

**НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ**

**КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА  
ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ**

**Швачич Г.Г., Соболенко О.В., Христян В.І.**

## **Методичні вказівки**

для студентів заочного факультету  
щодо вивчення дисципліни

# **ЕКОНОМЕТРІЯ**

**Дніпропетровськ  
2010**

Методичні вказівки студентам заочного факультету щодо вивчення дисципліни “Економетрія” /Укл.: Г.Г. Швачич, О.В. Соболенко, В.І. Христян – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2010. – 40 с.

Укладачі: Г.Г. Швачич, канд. техн. наук, проф.,  
О.В. Соболенко, канд. техн., доц.  
В.І. Христян, ст. викл.

Відповідальний за випуск: Г.Г. Швачич, канд. техн. наук, проф., зав. кафедрою прикладної математики та обчислювальної техніки

**ЗМІСТ**

|   |    |
|---|----|
| 1. Розподіл навчальних годин.....                   | 4  |
| 2. Характеристика дисципліни.....                   | 4  |
| 3. Програма дисципліни “Економерія” .....           | 5  |
| 4. Рекомендована література .....                   | 8  |
| 4.1. Основна.....                                   | 8  |
| 4.2. Додаткова.....                                 | 8  |
| 5. Вказівки щодо виконання контрольних робіт.....   | 9  |
| 6. Задачі для виконання індивідуальних робіт .....  | 12 |
| 7. Питання для самоконтролю і контролю знань.....   | 37 |
| 8. Варіант тесту.....                               | 38 |
| 9. Таблиця варіантів завдань контрольних робіт..... | 39 |
| 10. Статистичні таблиці.....                        | 44 |

## 1 .Розподіл навчальних годин

|   | Усього    | с е м е с т р и |    |     |           |
|---|-----------|-----------------|----|-----|-----------|
|   |           | I               | II | III | IV        |
| <b>Усього годин за навчальним планом</b>                      | <b>81</b> |                 |    |     | <b>81</b> |
| у тому числі:   |           |                 |    |     |           |
| <i>Аудиторні заняття</i>                                      | <b>24</b> |                 |    |     | <b>24</b> |
| з них:  |           |                 |    |     |           |
| лекції  | <b>16</b> |                 |    |     | <b>16</b> |
| лабораторні роботи  | <b>8</b>  |                 |    |     | <b>8</b>  |
| практичні заняття   | -         |                 |    |     | -         |
| семінарські заняття   | -         |                 |    |     | -         |
| <i>Самостійна робота</i>                                      | <b>57</b> |                 |    |     | <b>57</b> |
| у тому числі при :  |           |                 |    |     |           |
| підготовці до аудиторних занять                               | <b>12</b> |                 |    |     | <b>12</b> |
| підготовці до модульних контрольних робіт                     | <b>12</b> |                 |    |     | <b>12</b> |
| виконанні курсових проектів (робіт)                           | -         |                 |    |     | -         |
| виконанні індивідуальних завдань                              | -         |                 |    |     | -         |
| опрацюванні розділів програми, які не викладаються на лекціях | <b>33</b> |                 |    |     | <b>33</b> |
| <i>Підсумковий контроль</i>                                   | Залік     |                 |    |     | Залік     |

## 2. Характеристика дисципліни

Навчальна дисципліна «Економетрія» є нормативною і входить до циклу дисциплін природничо - наукової та загально - економічної підготовки.

**Мета вивчення дисципліни** – засвоєння знань та придбання навичок, необхідних для засвоєння дисциплін професійно – практичної підготовки, в ознайомленні студентів з основами економетричних методів, необхідних для розв’язування теоретичних та практичних задач економіки. Без них неможливо побудувати надійний прогноз. В даному курсі викладаються основні економетричні моделі і методи їх визначення.

В результаті вивчення дисципліни студент повинен знати:

- складові частини економетрії;
- основні економетричні функції і методи їх визначення;
- методи розв’язування економічних задач.

Вміти

- будувати економіко-статистичні моделі;

- знаходити оптимальний розв'язок;
- давати рекомендації щодо практичного впровадження отриманих результатів.

**Критерії успішності** – отримання позитивної оцінки при складанні контрольної роботи та захисті лабораторних робіт.

**Засоби діагностики успішності навчання**- комплект тестових завдань, комплект лабораторних робіт.

**Зв'язок з іншими курсами**- дисципліна є завершальною при фундаментальній підготовці бакалаврів напряму «Економіка підприємства», «Облік та аудит», «Фінанси та кредит».

Набуті знання і вміння використовуються при вивченні багатьох дисциплін професійно-практичної підготовки.

### 3. Програма дисципліни “Економетрія”

#### Лекційний курс

| № тем | Назва розділу / теми та її зміст  | Тривалість (годин) |
|-------|---|--------------------|
| 1     | 2   | 3                  |
| 1     | ДЕТЕРМІНОВАНІ МОДЕЛІ ЕКОНОМЕТРІЇ.<br>Моделі функцій попиту та пропозиції. Еластичність функцій. Павутиноподібна модель ринку. Застосування функції еластичності попиту за ціною для визначення максимального прибутку.  | 3                  |
| 2     | ПРИНЦИПИ ПОБУДОВИ ЕКОНОМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ.<br>ПАРНА ЛІНІЙНА РЕГРЕСІЯ<br>Модель парної лінійної регресії. Побудова парної лінійної регресії методом найменших квадратів.<br>Якість оцінювання моделі парної регресії. Властивості, економічна інтерпретація і оцінка параметрів лінійного рівняння регресії. Перевірка значущості її параметрів регресійної моделі. Оцінка значущості коефіцієнта кореляції. Критерії Стьюдента і Фішера. Література [1- 7] | 3                  |

|   |   |   |
|---|---|---|
| 3 | <p style="text-align: center;"><b>ЛІНІЙНІ МОДЕЛІ МНОЖИННОЇ РЕГРЕСІЇ</b></p> <p>Інтервали прогнозу по лінійному рівнянню регресії. Побудова довірчих інтервалів. Стандартні помилки коефіцієнтів регресії. Середня помилка апроксимації. Нелінійна регресія. Схема застосування методу найменших квадратів в нелінійних моделях. Системи нормальних рівнянь для нелінійних моделей. Кореляція для нелінійної регресії. Література [1,2, 4, 7]</p>  | 6 |
| 4 | <p style="text-align: center;"><b>УЗАГАЛЬНЕНІ ЕКОНОМЕТРИЧНІ МОДЕЛІ</b></p> <p>Модель множинної регресії. Специфікація змінних в моделях множинної регресії. Процедура покрокового відбору змінних.</p> <p>Відбір чинників при побудові множинної регресії. Матриця парних кореляцій.</p> <p>Поняття мультиколінеарності. Вибір форми рівняння множинної регресії. Частинні випадки рівняння регресії. Властивості, економічна інтерпретація і оцінка коефіцієнтів рівняння множинної регресії. Визначення оцінки надійності результатів множинної регресії і кореляції. Література [1-3,5-7].</p> | 4 |

### Лабораторні заняття

| №№<br>робот | Назва роботи   | Тривалість<br>(годин) |
|-------------|--|-----------------------|
| 1           | Павутиноподібна модель ринку. Застосування функції еластичності попиту за ціною для визначення максимального прибутку.     | 4                     |
| 2           | Моделі парної лінійної регресії. Побудова парної регресії методом найменших квадратів. Перевірка значущості її параметрів. | 2                     |
| 3           | Перевірка адекватності математичної моделі.  | 2                     |

