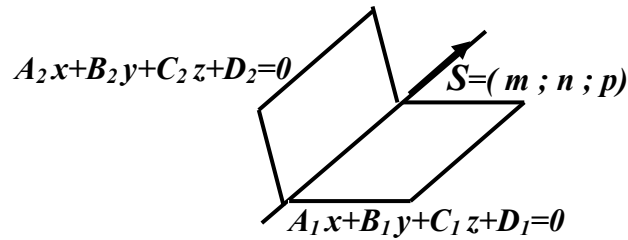
1.6. Площини в просторі



Основні форми рівняння площини

Назва	Загальний вид	Геометричний зміст параметрів
Найпростіше	$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$	A, B, C – координати вектора нормалі ; x_0, y_0, z_0 – координати деякої точки площини
Загальне	$Ax + By + Cz + D = 0$	A, B, C – координати вектора нормалі
У відрізках на осях	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$	a, b, c – координати точок перетину площини з осями Ox, Oy та Oz відповідно
Нормальне	$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$	α, β, γ – кути, які створює з осями Ox, Oy та Oz проведена з початку координат до площини нормаль
Рівняння площини, яка проходить через три точки	$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$	$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ та (x_3, y_3, z_3) – координати трьох точок, які належать площині

1.7. Прямі в просторі



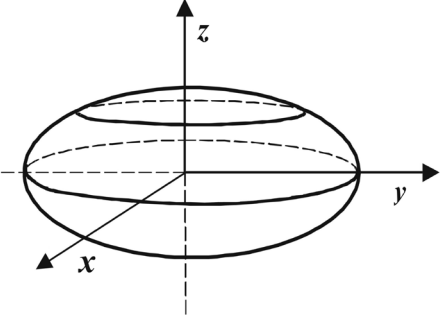
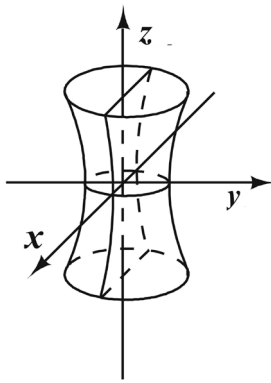
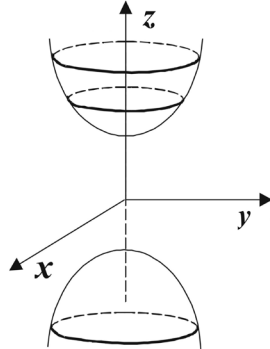
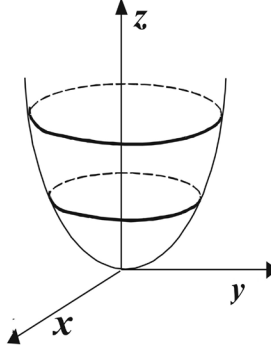
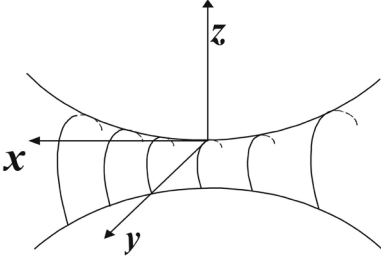
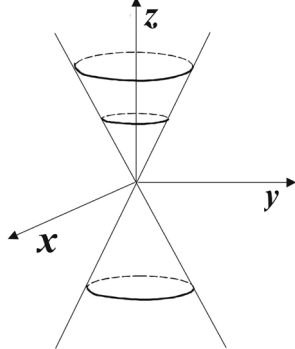
Основні форми рівнянь прямої

Назва	Загальний вид рівнянь	Геометричний зміст параметрів
Загальні	$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$	Пряма розглядається як лінія перерізу двох площин з нормальними векторами $\bar{N}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ та $\bar{N}_2 = (A_2; B_2; C_2)$
Канонічні	$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$	l, m, n — координати напрямного вектора прямої; (x_0, y_0, z_0) — координати точки, яка належить прямій
Параметричні	$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$	l, m, n — координати напрямного вектора прямої; (x_0, y_0, z_0) — координати точки, яка належить прямій
Рівняння прямої, яка проходить через дві точки	$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$	(x_1, y_1, z_1) та (x_2, y_2, z_2) — координати двох точок, які належать прямій

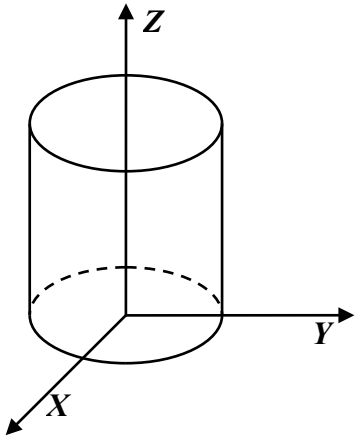
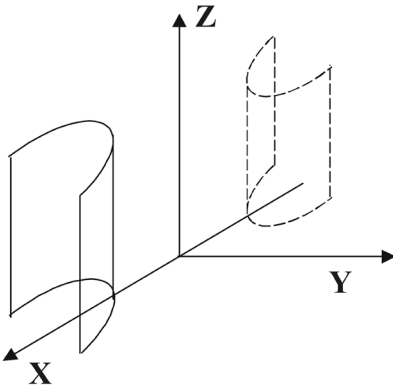
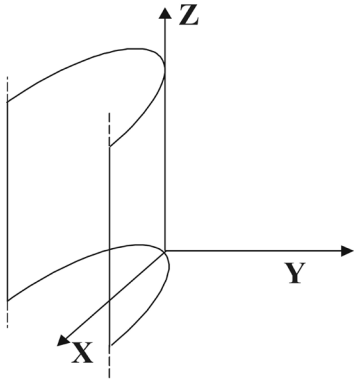
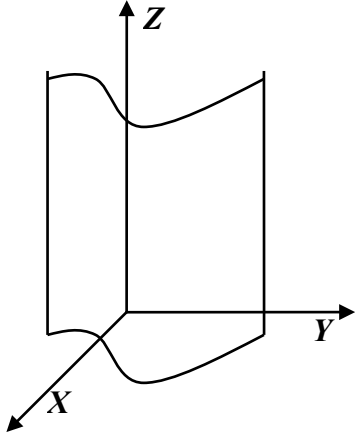
1.8. Найпростіші задачі теорії площин та прямих