### Опрацювання розділів програми, які не викладаються на лекціях

| №№ теми | Назва теми  | Тривалість (годин) |
|---------|---|--------------------|
| 1       | <p>ЛІНІЙНІ МОДЕЛІ МНОЖИННОЇ РЕГРЕСІЇ</p> <p>Перевірка загальної якості рівняння регресії і виконання передумов методу найменших квадратів. Статистика Дарбіна-Уотсона. Поняття автокореляції. Стохастичні і інструментальні змінні. Характеристика помилок вимірювання. Фіктивні змінні в множинній регресії. Нелінійні моделі множинної регресії. Прогнозування в моделях множинної регресії. Література [1,6, 7].</p>   | 8                  |
| 2       | <p>УЗАГАЛЬНЕНІ ЕКОНОМЕТРИЧНІ МОДЕЛІ</p> <p>Принципи порівняльного аналізу різних макроекономічних моделей. Оцінка функцій попиту і пропозиції. Паутиноподібна модель ринку. Визначення граничного прибутку за допомогою функції еластичності попиту за ціною. Оцінка виробничих функцій. Оцінка макромоделі Клейна. Оцінка моделі інфляції. Оцінка функції чистого експорту. Оцінка моделі короткострокового макроекономічного розвитку на прикладі США (модель IS-LM). Оцінка моделі фірми. Література [1, 3, 4-8].</p>  | 10                 |
| 3       | <p>ЕКОНОМЕТРИЧНІ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ</p> <p>Часовий ряд і його основні елементи. Визначення тренда. Моделювання тенденції часового ряду. Лінійні стаціонарні і нестаціонарні моделі та їх ідентифікація. Екстраполяція і прогнозування. Визначення оцінки параметрів моделювання динамічних процесів: розподіл Койко, часткове корегування, адаптивні очікування, гіпотеза Фрідмена, розподільні Лаги Алмон, раціональні очікування, прогнози, метод Бокса-Дженкінса, тести на стійкість (тест Чоу, F-тест на стабільність коефіцієнтів, оцінка якості прогнозів, коефіцієнт Тейла). Моделі сезонних часових рядів. Загальна процедура виділення трендової та сезонної складових в адитивних і мультиплікативних моделях. Використання ковзної середньої за рік і центрування даних. Розрахунок середніх зна-</p> | 15                 |

|  |  |  |
|--|--|--|
|  | чень сезонною компоненти в адитивній моделі. Корекція сезонної компоненти. Література [4, 5, 7]. |  |
|  |  |  |

## 4. РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

### 4.1. Основна

1. Джонстон Дж. Эконометрические методы. – М.: Статистика, 1980.
2. Наконечний С.І., Терещенко Т.О., Романюк Т.П. Економетрія. – К.: КНЕУ, 2000.
3. Толбатов Ю.А.. Економетрика. – К.: Четверта хвиля., 1997.
4. Грубер Й. Эконометрия: Введение в эконометрию. К.: 1996.
5. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Персецкий А.А. Эконометрика: Начальный курс. – М., 1997.
6. Тинтнер Г. Введение в эконометрию.- М.: Статистика, 1965.- 365 с.
7. Маленво З. Статистические методы эконометрии. Вып 1, 2.- М.: Статистика, 1978. - 325 с.
8. Зельнер А. Байесовские методы в эконометрии. - М.: Статистика, 1980. - 352 с.

### 4.2. Додаткова

1. 6. Боровиков В. П Популярное введение в программу STATISTICA. - М.: КомпьютерПресс, - 1998.- 267 с.
2. 7. Курицкий Б. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0 в примерах.- СПб: ВHV - Санкт - Петербург, 1997. - 384 с.
3. Карасёв А.И., Аксютин З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов. – Ч.2. – М.: Высшая школа, 1982.



## 5. ВКАЗІВКИ ЩОДО ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

Навчальним планом з дисципліни "Економетрія" передбачено виконання контрольної роботи та в середовищі MATHCAD. Кількість задач контрольної роботи визначається викладачем. Перед розв'язуванням задач необхідно вивчити відповідний розділ теоретичного матеріалу.

При виконанні контрольних робіт студент повинний строго дотримувати наступних правил.

1. Виконувати контрольні роботи строго за варіантом, номер якого вказує викладач.

2. Кожна контрольна робота виконується в окремому зошиті в клітку чорнилом будь-якого кольору, крім червоних. У зошиті повинні бути поля для рецензента; наприкінці зошита необхідно залишити кілька чистих аркушів для доповнень і виправлень відповідно до зауважень рецензента.

3. Оформлення обкладинки зошита повинно відповідати вказаному зразку.

4. Перед рішенням кожної задачі вказується її умова, замінивши загальні дані конкретними зі свого варіанта. Розташовувати задачі необхідно в порядку зростання їхніх номерів, зберігаючи нумерацію.

5. Розв'язок задач обов'язково супроводжуються поясненнями, необхідними рисунками або графіками та посиланнями на відповідні теоретичні поняття та формули.

6. Після одержання прорецензованої роботи студент повинний уважно вивчити рецензію і виконати всі зауваження рецензента.

7. Робота, виконана з якими-небудь порушеннями перерахованих вище вимог, не зараховується і повертається студенту для переробки.

8. Студент, що не виконав хоча б одну контрольну роботу, до іспиту не допускається.

9. Якщо контрольна робота після перевірки не зарахована, треба виправити помилки згідно з зауваженнями рецензента. Це необхідно робити у кінці роботи (або в окремому зошиті), написавши спочатку титул “Робота над помилками”. Вносити зміни до тексту вже перевіреної роботи категорично забороняється. Доопрацьована контрольна робота надсилається для повторної перевірки разом з першим варіантом.

10. Номер задач № 1,2 контрольної роботи обирається за двома останніми цифрами залікової книжки чи студентського квитка. **Причому, якщо ці дві останні цифри менше, або дорівнюють 50, то ця цифра і відповідає варіанту контрольної роботи. В разі, коли дві останні цифри залікової книжки чи студентського квитка більше 50, то номер варіанта визначається наступним чином  $(100 - XX)$ , де  $XX$  - дві останні цифри залікової книжки чи студентського квитка більше 50. Наприклад, коли ці дві останні цифри залікової книжки чи студентського квитка дорівнюють 73, то номер варіанта визначається так:  $100 - 73 = 27$ .**

Для задач № 3,4 номер варіанта відповідає вказівкам розділу «варіанти індивідуальних задач № 3,4».

**ЗРАЗОК ТИТУЛЬНОГО АРКУШУ**

**НМетАУ**

**КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА  
ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ**

**КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 1**

з дисципліни "ЕКОНОМЕТРІЯ"

студента економічного факультету

група \_\_\_\_\_ спеціальність \_\_\_\_\_

---

*(прізвище, ім'я та по батькові)*

**Варіант №**

№ залікової книжки \_\_\_\_\_

Дата здачі роботи до деканату \_\_\_\_\_

Викладач \_\_\_\_\_

Дніпропетровськ  
2010

## 6. ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ РАБОТ

### Задача № 1

на тему: «Исследование динамики рынка. Паутинообразная модель рынка».

#### ЗАДАНИЯ:

1. В соответствии с номером варианта определить функцию спроса, как функцию переменной  $P$ , т.е.  $D=D(p)$ .
2. В соответствии с номером варианта определить функцию предложения, как функцию переменной  $P$ , т.е.  $S=S(p)$ .
3. В одной системе координат изобразить функцию спроса и функцию предложения.
4. Графически определить значение равновесной цены. (При работе в среде Mathcad воспользоваться Format-Graph-Trace).
5. Аналитически найти значение равновесной цены. (При работе в среде Mathcad воспользоваться функцией ROOT( ,)).
6. Найти значение количества товара при котором достигается равновесное состояние рынка.
7. Оценить характер равновесия рынка: устойчивый, неустойчивый, регулярных колебаний постоянной амплитуды.
  - 7.а Графически характер равновесия рынка определить путем исследования итерационного процесса в окрестности равновесной цены.
  - 7.б. Аналитически характер равновесия рынка определить величиной эластичности линий спроса и предложения, вычислив  $\left| S'(p) \frac{p}{S(p)} \right|$  и  $\left| D'(p) \frac{p}{D(p)} \right|$  и затем приравняв полученные значения.

8. Сделать необходимые выводы.

*Как это сделать в среде MathCad*

1. В соответствии с номером варианта определить функцию спроса, как функцию переменной P, т.е.  $D=D(p)$ .

*Как это сделать в среде MathCad*

*Условия задачи*

$$\begin{array}{lll} a := 3 & c := 4 & e := 80 \\ b := 120 & r := 2 & \end{array}$$

**Формирование функций спроса и предложения**

$$D(p) := -a \cdot p + b \qquad D(p) \rightarrow -3 \cdot p + 120$$

2. В соответствии с номером варианта определить функцию предложения, как функцию переменной P, т.е.  $S=S(p)$ .

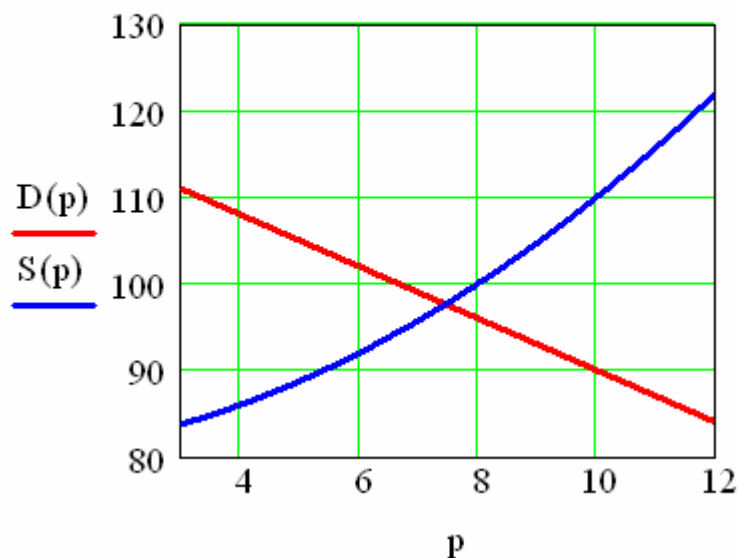
*Как это сделать в среде MathCad*

$$S(p) := \frac{p^2}{c} + \frac{p}{r} + e \qquad S(p) \rightarrow \frac{1}{4} \cdot p^2 + \frac{1}{2} \cdot p + 80$$

3. В одной системе координат изобразить функцию спроса и функцию предложения.

*Как это сделать в среде MathCad*

Графики функций спроса и предложения



4. Графически определить значение равновесной цены. (При работе в среде Mathcad воспользоваться Format-Graph-Trace).

*Как это сделать в среде MathCad*

Графическое решение задачи

$$p := 7.437$$

$$D(p) = 97.689 \quad S(p) = 97.546$$

5. Аналитически найти значение равновесной цены. (При работе в среде Mathcad воспользоваться функцией ROOT( ,)).

*Как это сделать в среде MathCad*

Аналитическое решение задачи

$$p1 := \text{root}(D(p) - S(p), p)$$

$$p1 = 7.457$$

6. Найти значение количества товара при котором достигается равновесное состояние рынка.

*Как это сделать в среде MathCad*

$$D(p1) = 97.629 \quad S(p1) = 97.63$$

$$p := p1$$

$$p = 7.457$$

7. Оценить характер равновесия рынка: устойчивый, неустойчивый, регулярных колебаний постоянной амплитуды.

7.a Графически характер равновесия рынка определить путем исследования итерационного процесса в окрестности равновесной цены.

*Как это сделать в среде MathCad*

**На графики функций спроса и предложения нанести соответствующую спираль и в зависимости от ее характера сделать вывод.**

7.б. Аналитически характер равновесия рынка определить величиной эластичности линий спроса и предложения, вычислив  $\left| S'(p) \frac{p}{S(p)} \right|$  и  $\left| D'(p) \frac{p}{D(p)} \right|$  и затем приравняв полученные значения.

*Как это сделать в среде MathCad*

$$\left| \frac{d}{dp} D(p) \right| \cdot \frac{p}{D(p)} = 0.229 \quad \left| \frac{d}{dp} S(p) \right| \cdot \frac{p}{S(p)} = 0.323$$

**Сравнить соответствующие значения эластичностей и сделать вывод.**

8. Сделать необходимые выводы.

*Как это сделать в среде MathCad*

## Выводы

1. Найдены координаты точки рыночного равновесия, которые соответствуют (7,457 97,63)

2. Спираль, нанесенная на графики функций спроса и предложения имеет закручивающийся характер. Это обстоятельство говорит о том, что характер равновесия – устойчивый.

3. Эластичность функции предложения в точке равновесия больше эластичности функции спроса, следовательно, характер равновесия устойчивый.

## Задача № 2

на тему: «Исследование эластичности эконометрических функций.  
Суммарная прибыль, предельная прибыль предприятия».

### ЗАДАНИЯ:

1. В соответствии с номером варианта определить функцию спроса, как функцию переменной Q, т.е.  $P=P(Q)$ .

1. Определить эластичность спроса по цене

$$ED(Q) = \frac{P(Q)}{Q} \cdot \frac{1}{\frac{d}{dQ}P(Q)}$$

2. Определить функцию суммарной прибыли  $R(Q) = Q \cdot P(Q)$ .

3. Определить функцию предельной выручки, вычислив  $R'(Q)$ , либо воспользовавшись соотношением

$$R'(Q) = \frac{dR}{dQ}$$



При этом показать, что при реализации товаров неэластичного спроса предельная прибыль отрицательная и суммарная прибыль при этом падает. При эластичном спросе предельная прибыль положительная и суммарная прибыль возрастает.

4. В одной системе координат построить графики эластичности и предельной прибыли.
5. Построить график суммарной прибыли.
6. На графике (п.5) найти точку, для которой  $|E_D| = 1$ .
7. Графически определить координаты точки, для которой  $|E_D| = 1$ . (При работе в среде воспользоваться Format – Graphics – Trace).
8. Аналитически определить координаты точки, для которой  $|E_D| = 1$ . (При работе в среде воспользоваться функцией ROOT()).
9. Сделать необходимые выводы.

|  |
|--|
| <i>Как это сделать в среде MathCad</i> |
|--|

1. В соответствии с номером варианта определить функцию спроса, как функцию переменной  $Q$ , т.е.  $P=P(Q)$ .

*Как это сделать в среде MathCad*

Ввод исходных данных

$$a := \frac{1}{15} \quad b := \frac{5}{10}$$

Формирование функции спроса

$$p(q) := -a \cdot q^2 + b \cdot q + c$$

$$p(q) \rightarrow \frac{-1}{15} \cdot q^2 + \frac{1}{2} \cdot q + .7$$

2. Определить эластичность спроса по цене

$$ED(Q) = \frac{P(Q)}{Q} \cdot \frac{1}{\frac{d}{dQ}P(Q)}$$

*Как это сделать в среде MathCad*

Формирование эластичности функции спроса

$$ed(q) := \frac{p(q)}{q} \cdot \frac{1}{\frac{d}{dq}p(q)}$$

$$ed(q) \rightarrow \frac{\left( \frac{-1}{15} \cdot q^2 + \frac{1}{2} \cdot q + .7 \right)}{\left[ q \cdot \left( \frac{-2}{15} \cdot q + \frac{1}{2} \right) \right]}$$

3. Определить функцию суммарной прибыли  $R(Q) = Q \cdot P(Q)$ .