Кути	між площинами	$\cos \varphi = \frac{ \bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2 }{ \bar{N}_1 \bar{N}_2 }$
	між прямими	$\cos \varphi = \frac{ \bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2 }{ \bar{S}_1 \bar{S}_2 }$
	між прямою та площиною	$\sin \varphi = \frac{ \bar{N} \cdot \bar{S} }{ \bar{N} \bar{S} }$
Умови паралельності	площин	$\bar{N}_1 \parallel \bar{N}_2$
	прямих	$\bar{S}_1 \parallel \bar{S}_2$
	прямої та площини	$\bar{S} \perp \bar{N}$
Умови перпендикулярності	площин	$\bar{N}_1 \perp \bar{N}_2$
	прямих	$\bar{S}_1 \perp \bar{S}_2$
	прямої та площини	$\bar{S} \parallel \bar{N}$
Відстань від точки до площини	$d = x_M \cos \alpha + y_M \cos \beta + z_M \cos \gamma - p =$ $= \frac{ Ax_M + By_M + Cz_M + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$	
Рівняння координатних площин		
$Oxy : z = 0$	$Oyz : x = 0 ;$	$Oxz : y = 0$
Площини, паралельні координатним осям або площинам		
$\parallel Oxy : z = z_0$	$\parallel Oyz : x = x_0 ;$	$\parallel Oxz : y = y_0$
$\parallel Ox : By + Cz + D = 0$	$\parallel Oy : Ax + Cz + D = 0 ;$	$\parallel Oz : Ax + By + D = 0$

1.9. Поверхні другого порядку

<p>Еліпсоїд</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 	<p>Однопорожнинний гіперболоїд</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 
<p>Двопорожнинний гіперболоїд</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ 	<p>Еліптичний параболоїд</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ 
<p>Гіперболічний параболоїд</p> $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ 	<p>Конус 2-го порядку</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ 

Циліндричні поверхні

<p>Еліптичний циліндр</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 	<p>Гіперболічний циліндр</p> $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 	<p>Параболічний циліндр</p> $y^2 = 2px$ 
<p>Довільна циліндрична поверхня з твірною, паралельною до осі Oz</p> $F(x, y) = 0$		

Поверхні обертання

<p>Сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$</p>	<p>Еліпсоїд обертання $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$</p>
<p>Однопорожнинний гіперболоїд обертання</p>	$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
<p>Двопорожнинний гіперболоїд обертання</p>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$
<p>Параболоїд обертання $x^2 + y^2 = 2pz$</p>	

Розділ 2

ФУНКЦІЇ ТА ГРАНИЦІ

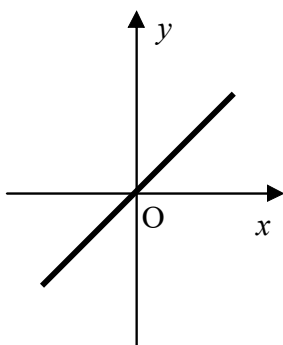
2.1. Основні елементарні функції

Функція	Область визначення	Область значень
$y = x^n$	$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$, n парне $(-\infty; +\infty)$, n непарне
$y = \frac{1}{x^n}$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(0; +\infty)$, n парне $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, n непарне
$y = \sqrt[n]{x}$	$[0; +\infty)$, n парне $(-\infty; +\infty)$, n непарне	$[0; +\infty)$, n парне $(-\infty; +\infty)$, n непарне
$y = \sin x$	$(-\infty; +\infty)$	$[-1; 1]$
$y = \cos x$	$(-\infty; +\infty)$	$[-1; 1]$
$y = \operatorname{tg} x$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$	$(-\infty; +\infty)$
$y = \operatorname{ctg} x$	$(\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in Z$	$(-\infty; +\infty)$
$y = \arcsin x$	$[-1; 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
$y = \arccos x$	$[-1; 1]$	$[0; \pi]$
$y = \operatorname{arctg} x$	$(-\infty; +\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
$y = \operatorname{arcctg} x$	$(-\infty; +\infty)$	$(0; \pi)$
$y = a^x$	$(-\infty; +\infty)$	$(0; +\infty)$
$y = \log_a x$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$

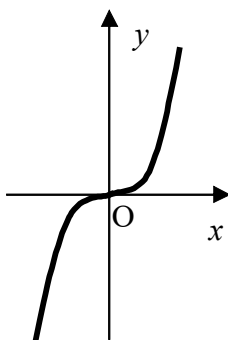
2.2. Графіки основних елементарних функцій

Степеневі функції

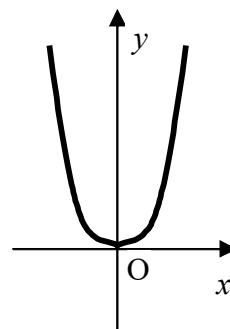
$$y = x$$



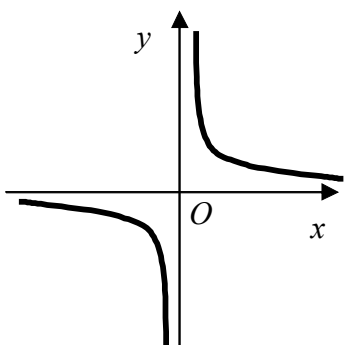
$$y = x^3, \quad y = x^{2n+1}$$



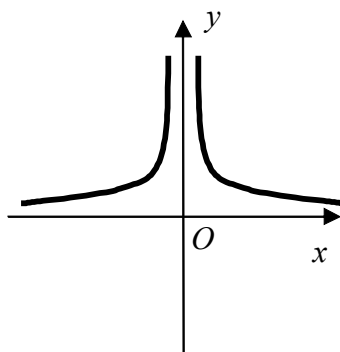
$$y = x^2, \quad y = x^{2n}$$



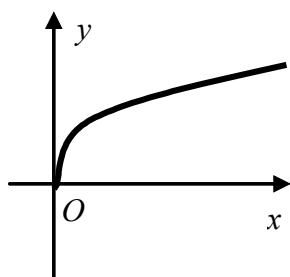
$$y = \frac{1}{x}, \quad y = \frac{1}{x^{2n+1}}$$



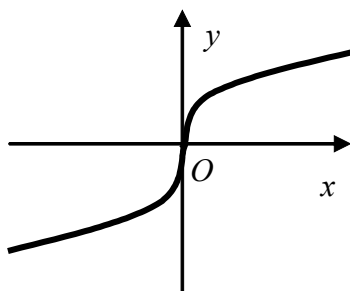
$$y = \frac{1}{x^2}, \quad y = \frac{1}{x^{2n}}$$



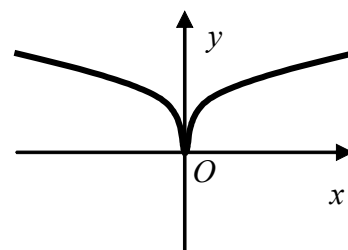
$$y = \sqrt{x}, \quad y = \sqrt[2n]{x}$$