*Как это сделать в среде MathCad*

Формирование функции прибыли

$$r(q) := q \cdot p(q)$$

$$r(q) \rightarrow q \cdot \left( \frac{-1}{15} \cdot q^2 + \frac{1}{2} \cdot q + .7 \right)$$

4. Определить функцию предельной выручки, вычислив  $R'(Q)$ , либо воспользовавшись соотношением

$$R'(Q) = \frac{dR}{dQ}.$$

При этом показать, что при реализации товаров неэластичного спроса предельная прибыль отрицательная и суммарная прибыль при этом падает. При эластичном спросе предельная прибыль положительная и суммарная прибыль возрастает.

*Как это сделать в среде MathCad*

Формирование функции предельной прибыли

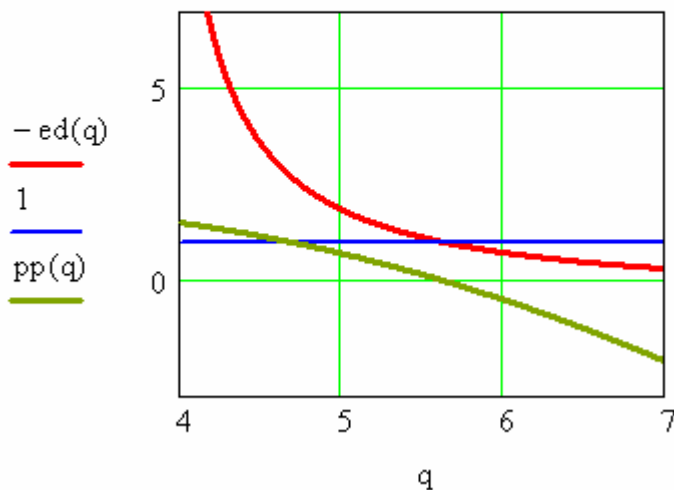
$$pp(q) := \frac{d}{dq} r(q)$$

$$pp(q) \rightarrow \frac{-1}{15} \cdot q^2 + \frac{1}{2} \cdot q + .7 + q \cdot \left( \frac{-2}{15} \cdot q + \frac{1}{2} \right)$$

5. В одной системе координат построить графики эластичности и предельной прибыли.

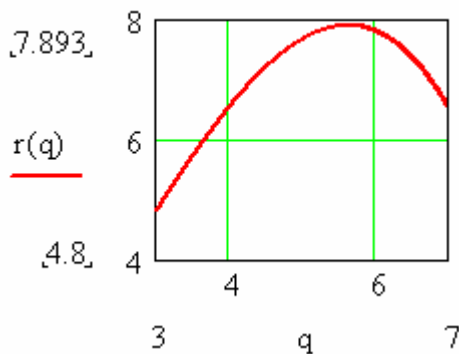
*Как это сделать в среде MathCad*

Формирование требуемых графических зависимостей



6. Построить график суммарной прибыли.

*Как это сделать в среде MathCad*



7. На графике (п.5) найти точку, для которой  $|E_D| = 1$ .

*Как это сделать в среде MathCad*

***Воспользоваться Format – Graphics – Trace.***

8. Графически определить координаты точки, для которой  $|E_D| = 1$ . (При работе в среде воспользоваться Format – Graphics – Trace).

*Как это сделать в среде MathCad*

Графическое решение задачи

$$q := 5.515$$

$$p(q) = 1.43$$

$$r(q) = 7.885$$

9. Аналитически определить координаты точки, для которой  $|E_D| = 1$ . (При работе в среде воспользоваться функцией ROOT()).

*Как это сделать в среде MathCad*

Аналитическое решение задачи

$$q1 := \text{root}[-(\text{ed}(q)) - 1, q]$$

$$q1 = 5.622$$

$$q := q1$$

$$p(q) = 1.404$$

$$r(q) = 7.893$$

10. Сделать необходимые выводы.

*Как это сделать в среде MathCad*

### Выводы

1. Найдено значение эластичности функции спроса по цене в точке пересечения с единицей. При этом

$$q = 5.622$$

2. Оптимальная цена на товар составляет  $p(q) = 1.404$

3. Максимальные текущие прибыли при этом составят  $r(q) = 7.893$  ед.

## Задача №3

на тему “Парная регрессия”.

Этап работы: “Спецификация математической модели”

### ЗАДАНИЯ:

1. По выборочным данным построить корреляционное поле.
2. По данным корреляционного поля предложить гипотезу о виде математической модели линии регрессии.
3. Найти математическую модель линейной регрессии. Для чего:

- 3.1. Вычислить оценки математического ожидания случайных величин:
  - либо по зависимостям

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_i y_i,$$

либо используя стандартные функции среды MathCad.

- 3.2. Вычислить оценки дисперсий случайных величин:
  - либо по зависимостям:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_i x_i^2 - \bar{x}^2, \quad \sigma_y^2 = \frac{1}{n} \sum_i y_i^2 - \bar{y}^2,$$

либо используя стандартные функции среды MathCad .

- 3.3. Вычислить корреляционный момент:
  - либо по зависимости

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_i x_i \cdot y_i - \bar{x} \cdot \bar{y}.$$

либо используя стандартные функции среды MathCad.

- 3.4. Вычислить коэффициент корреляции:  
либо по зависимости

$$r_{x,y} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y},$$

либо используя стандартные функции  
среды MathCad.

- 3.5. Вычислить коэффициент  $b$  линейной  
регрессии, используя формулу

$$b = r_{x,y} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}.$$

- 3.6. Вычислить коэффициент  $a$  линейной  
регрессии, используя формулу

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}.$$

- 3.7. Линию регрессии полученного уравнения

$$y = a + bx$$

совместить с корреляционным полем.

***Как это сделать в среде MathCad***

1. По выборочным данным построить корреляционное поле.

- В текстовый редактор «Блокнот» ввести два файла, один – данные по переменной  $X$ ,
- другой – данные по переменной  $Y$ .

- В среде MathCad ввести информацию, необходимую для экспорта данных

➤ из блокнота.

**Как это будет выглядеть в среде MathCad**

```
ORIGIN:= 1          N := 15
i := 1.. N
xi := READ("f:\dan\x1.txt")
yi := READ("f:\dan\y5.txt")
```

**Как это сделать в среде MathCad**

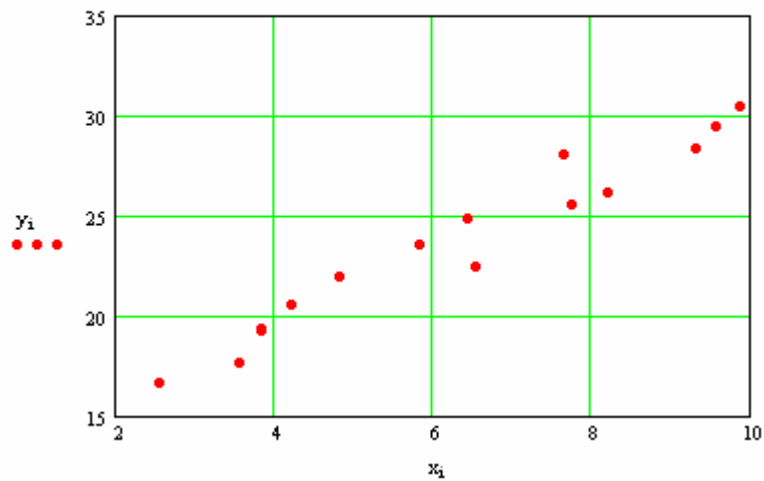
- Войти в графический редактор среды.
- По оси абсцисс указать -  $x_i$

- По оси ординат указать -  $y_i$



**Как это будет выглядеть в среде MathCad**

Корреляционное поле



3. По данным корреляционного поля предложить гипотезу о виде математической модели линии регрессии.

При необходимости сформулировать следующий вывод:

Вывод: По виду корреляционного поля выдвигается гипотеза о линейной связи между наблюдаемыми переменными.

- 3.1. Вычислить оценки математического ожидания случайных величин:  
- либо по зависимостям

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_i y_i,$$

либо используя стандартные функции среды MathCad.

*Как это сделать в среде MathCad*

1. Оценка математического ожидания наблюдаемых переменных

$$xsr := \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i \quad xsr = 6.257$$

$$ysr := \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N y_i \quad ysr = 23.609$$

3.2. Вычислить оценки дисперсий случайных величин:

- либо по зависимостям:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_i x_i^2 - \overline{x^2}, \quad \sigma_y^2 = \frac{1}{n} \sum_i y_i^2 - \overline{y^2},$$

либо используя стандартные функции среды MathCad .

*Как это сделать в среде MathCad*

2. Оценка дисперсии наблюдаемых переменных

$$kvX := \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N (x_i)^2 \quad kvY := \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N (y_i)^2$$

$$kvX = 44.524$$

$$kvY = 575.41$$

$$dispX := kvX - xsr^2$$

$$dispY := kvY - ysr^2$$

$$dispX = 5.37$$

$$dispY = 18.01$$

3.3. Вычислить корреляционный момент:  
либо по зависимости

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_i x_i \cdot y_i - \overline{x \cdot y}.$$

либо используя стандартные функции  
среды MathCad.

*Как это сделать в среде MathCad*

3. Оценка корреляционного момента и коэффициента корреляции

$$\text{prxy} := \left( \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i \right) \quad \text{prxy} = 2.36 \times 10^3$$

$$\text{covxy} := \frac{1}{N} \cdot \text{prxy} - \text{xsr} \cdot \text{ysr}$$

$$\text{covxy} = 9.605$$

3.4. Вычислить коэффициент корреляции:  
либо по зависимости

$$r_{x,y} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y},$$

либо используя стандартные функции  
среды MathCad.

*Как это сделать в среде MathCad*

$$k_{kor} := \frac{cov_{xy}}{\sqrt{disp\bar{X}} \cdot \sqrt{disp\bar{Y}}}$$

$$k_{kor} = 0.977$$

3.5. Вычислить коэффициент  $b$  линейной регрессии, используя формулу

$$b = r_{x,y} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

*Как это сделать в среде MathCad*

4. Вычисление оценок коэффициентов уравнения регрессии

$$b := k_{kor} \cdot \frac{\sqrt{disp\bar{Y}}}{\sqrt{disp\bar{X}}} \quad b = 1.788$$

3.6. Вычислить коэффициент  $a$  линейной регрессии, используя формулу

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}$$

*Как это сделать в среде MathCad*

$$a := ysr - b \cdot xsr \quad a = 12.418$$

## 3.7. Линию регрессии полученного уравнения

$$y = a + bx$$

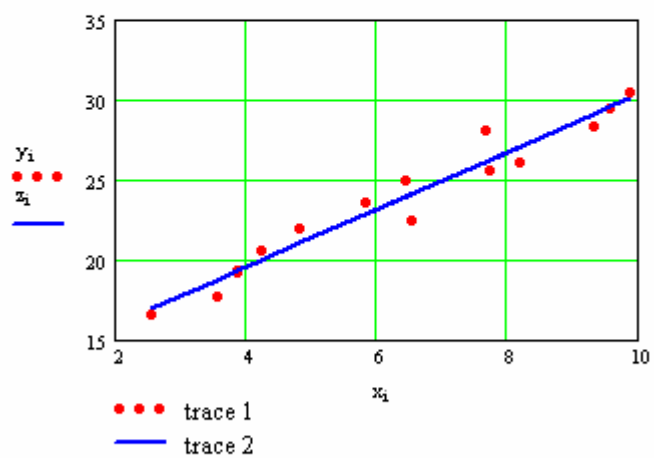
совместить с корреляционным полем.

*Как это сделать в среде MathCad*

Линия регрессии

$$y1(x) := a + b \cdot x$$

$$z_1 := a + b \cdot x_1$$



Вывод: При изменении аргумента на единицу значение функции увеличиться на 1.788

## Задача №4

на тему “Парная регрессия”.

Этап работы: “Параметризация математической модели”

### ЗАДАНИЯ:

1. Исследовать коэффициент корреляции, используя Т статистику Стьюдента. При этом вычислить

$$t = r \cdot \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}},$$

определить по таблицам распределения критических точек Стьюдента с вероятностью 0.95,  $t_{кр}$ .

Сравнивая наблюдаемое и критическое значения  $t$  – статистики Стьюдента, формулируется вывод о статистической значимости коэффициента корреляции.

2. Используя критерий Фишера, оценить адекватность принятой эконометрической модели.

При этом, вычислить

$$F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot (n-2),$$

определить по таблице распределения критических точек Фишера с вероятностью 0.95,  $F_{кр}$ .

Принять  $R^2 = r_{xy}^2$ .

Сравнивая наблюдаемое и критическое значения  $f$  – статистики Фишера, формулируется вывод о статистической значимости коэффициента детерминации.

3. Провести анализ  $R^2$ .

4. Построить доверительный интервал для коэффициента при неизвестной уравнения регрессии. Для чего провести вычисления

$$b \pm \Delta b$$

$$\Delta b = t_{\alpha,k} \cdot \frac{S}{\sqrt{n} \cdot \sigma_x}$$

Коэффициент S вычислить по формуле

$$S^2 = \frac{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}{n - 2},$$

составив соответствующую для вычислений таблицу.

5. Определить доверительную зону регрессии и по полученным данным построить соответствующие зависимости, при этом

$$y_i \pm \Delta y_i,$$

$$\Delta y_i = t_{\alpha,k} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{D_x}}.$$

Для получения совокупности значений  $\Delta y_i$  составить соответствующие таблицы.

6. Определить прогноз соответствующего фактора. Найти доверительный интервал для прогноза.

$$y_p = a + bx_p$$

$$\Delta y_{p_i} = t_{\alpha,k} \cdot S \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_p - \bar{x})^2}{n \cdot D_x}}.$$

7. Определить значение коэффициента эластичности для прогнозируемого значения.

**Как это сделать в среде MathCad**

1. Исследовать коэффициент корреляции, используя Т статистику Стьюдента. При этом вычислить

$$t = r \cdot \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}},$$

определить по таблицам распределения критических точек Стьюдента с вероятностью 0.95,  $t_{кр}$ .

Сравнивая наблюдаемое и критическое значения  $t$  – статистики Стьюдента, формулируется вывод о статистической значимости коэффициента корреляции.