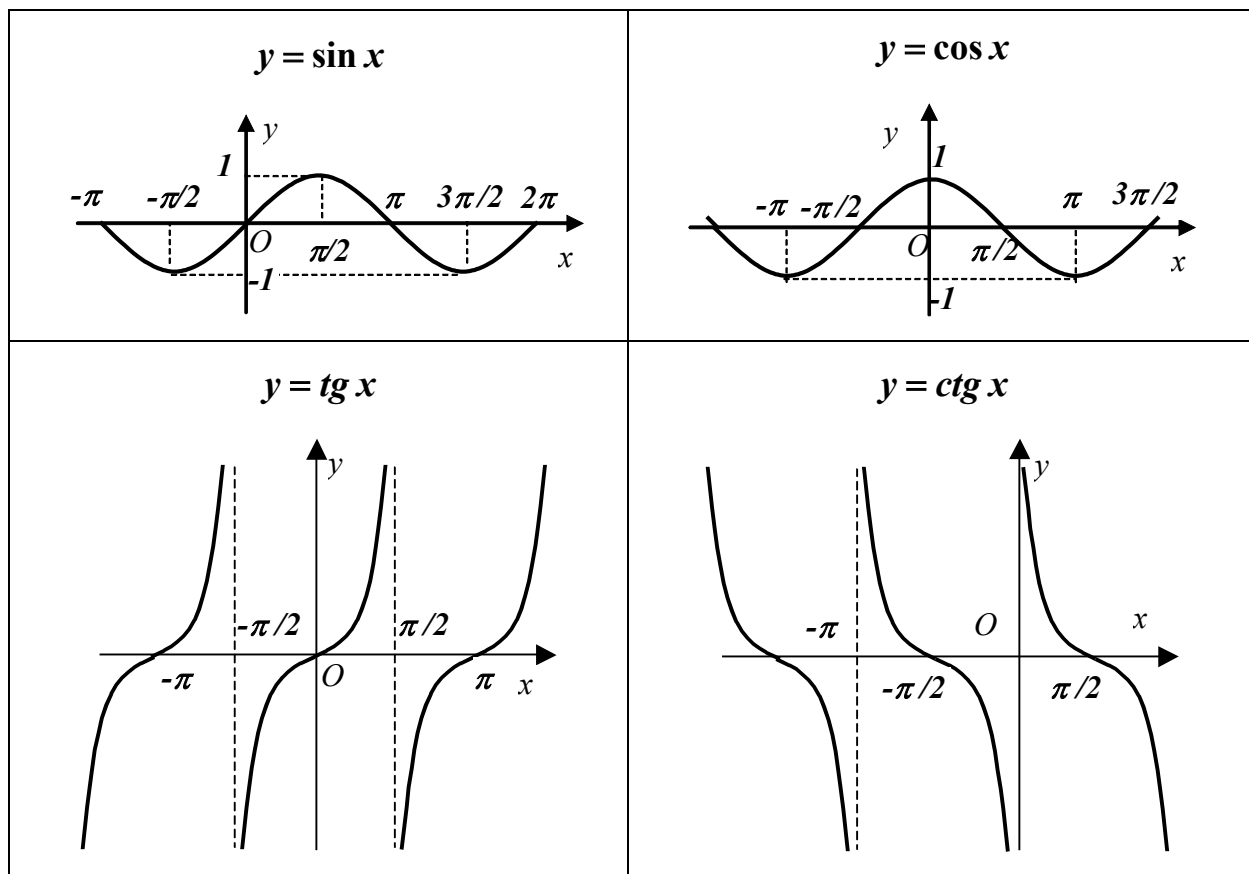
$$y = \sqrt[3]{x}, \quad y = \sqrt[2n+1]{x}$$



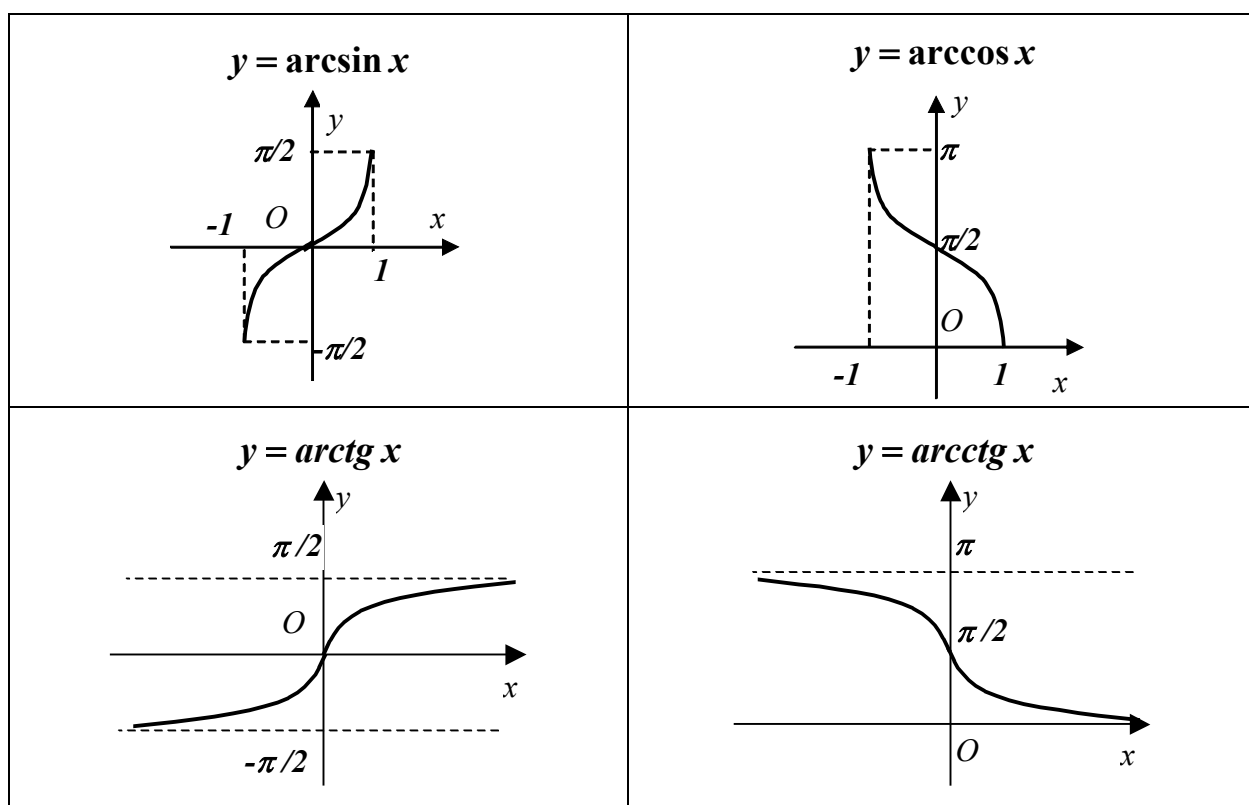
$$y = \sqrt[3]{x^2}, \quad y = \sqrt[2n+1]{x^{2m}} \quad (2n+1 > 2m)$$