*Если  $|t_{набл}| > t_{кр}$ , то коэффициент корреляции  $r$  статистически значим, то есть между наблюдаемыми переменными  $X$  и  $Y$  существует линейная связь.*

*Как это сделать в среде MathCad*

1 Исследование коэффициента корреляции.

$$tr := kkor \cdot \frac{\sqrt{N-2}}{\sqrt{1-kkor^2}}$$

$$tr = 12.849$$

Из таблицы распределения Стьюдента с уровнем значимости  $\alpha=0,05$  и числом степеней свободы  $N-2$  находят критическое значение критерия

$$tkr := 2.31$$

Поскольку  $|tr| > tkr$  то коэффициент корреляции статистически значим

2. Используя критерий Фишера, оценить адекватность принятой эконометрической модели.

При этом, вычислить

$$F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot (n-2),$$

определить по таблице распределения критических точек Фишера с вероятностью 0.95,  $F_{кр}$ .

Принять  $R^2 = r_{xy}^2$ .

Сравнивая наблюдаемое и критическое значения  $F$  – статистики Фишера, делается вывод о статистической значимости коэффициента детерминации и об



адекватности математической модели уравнения регрессии в целом (чем больше  $F_{набл}$  по сравнению с  $F_{кр}$ , тем более адекватной является математическая модель).

### *Как это сделать в среде MathCad*

#### 2 Исследование коэффициента детерминации

$$R_{kv} := k_{kor}^2$$

$$R_{kv} = 0.954$$

Анализ коэффициента детерминации показывает, что 95,4% колеблемости у объясняется колеблемостью x и только 4,6% колеблемость у объясняется другими факторами, действующими избирательно.

#### 3. Провести анализ $R^2$ .

### *Как это сделать в среде MathCad*

#### 3. Анализ статистической значимости коэффициента детерминации

$$k_{det} := R_{kv}$$

Выполним анализ такого коэффициента по F статистике Фишера

$$F_r := \frac{k_{det}}{1 - k_{det}^2} \cdot (N - 2)$$

$$F_r = 84.504$$

Из таблиц распределения Фишера с (1, N-2) степенями свободы и уровнем значимости  $\alpha=0,05$  находят критическое значение критерия. Итак,

$$F_{kr} := 7.67$$

Поскольку  $F_r > F_{kr}$ , то коэффициент детерминации статистически значим. Математическая модель адекватна.

4. Построить доверительный интервал для коэффициента при неизвестной уравнения регрессии. Для чего провести вычисления

$$b \pm \Delta b$$

$$\Delta b = t_{\alpha, k} \cdot \frac{s}{\sqrt{n} \cdot \sigma_x}$$

Коэффициент S вычислить по формуле

$$S^2 = \frac{\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - 2},$$

составив соответствующую для вычислений таблицу.

*Как это сделать в среде MathCad*

4. Построим доверительный интервал для коэффициента при неизвестной

$$b = 1.788 \quad a = 12.418$$

$$Skv := \frac{1}{N - 2} \cdot \sum_{i=1}^{10} (y_i - a - b \cdot x_i)^2$$

$$ysr = 23.609$$

$$xsr = 6.257$$

$$Skv = 0.908$$

$$dispX = 5.37$$

$$Dx := dispX$$

$$detB := 2.31 \cdot \frac{\sqrt{Skv}}{\sqrt{N} \cdot \sqrt{Dx}}$$

$$detB = 0.457$$

$$b1 := b + detB$$

$$b1 = 2.246$$

$$b2 := b - detB$$

$$b2 = 1.331$$

5. Определить доверительную зону регрессии и по полученным данным построить соответствующие зависимости, при этом

$$y_i \pm \Delta y_i,$$

$$\Delta y_i = t_{\alpha, k} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{D_x}}$$

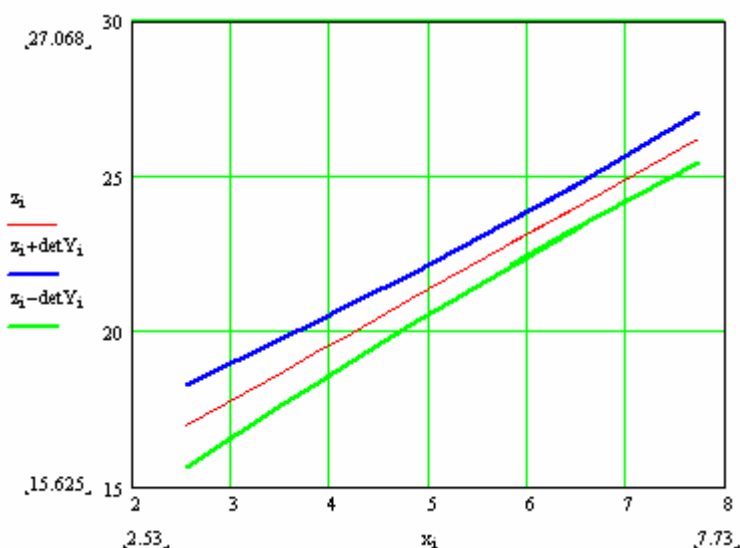
Для получения совокупности значений  $\Delta y_i$  составить соответствующие таблицы.

Найденные коэффициенты уравнения регрессии **a**, **b** зависят от параметров выборки, и от выборки к выборке будут меняться. Поэтому уравнения регрессии носят приближенный характер. В связи с этим необходимо построить доверительную зону регрессии, в которой с доверительной вероятностью  $\alpha$  будет находиться истинная линия регрессии (для любой выборки из генеральной совокупности).

*Как это сделать в среде MathCad*

#### 5. Доверительная зона регрессии

$$\det Y_i := 2.31 \cdot \frac{\sqrt{Skv}}{\sqrt{N}} \cdot \sqrt{1 + \frac{(x_i - x_{sr})^2}{Dx}}$$



6. Определить прогноз соответствующего фактора. Найти доверительный интервал для прогноза.

$$y_p = a + bx_p$$

$$\Delta y_{p_i} = t_{\alpha,k} \cdot S \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_p - \bar{x})^2}{n \cdot D_x}}.$$

Полученное уравнение регрессии применяется для вычисления прогнозного значения фактора  $Y$ . Задавая значение фактора  $X_p$ , по уравнению регрессии определяется  $Y_p$ .

Так как коэффициенты уравнения регрессии носят приближенный характер,  $Y_p$  также будет величиной приближенной. В связи с этим необходимо построить доверительный интервал, которому с доверительной вероятностью  $\alpha$  будет принадлежать истинное значение прогнозируемой величины  $Y_p$ . Размах доверительного интервала определяется по приведенной формуле.

*Как это сделать в среде MathCad*

6. Определение прогноза

$$X_p := 9.69$$

$$Y_p := a + b \cdot X_p \quad Y_p = 29.749$$

7. Определить значение коэффициента эластичности для прогнозируемого значения.