Тригонометричні функції

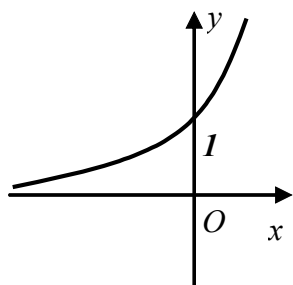


Обернені тригонометричні функції

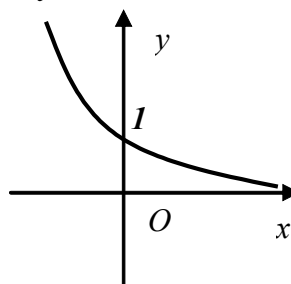


Показникові функції

$$y = a^x, a > 1$$

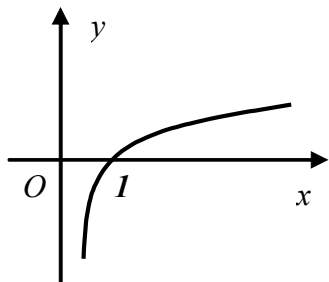


$$y = a^x, 0 < a < 1$$

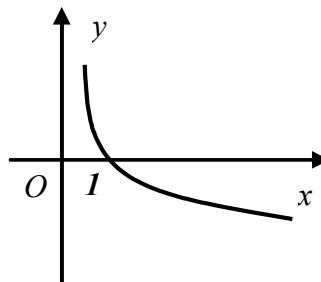


Логарифмічні функції

$$y = \log_a x, a > 1$$



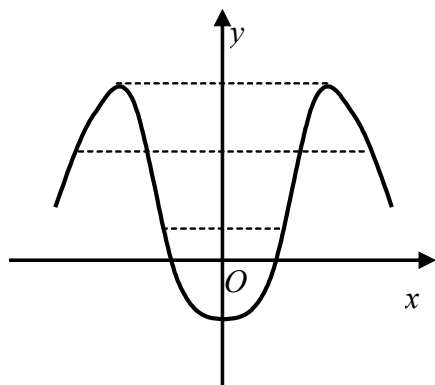
$$y = \log_a x, 0 < a < 1$$



2.3. Парні та непарні функції

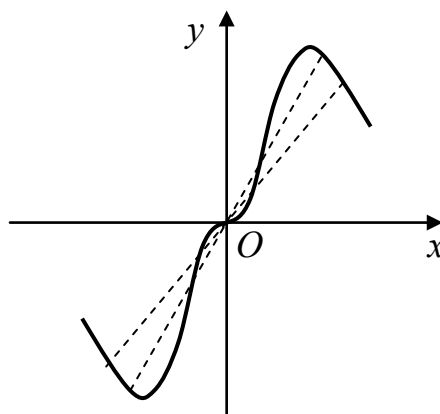
Парні функції

$$f(-x) = f(x)$$



Непарні функції

$$f(-x) = -f(x)$$



2.4. Властивості границь

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = b$
<p>1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$</p> <p>2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$</p> <p>3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$, якщо $b \neq 0$</p> <p>4. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = a^b$, якщо $a, b \neq 0$ одночасно</p>	<p>1. $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$</p> <p>2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$</p> <p>3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$, якщо $b \neq 0$</p> <p>4. $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)]^{g(x)} = a^b$, якщо $a, b \neq 0$ одночасно</p>

Невизначеності

$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$; $\left(\frac{0}{0}\right)$; $(0 \cdot \infty)$; $(\infty - \infty)$; (1^∞) ; (0^0) ; (∞^0)
--

2.5. Важливі границі

Перша важлива границя	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
Наслідки	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$
Друга важлива границя	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$; $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$
Наслідки	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \ln a$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

2.6. Методи розкриття невизначеностей

Раціональні функції. Факторіали

Структура функції	Граничне значення змінної	Невизначеність	Метод перетворення
Частка двох поліномів	$x \rightarrow \infty$	$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$	Поділити числівник і знаменник на найвищий степінь змінної та визначити нескінченно малі доданки
Частка двох поліномів	$x \rightarrow x_0$	$\left(\frac{0}{0}\right)$	Розкласти числівник і знаменник на множники, скоротити дроб на $(x - x_0)$
Сума або різниця двох дробів	$x \rightarrow x_0$	$(\infty - \infty)$	Перетворити вираз до одного дробу, за наявності невизначеності виду $(0/0)$ скоротити на $(x - x_0)$
Вираз з факторіалами	$n \rightarrow \infty$	$(\infty - \infty)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$	Обрати факторіал найбільшого виразу, інші за рекурентною формулою звести до обраного

Ірраціональні функції

Структура функції	Граничне значення змінної	Невизначеність	Метод перетворення
Дріб з коренями від поліномів	$x \rightarrow \infty$	$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$	Поділити числівник і знаменник на найвищий степінь змінної (з урахуванням добування коренів) та визначити нескінченно малі доданки
Дріб з коренями від поліномів	$x \rightarrow x_0$	$\left(\frac{0}{0}\right)$	Позбутися ірраціональності за допомогою формул скороченого множення та відокремити множник $(x - x_0)$; скоротити дроб на цей множник
Сума або різниця з коренями	$x \rightarrow \infty$	$(\infty - \infty)$	Позбутися ірраціональності за допомогою формул скороченого множення; якщо невизначеність не зникне, а трансформується до виду (∞/∞) , поділити числівник і знаменник на найвищий степінь змінної (з урахуванням добування коренів)

Застосування першої важливої границі

Структура функції	Граничне значення змінної	Невизначеність	Метод перетворення
Вираз з тригонометричними функціями	$x \rightarrow 0$	$\left(\frac{0}{0}\right)$ $(0 \cdot \infty)$	Перетворити суми тригонометричних функцій у добутки; множники, границі яких не дорівнюють 0 або ∞ , замінити цими границями; для кожного множника, що прямує до 0 , побудувати першу важливу границю
Вираз з тригонометричними функціями	$x \rightarrow x_0 \neq 0$	$\left(\frac{0}{0}\right)$ $(0 \cdot \infty)$	Перетворити суми тригонометричних функцій у добутки; множники, границі яких не дорівнюють 0 або ∞ , замінити цими границями; виконати заміну змінної $x - x_0 = t$ або $x_0 - x = t$ ($t \rightarrow 0$); для кожного множника, що прямує до 0 , побудувати першу важливу границю
Вираз з тригонометричними функціями	$x \rightarrow \infty$	$\left(\frac{0}{0}\right)$ $(0 \cdot \infty)$	Виконати заміну змінної $\frac{1}{x} = t$, $t \rightarrow 0$

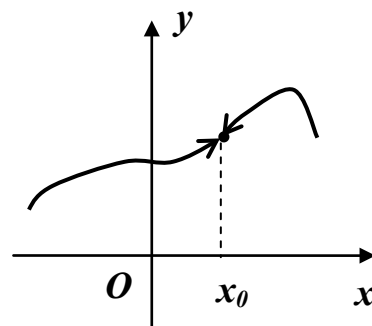
Застосування другої важливої границі

Структура функції	Граничне значення змінної	Невизначеність	Метод перетворення
Степенево-показникова функція	$x \rightarrow \infty$ $x \rightarrow x_0$	(1^∞)	Записати основу у вигляді суми 1 та нескінченно малої функції; побудувати другу важливу границю та перейти до границі в показнику
Вираз з логарифмом	Аргумент логарифма прямує до 1	$\left(\frac{0}{0}\right)$ $(0 \cdot \infty)$	Записати аргумент логарифма у вигляді суми 1 та нескінченно малої функції; побудувати другу важливу границю під знаком логарифма або використати відповідний наслідок другої важливої границі
Різниця логарифмів еквівалентних функцій	$x \rightarrow \infty$ $x \rightarrow x_0$	$\left(\frac{0}{0}\right)$ $(0 \cdot \infty)$ $(\infty - \infty)$	Перетворити різницю логарифмів у логарифм частки, яка прямує до 1 , та побудувати під знаком логарифма другу важливу границю або використати відповідний наслідок другої важливої границі

2.7. Неперервність функції. Точки розриву

Функція $y = f(x)$ є *неперервною* в точці x_0 , якщо

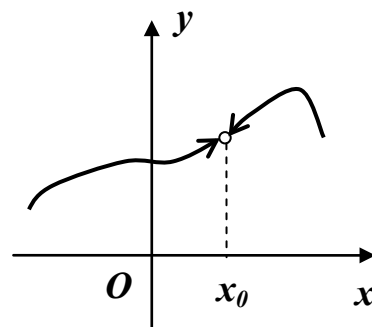
$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$



x_0 є точкою *усувного розриву 1-го роду*, якщо

$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ та $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ є скінченими, але

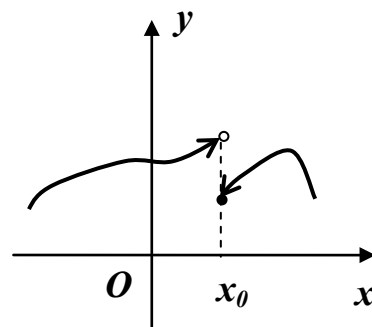
$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$$



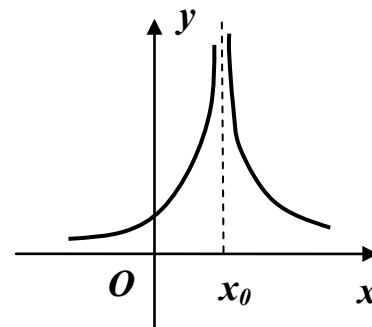
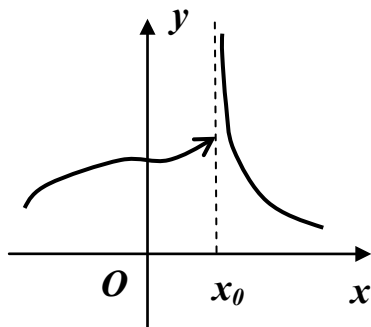
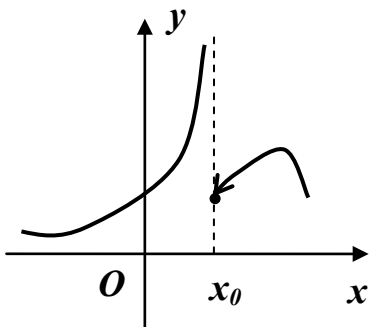
x_0 є точкою *неусувного розриву 1-го роду*, якщо

$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ та $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ є скінченими, але

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$$



x_0 є точкою *розриву 2-го роду*, якщо щонайменше одна з односторонніх границь $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ та $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ є нескінченною



Елементарні функції є неперервними на всій області визначення

Розділ 3

ПОХІДНІ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

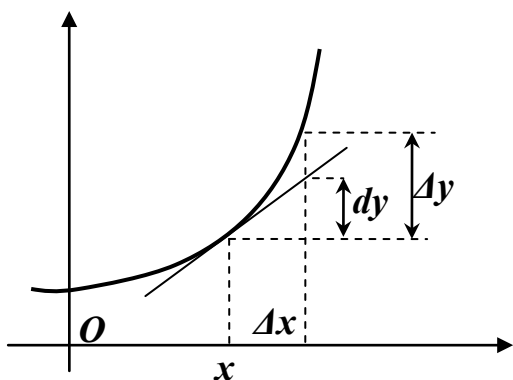
3.1. Обчислення похідних

Елементарні функції	Складені функції
1. $(x^n)' = n x^{n-1}$	1. $(u^n)' = n u^{n-1} \cdot u'$
2. $(x)' = 1$	2. ----
3. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	3. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
4. $(a^x)' = a^x \ln a$	4. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$
5. $(e^x)' = e^x$	5. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	6. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
7. $(\lg x)' = \frac{1}{x \ln 10}$	7. $(\lg u)' = \frac{1}{u \ln 10} \cdot u'$
8. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	8. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
9. $(\sin x)' = \cos x$	9. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
10. $(\cos x)' = -\sin x$	10. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
11. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	11. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
12. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	12. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
13. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	13. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
14. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	14. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
15. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	15. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
16. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	16. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Правила диференціювання

$C' = 0$	
$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$(u + C)' = u'$
$(uv)' = u'v + u v'$	$(C \cdot u)' = C \cdot u'$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u v'}{v^2}$	$\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}$
<p>Диференціювання складеної функції</p> <p>Якщо $[f(x)]' = \varphi(x)$, то $[f(kx)]' = k \cdot \varphi(kx)$,</p> <p style="text-align: right;">$[f(u(x))]' = \varphi(u(x)) \cdot u'(x)$</p>	
<p>Диференціювання функції $\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases}$, заданої <i>параметрично</i></p> $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$	
<p>Похідні вищих порядків</p> $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = (y')', \quad y''' = \frac{d^3 y}{dx^3} = (y'')', \quad \dots \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = (y^{(n-1)})'$	

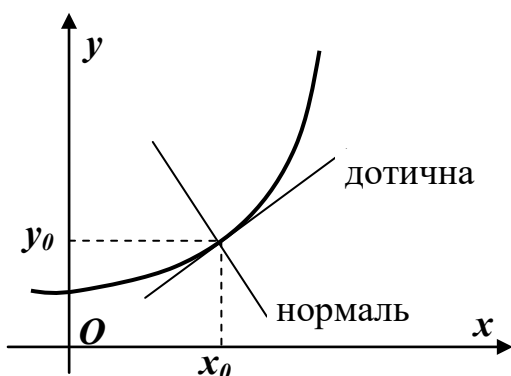
Диференціал та його геометричний зміст



$$dx = \Delta x,$$

$$dy = y' dx$$

Рівняння дотичної та нормалі до графіка функції



Рівняння дотичної

$$y - y_0 = y'_0 (x - x_0)$$

Рівняння нормалі

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'_0} (x - x_0)$$

Правило Лопіталя

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}; \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