*Как это сделать в среде MathCad*

7. значение коэффициента эластичности для прогнозируемого значения

$$E_p := b \cdot \frac{X_p}{Y_p}$$

$$E_p = 0.583$$

## 7. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ И КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

1. Сформулируйте понятие корреляционного поля. Каким образом по виду корреляционного поля формулируется гипотеза о характере связи между изучаемыми переменными?
2. Сформулируйте понятие уравнения регрессии.
3. В чём заключается суть метода наименьших квадратов для определения математической модели парной линейной регрессии?
4. Что характеризует коэффициент корреляции? В каких пределах он изменяется?
5. Что характеризует коэффициент детерминации в парной линейной регрессии? Как он определяется?
6. Дайте определение точечных оценок случайных величин.
7. В чем суть интервальных оценок случайных величин?
8. Опишите методику проверки статистической значимости коэффициента корреляции и коэффициента детерминации.
9. Укажите суть  $t$  – статистики Стьюдента.
10. Укажите суть  $F$  – статистики Фишера.
11. Каким образом определяется наблюдаемое значение  $t$  – статистики Стьюдента?
12. Каким образом определяется наблюдаемое значение  $F$  – статистики Фишера?
13. Дайте определение доверительной вероятности.
14. Сформулируйте понятие доверительной зоны регрессии.
15. Что такое дисперсия остатков?
16. Укажите особенности определения доверительных интервалов для коэффициентов уравнения парной линейной регрессии.
17. В чем суть интервальных оценок для коэффициентов уравнения парной линейной регрессии?
18. Как определяется доверительный интервал для прогноза?
19. Каким образом выполняется проверка адекватности уравнения регрессии для парной линейной регрессии?
20. Какому закону распределения должна подчиняться случайная величина, чтобы применять  $t$  – статистику Стьюдента и  $F$  – статистику Фишера для проверки статистической значимости коэффициентов корреляции и детерминации?

## 8. ВАРИАНТ ТЕСТА

НМетАУ

Кафедра

ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

Тест по дисциплине: «ЭКОНОМЕТРИЯ»

ВАРИАНТ 1

1. Представлен график функций спроса и предложения (рис.1). Дать характеристику состояния рынка при цене на товар  $p_1$ . Провести соответствующий анализ.

2. Представлены графики эластичности функции по спросу и предельной прибыли (рис 2), а также график суммарной прибыли (рис.3). Дать характеристику функции эластичности на интервале (а,в) по графикам предельной прибыли и функции эластичности спроса..

3. Задано корреляционное поле функции спроса на некоторый товар (рис. 4). Предложить гипотезу о виде уравнения регрессии. Указать характер знака коэффициента корреляции и его примерное значение.

4. Взяты 10 наблюдений показателя инфляции и безработицы в некоторой стране. Для них рассчитан выборочный коэффициент корреляции  $r = -0.9$ . Выполнить анализ коэффициента детерминации и проверку статистической значимости такого коэффициента при уровне значимости равном 0.05. Охарактеризовать качество математической модели при вычисленном коэффициенте детерминации.

5. Исследуется функция спроса на телятину в одной из европейских стран. При этом получено следующее уравнение регрессии  $y = 1.5 - 2.3x$ . Выполнить анализ такого уравнения. Объяснить, почему для коэффициентов уравнения регрессии необходимо строить доверительные интервалы.

6. В чем суть интервальных оценок коэффициентов уравнения парной линейной регрессии?
7. Сформулируйте понятие доверительной зоны регрессии.
8. Укажите причину, по которой МНК не применяется в нелинейных регрессиях.

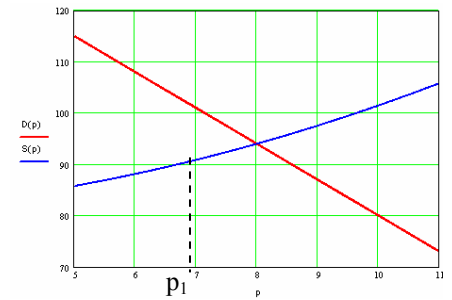


Рисунок 1

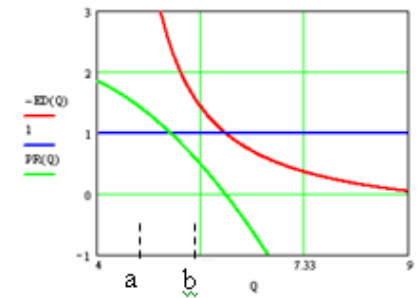


Рисунок 2

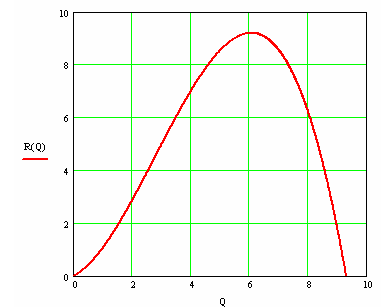


Рисунок 3

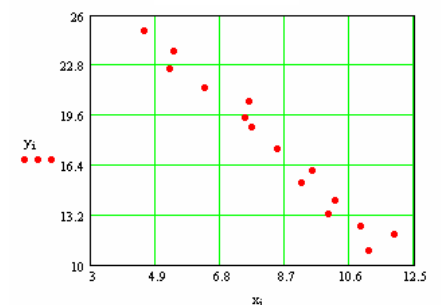


Рисунок 4

## 9. ТАБЛИЦЫ ВАРИАНТОВ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

**Задача № 1.** Провести необходимые исследования для следующих функций спроса и предложения  $D(p) = -a \cdot p + b$ ,  $S(p) = \frac{p^2}{c} + \frac{p}{r} + e$ .

| № вар | a | b   | c | r | e  |
|-------|---|-----|---|---|----|
| 1     | 3 | 120 | 4 | 2 | 80 |
| 2     | 5 | 120 | 4 | 2 | 80 |
| 3     | 4 | 100 | 3 | 2 | 70 |
| 4     | 5 | 120 | 2 | 5 | 70 |
| 5     | 7 | 100 | 2 | 5 | 70 |
| 6     | 6 | 120 | 3 | 7 | 90 |
| 7     | 4 | 140 | 7 | 2 | 60 |
| 8     | 5 | 130 | 7 | 2 | 60 |
| 9     | 7 | 100 | 7 | 2 | 60 |
| 10    | 6 | 110 | 5 | 5 | 50 |
| 11    | 4 | 140 | 3 | 1 | 70 |
| 12    | 5 | 110 | 3 | 5 | 70 |
| 13    | 7 | 90  | 2 | 5 | 70 |
| 14    | 4 | 130 | 3 | 7 | 90 |
| 15    | 6 | 150 | 7 | 2 | 60 |
| 16    | 4 | 140 | 5 | 5 | 50 |
| 17    | 5 | 130 | 5 | 7 | 80 |
| 18    | 7 | 150 | 5 | 7 | 80 |
| 19    | 6 | 140 | 7 | 7 | 70 |
| 20    | 4 | 140 | 7 | 7 | 70 |
| 21    | 3 | 120 | 3 | 2 | 70 |
| 22    | 5 | 120 | 3 | 2 | 70 |
| 23    | 4 | 100 | 2 | 5 | 70 |
| 24    | 6 | 120 | 2 | 5 | 70 |
| 25    | 7 | 100 | 3 | 7 | 90 |
| 26    | 7 | 150 | 5 | 7 | 80 |
| 27    | 8 | 140 | 7 | 7 | 80 |
| 28    | 5 | 140 | 7 | 7 | 90 |
| 29    | 2 | 120 | 3 | 2 | 40 |
| 30    | 9 | 160 | 1 | 2 | 50 |
| 31    | 4 | 110 | 4 | 3 | 80 |
| 32    | 5 | 100 | 4 | 4 | 80 |

|    |   |     |   |   |    |
|----|---|-----|---|---|----|
| 33 | 4 | 160 | 3 | 7 | 70 |
| 34 | 5 | 120 | 2 | 5 | 70 |
| 35 | 3 | 100 | 2 | 5 | 70 |
| 36 | 4 | 120 | 3 | 7 | 90 |
| 37 | 6 | 140 | 7 | 2 | 60 |
| 38 | 8 | 130 | 7 | 2 | 60 |
| 39 | 7 | 100 | 9 | 1 | 60 |
| 40 | 6 | 130 | 5 | 5 | 50 |
| 41 | 8 | 140 | 3 | 1 | 70 |
| 42 | 2 | 110 | 3 | 5 | 70 |
| 43 | 3 | 120 | 2 | 5 | 70 |
| 44 | 4 | 120 | 3 | 7 | 90 |
| 45 | 6 | 110 | 7 | 2 | 60 |
| 46 | 9 | 120 | 5 | 5 | 50 |
| 47 | 4 | 130 | 6 | 7 | 80 |
| 48 | 8 | 170 | 5 | 7 | 80 |
| 49 | 4 | 120 | 3 | 7 | 90 |
| 50 | 8 | 100 | 5 | 7 | 80 |