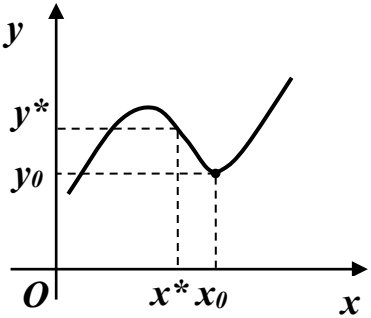
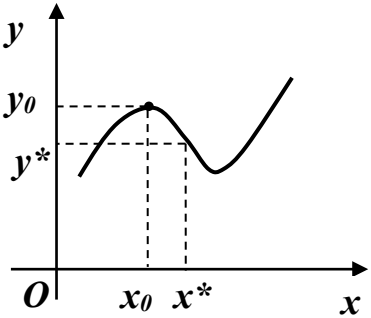
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}; \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3.2. Дослідження функцій

Монотонність

<i>Поняття</i>	Функція зростає	Функція спадає
<i>Означення</i>	Якщо $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$	Якщо $x_1 < x_2$, то $f(x_1) > f(x_2)$
<i>Критерій (достатня умова)</i>	$y' > 0$	$y' < 0$

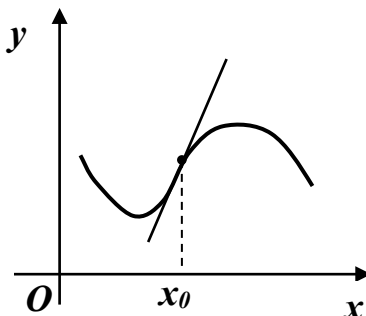
Екстремум

<p style="text-align: center;">Поняття</p>	<p style="text-align: center;">При $x = x_0$ функція має мінімум</p>	<p style="text-align: center;">При $x = x_0$ функція має максимум</p>
<p style="text-align: center;">Означення</p>	<p>Існує такий окіл точки x_0, що для будь-якої точки x^* з нього виконується умова $f(x^*) > f(x_0)$</p> 	<p>Існує такий окіл точки x_0, що для будь-якої точки x^* з нього виконується умова $f(x^*) < f(x_0)$</p> 
<p style="text-align: center;">Необхідна умова</p>	<p>Якщо у точці x_0 функція має екстремум, то така точка є критичною (тобто у цій точці $y' = 0$ або похідна не існує)</p>	
<p style="text-align: center;">Достатні умови</p>	<p>При переході через критичну точку x_0 похідна змінює знак</p> <p style="text-align: center;">- 0 +</p>	<p>При переході через критичну точку x_0 похідна змінює знак</p> <p style="text-align: center;">+ 0 -</p>
	<p>У критичній точці x_0 $y''(x_0) > 0$</p>	<p>У критичній точці x_0 $y''(x_0) < 0$</p>

Опуклість та вгнутість

Поняття	На деякому проміжку крива $y = f(x)$ є <i>опуклою</i> (опуклою <i>вгору</i>)	На деякому проміжку крива $y = f(x)$ є <i>вгнутою</i> (опуклою <i>вниз</i>)
Означення	Лінія розташована <i>нижче</i> дотичної, проведеної в будь-якій точці проміжку	Лінія розташована <i>вище</i> дотичної, проведеної в будь-якій точці проміжку
Критерій (достатня умова)	$y'' < 0$	$y'' > 0$

Точки перегину



Точка $(x_0; f(x_0))$ є *точкою перегину* лінії $y = f(x)$, якщо при переході через цю точку змінюється взаємне розташування кривої та дотичної до неї

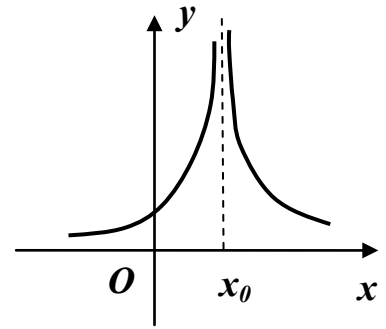
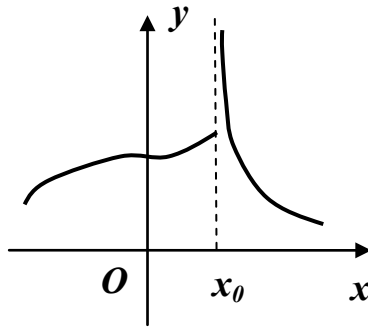
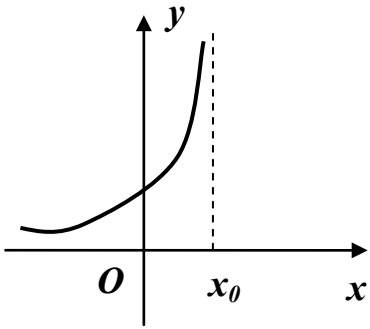
Необхідна умова: $y''(x_0) = 0$ або не існує

Достатня умова: y'' змінює знак

Асимптоти

Вертикальна

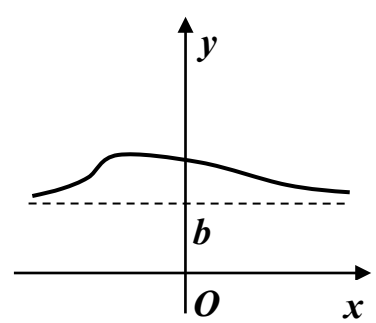
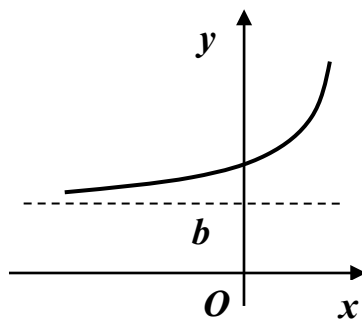
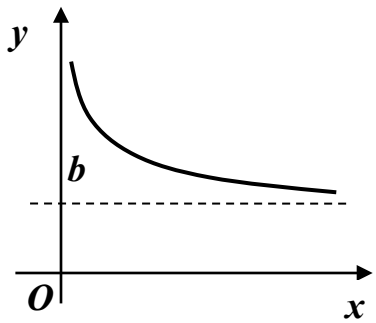
Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \infty$ або $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \infty$, то $x = x_0$ – вертикальна асимптота.



Невертикальні

Горизонтальна

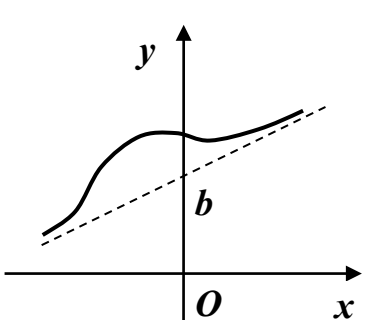
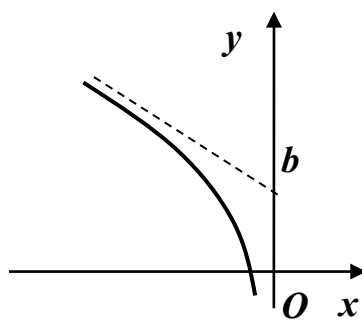
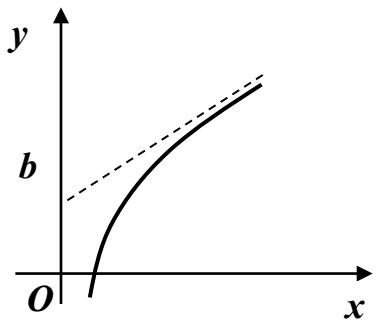
Якщо $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ або $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, то $y = b$ – горизонтальна асимптота



Похила

Якщо $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ та $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - k \cdot x] = b$, або $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ та

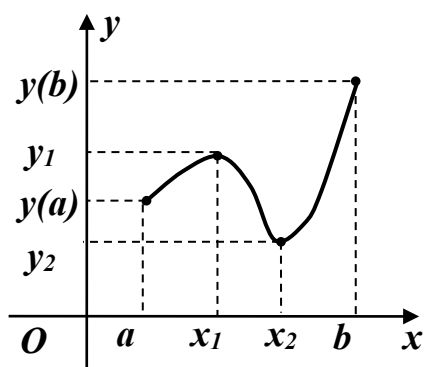
$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - k \cdot x] = b$, то $y = k \cdot x + b$ – похила асимптота



План дослідження функції для побудови графіка

1. Знайти область визначення функції.
2. Дослідити функцію на парність і непарність.
3. Знайти точки перетину графіка функції з координатними осями.
4. Дослідити функцію на неперервність, знайти точки розриву (якщо вони існують) та встановити характер розриву; знайти асимптоти кривої.
5. Знайти інтервали монотонності функції та екстремуми.
6. Знайти інтервали опуклості та вгнутості кривої і точки перегину.

Найбільше та найменше значення функції на відрізку



Найбільше та **найменше** значення функції на відрізку досягаються або на **границях** відрізка, або у **критичних точках**, які належать відрізку.

Найбільше значення $y(b)$ досягнуто на **границі** відрізка;
найменше значення y_2 є **мінімумом**.

Розділ 4

ФУНКЦІЇ ДЕКИЛЬКОХ ЗМІННИХ

4.1. Похідні та диференціали

Частинні похідні першого порядку

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{z(x + \Delta x; y) - z(x; y)}{\Delta x} \quad (\text{значення змінної } y \text{ залишається}$$

постійним)

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{z(x; y + \Delta y) - z(x; y)}{\Delta y} \quad (\text{значення змінної } x \text{ залишається}$$

постійним)

Диференціали першого порядку

Диференціали незалежних змінних $dx = \Delta x$; $dy = \Delta y$

Частинні диференціали $d_x z = z'_x dx$; $d_y z = z'_y dy$

Повний диференціал $dz = z'_x dx + z'_y dy$

Частинні похідні вищих порядків

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right);$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right); \quad z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) -$$

«*Мішані*» похідні, які відрізняються лише послідовністю диференціювання, *рівні* між собою, якщо є неперервними:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right), \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right), \dots$$

Диференціювання складених функцій

$z = f(x, y);$ $x = \varphi(t), \quad y = \phi(t)$ <div style="text-align: center;"> <pre> graph LR z --> x z --> y x --> t y --> t </pre> </div>	$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$
$z = f(x, y);$ $y = \varphi(x)$ <div style="text-align: center;"> <pre> graph LR z --> x z --> y y --> x </pre> </div>	$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}$
$z = f(x, y);$ $x = \varphi(u; v), \quad y = \phi(u; v)$ <div style="text-align: center;"> <pre> graph LR z --> x z --> y x --> u x --> v y --> u y --> v </pre> </div>	$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u},$ $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$

Диференціювання неявних функцій

$F(x, y, z) = 0$	$F(x, y) = 0$
$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} ;$ $\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$	$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$

4.2. Застосування частинних похідних

Рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні

Рівняння поверхні $F(x, y, z) = 0$	Рівняння дотичної площини $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M (y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M (z - z_0) = 0.$ Рівняння нормалі $\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M}.$
Рівняння поверхні $z = f(x, y)$	Рівняння дотичної площини $z - z_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_M (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_M (y - y_0).$ Рівняння нормалі $\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_M} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_M} = \frac{z - z_0}{-1}$

Екстремум функції двох змінних

Необхідні умови екстремуму	$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow M_i(x_i; y_i) - \text{стаціонарні точки}$
Достатня умова екстремуму	$\delta(M_i) = z''_{xx}(x_i, y_i) \cdot z''_{yy}(x_i, y_i) - [z''_{xy}(x_i, y_i)]^2.$ Якщо $\delta(M_i) < 0$, то в точці M_i екстремуму немає; $\delta(M_i) > 0$ та $z''_{xx}(x_i, y_i) > 0$ – мінімум; $\delta(M_i) > 0$ та $z''_{xx}(x_i, y_i) < 0$ – максимум; $\delta(M_i) = 0$ – потрібно додаткове дослідження.

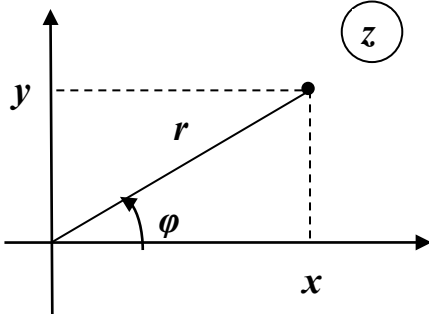
4.3. Похідна за даним напрямом. Градієнт функції

<p>Функція двох змінних $z = z(x, y)$</p>	<p>Похідна за напрямом l :</p> $\frac{\partial z}{\partial l} \Big _M = \frac{\partial z}{\partial x} \Big _M \cdot \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \Big _M \cdot \sin \alpha,$ <p>де α – кут між вектором l та віссю Ox.</p> <p>Градієнт :</p> $\mathbf{grad} z(M) = \frac{\partial z}{\partial x} \Big _M \cdot \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \Big _M \cdot \vec{j}$
<p>Функція трьох змінних $u = u(x, y, z)$</p>	<p>Похідна за напрямом l :</p> $\frac{\partial u}{\partial l} \Big _M = \frac{\partial u}{\partial x} \Big _M \cdot \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \Big _M \cdot \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \Big _M \cdot \cos \gamma,$ <p>де $\cos \alpha, \cos \alpha, \cos \alpha$ – напрямні косинуси вектора l</p> <p>Градієнт :</p> $\mathbf{grad} u(M) = \frac{\partial u}{\partial x} \Big _M \cdot \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \Big _M \cdot \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \Big _M \cdot \vec{k}$
<p style="text-align: center;">Зв'язок між градієнтом та похідною за напрямом</p> <p>Похідна за напрямом l дорівнює проекції градієнта на цей напрям:</p> $\frac{\partial z}{\partial l} \Big _M = np_{\vec{l}} \mathbf{grad} z(M), \text{ або}$ $\frac{\partial u}{\partial l} \Big _M = np_{\vec{l}} \mathbf{grad} u(M).$ <p>Градієнт відповідає напрямку найшвидшого зростання функції:</p> $\left(\frac{\partial z}{\partial l} \Big _M \right)_{\text{найбільш}} = \mathbf{grad} z(M) = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x} \Big _M \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \Big _M \right)^2}, \text{ або}$ $\left(\frac{\partial u}{\partial l} \Big _M \right)_{\text{найбільш}} = \mathbf{grad} u(M) = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big _M \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \Big _M \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \Big _M \right)^2}.$	

Розділ 5

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

5.1 Алгебраїчні операції над комплексними числами

	$z = (x; y)$ <p><i>Алгебраїчна</i> форма комплексного числа</p> $z = x + i y,$ <p>де $x = \operatorname{Re} z$ – дійсна частина; $y = \operatorname{Im} z$ – уявна частина; $i = (0; 1)$ – уявна одиниця, $i^2 = -1$.</p>
<p><i>Тригонометрична</i> форма</p> $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ <p><i>Показникова</i> форма</p> $z = r e^{i \varphi}$	<p>$r = z = \sqrt{x^2 + y^2}$ – модуль, $\tilde{\varphi} = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n$ – аргумент, $\varphi = \arg z$ – головне значення аргументу.</p> <p>$x = r \cos \varphi$; $y = r \sin \varphi$</p> $r = \sqrt{x^2 + y^2} ; \varphi = \begin{cases} + \arccos \frac{x}{r}, & y \geq 0 \\ - \arccos \frac{x}{r}, & y < 0 \end{cases}$

Дії з комплексними числами в алгебраїчній формі

Сума та різниця	$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$
Добуток	$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$
Спряження	$\bar{z} = x - i y ; \quad z \cdot \bar{z} = z ^2 = x^2 + y^2$
Частка	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$

Дії з комплексними числами в тригонометричній та показниковій формі

Добуток	$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
Частка	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$
Степінь	$z^n = r^n e^{i n \varphi} = r^n (\cos n \varphi + i \sin n \varphi)$
Корінь	$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), k = 0, 1, \dots, n-1$

5.2. Поліноми та алгебраїчні рівняння

Основні поняття	<p><i>Поліном</i> або <i>ціла раціональна функція</i> n-го степеня</p> $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n, a_0 \neq 0.$ <p><i>Алгебраїчне рівняння</i> n-го степеня</p> $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0.$ <p><i>Корінь</i> полінома або алгебраїчного рівняння:</p> $P_n(x_0) = 0 \Rightarrow P_n(x) = (x - x_0) \cdot Q_{n-1}(x).$
	<p align="center">Кратність коренів</p> <p>Якщо поліном ділиться на $(x - x_0)^k$, але не ділиться на $(x - x_0)^{k+1}$, то число x_0 є <i>коренем k-тої кратності</i> :</p> $P_n(x) = (x - x_0)^k \cdot Q_{n-k}(x), Q_{n-k}(x_0) \neq 0.$ <p>Якщо <i>комплексне</i> число є коренем полінома з <i>дійсними</i> коефіцієнтами, то <i>спряжене</i> число також є <i>коренем тієї ж кратності</i>.</p>

Теорема Гаусса

Поліном n -го степеня має рівно n коренів, якщо кожен корінь враховувати стільки разів, якою є його кратність.

Поліном з дійсними коефіцієнтами можна записати як добуток лінійних та квадратичних множників з дійсними коефіцієнтами

Розв'язування деяких алгебраїчних рівнянь

Квадратні рівняння з від'ємним дискримінантом	Двочленні рівняння
$az^2 + bz + c = 0 \quad (D = b^2 - 4ac < 0)$	$z^n - c = 0$
$z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{ D }}{2a}$	$z_k = \sqrt[n]{ c } \cdot e^{i \frac{\operatorname{arg} c + 2\pi(k-1)}{n}}, \quad k = \overline{1, n}$

ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.
2. Ильин В.А., Позняк Е.Г. Аналитическая геометрия: – М.: Физматлит, 2002.– 240 с.
3. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.– М.: Наука, 1979.– 511 с.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1: – М.: Наука, 1972.– 456 с.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1: – М.: Наука, 1970.– 608 с.
6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 1. – М.: Оникс, 2003. – 304 с.

З М І С Т

Розділ 1

Алгебра та аналітична геометрія

1.1. Матриці та визначники. Системи лінійних рівнянь	4
1.2. Основи векторної алгебри	6
1.3. Прямі на площині	9
1.4. Криві другого порядку	10
1.5. Полярні координати	14
1.6. Площини в просторі	19
1.7. Прямі в просторі	20
1.8. Найпростіші задачі теорії площин та прямих	21
1.9. Поверхні другого порядку	22

Розділ 2

Функції та границі

2.1. Основні елементарні функції	24
2.2. Графіки основних елементарних функцій.....	25
2.3. Парні та непарні функції	27
2.4. Властивості границь	28
2.5. Важливі границі	28
2.6. Методи розкриття невизначеностей	29
2.7. Неперервність функції. Точки розриву	33

Розділ 3

Похідні та їх застосування

3.1. Обчислення похідних	35
3.2. Дослідження функцій	37

Розділ 4

Функції декількох змінних

4.1. Похідні та диференціали	42
4.2. Застосування частинних похідних	44
4.3. Похідна за даним напрямом. Градієнт функції	45

Розділ 5

Комплексні числа

5.1 Алгебраїчні операції над комплексними числами	46
5.2. Поліноми та алгебраїчні рівняння	47
ЛІТЕРАТУРА	48

Навчальне видання

Білова Оксана Вікторівна
Кочеткова Інна Борисівна

**ВИЩА МАТЕМАТИКА
ДЛЯ СТУДЕНТІВ ІЗ ПРОБЛЕМАМИ СЛУХУ**

Навчальний посібник-довідник

Тематичний план 2019, поз. 58

Підписано до друку 10.04.2019. Формат 60x84 ¹/₁₆. Папір друк. Друк плоский.

Облік.-вид. арк. 2,94. Умов. друк. арк. 2,90. Замовлення № 66

Національна металургійна академія України

49600, м. Дніпро, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