**Задача № 2.** Провести необходимые исследования для следующей функции спроса

$$P(Q) = -a \cdot Q^2 + b \cdot Q + c.$$

| № вар | a    | b   | c   |
|-------|------|-----|-----|
| 1     | 1/15 | 0,5 | 0,7 |
| 2     | 1/15 | 4/7 | 0,7 |
| 3     | 1/15 | 4/9 | 0,7 |
| 4     | 1/15 | 5/7 | 0,7 |
| 5     | 1/15 | 5/9 | 1   |
| 6     | 1/15 | 5/9 | 0,8 |
| 7     | 1/15 | 5/9 | 0,5 |
| 8     | 1/15 | 5/9 | 0,6 |
| 9     | 0,1  | 5/9 | 0,6 |
| 10    | 0,1  | 5/9 | 1   |
| 11    | 0,1  | 6/7 | 0,8 |
| 12    | 0,1  | 6/7 | 0,5 |
| 13    | 0,1  | 6/7 | 0,7 |



|    |      |     |     |
|----|------|-----|-----|
| 14 | 0,1  | 6/7 | 1   |
| 15 | 2/15 | 6/7 | 1   |
| 16 | 2/15 | 6/7 | 0,9 |
| 17 | 2/15 | 6/7 | 0,8 |
| 18 | 2/15 | 6/7 | 0,7 |
| 19 | 0,2  | 6/7 | 0,5 |
| 20 | 0,3  | 6/7 | 0,3 |
| 21 | 0,2  | 4/7 | 0,3 |
| 22 | 4/15 | 2/7 | 0,5 |
| 23 | 5/15 | 5/7 | 0,7 |
| 24 | 2/15 | 3/7 | 1   |
| 25 | 1/15 | 6/9 | 1   |
| 26 | 3/15 | 6/7 | 0,9 |
| 27 | 6/15 | 5/7 | 0,8 |
| 28 | 1/15 | 4/7 | 0,7 |
| 29 | 1/15 | 3/7 | 0,5 |
| 30 | 6/15 | 8/7 | 0,3 |
| 31 | 0,1  | 5/7 | 0,8 |
| 32 | 0,3  | 4/7 | 0,5 |
| 33 | 0,3  | 2/7 | 0,7 |
| 34 | 0,4  | 1/7 | 1   |
| 35 | 4/15 | 2/7 | 1   |
| 36 | 7/15 | 3/7 | 0,9 |
| 37 | 4/15 | 4/7 | 0,8 |
| 38 | 3/15 | 5/7 | 0,7 |
| 39 | 0,3  | 1/7 | 0,5 |
| 40 | 0,4  | 2/7 | 0,3 |
| 41 | 0,3  | 3/7 | 0,3 |
| 42 | 7/15 | 4/7 | 0,5 |
| 43 | 6/15 | 5/7 | 0,7 |
| 44 | 3/15 | 6/7 | 1   |
| 45 | 2/15 | 3/9 | 1   |
| 46 | 4/15 | 3/7 | 0,9 |
| 47 | 7/15 | 2/7 | 0,8 |
| 48 | 2/15 | 1/7 | 0,7 |
| 49 | 8/15 | 2/7 | 0,5 |
| 50 | 7/15 | 6/7 | 0,3 |

### Задача № 3,4

#### Выбор задания

- Если Ваш вариант – число 17, то выбираются столбцы:  
 $X_1$  и  $Y_7$
- Если Ваш вариант – число 20, то выбираются столбцы:  
 $X_2$  и  $Y_0$
- Если Ваш вариант – число 5 (или 05), то выбираются столбцы:  
 $X_0$  и  $Y_5$

#### ЗНАЧЕНИЯ ФАКТОРА X

| $X_0$   | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $X_6$ | $X_7$ | $X_8$ | $X_9$ |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 2,06  | 2,53  | 2,17  | 3,65  | 3,22  | 2,16  | 4,57  | 2,25  | 6,15  | 1,86  |
| 2,58  | 3,54  | 2,90  | 3,82  | 3,87  | 2,65  | 5,42  | 2,98  | 5,66  | 1,91  |
| 3,14  | 3,84  | 3,29  | 3,76  | 4,95  | 3,49  | 5,29  | 2,15  | 7,50  | 2,14  |
| 3,54  | 3,84  | 4,13  | 5,24  | 5,10  | 3,16  | 6,33  | 2,71  | 6,90  | 3,39  |
| 4,18  | 4,22  | 5,25  | 5,03  | 5,98  | 3,85  | 7,63  | 3,70  | 8,31  | 3,95  |
| 4,78  | 4,81  | 4,92  | 5,52  | 7,28  | 4,58  | 7,53  | 4,59  | 8,25  | 4,30  |
| 5,11  | 6,53  | 5,79  | 5,62  | 6,90  | 5,33  | 7,73  | 4,77  | 9,39  | 5,10  |
| 5,67  | 5,82  | 5,87  | 6,98  | 7,54  | 5,89  | 8,44  | 5,34  | 9,73  | 5,47  |
| 6,02  | 6,43  | 6,99  | 6,91  | 7,91  | 6,20  | 9,49  | 5,45  | 9,33  | 5,97  |
| 6,65  | 7,73  | 7,04  | 7,95  | 8,40  | 6,39  | 9,18  | 6,00  | 10,50 | 6,16  |
| 7,05  | 8,19  | 8,14  | 7,24  | 8,14  | 6,95  | 10,14 | 6,25  | 11,10 | 6,46  |
| 7,52  | 7,65  | 8,06  | 9,27  | 8,76  | 7,25  | 9,94  | 6,79  | 11,51 | 6,07  |
| 8,03  | 9,31  | 8,57  | 8,46  | 9,67  | 7,80  | 10,92 | 8,24  | 12,42 | 6,71  |
| 8,56  | 9,26  | 9,45  | 10,30 | 10,28 | 8,47  | 11,89 | 8,51  | 12,40 | 7,16  |
| 9,03  | 9,86  | 9,06  | 10,72 | 10,59 | 9,22  | 11,14 | 9,15  | 13,14 | 8,81  |
| <i>Значения X для прогноза (<math>X_p</math>)</i> |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 9,52  | 9,69  | 10,30 | 10,05 | 11,58 | 9,32  | 11,73 | 9,78  | 12,56 | 8,07  |

**ЗАЧЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЯ Y**

| Y <sub>0</sub> | Y <sub>1</sub> | Y <sub>2</sub> | Y <sub>3</sub> | Y <sub>4</sub> | Y <sub>5</sub> | Y <sub>6</sub> | Y <sub>7</sub> | Y <sub>8</sub> | Y <sub>9</sub> |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 7,24           | 10,89          | 16,21          | 12,11          | 15,21          | 16,62          | 10,22          | 12,50          | 19,66          | 14,87          |
| 8,02           | 11,92          | 17,75          | 12,30          | 15,42          | 17,63          | 10,58          | 13,88          | 20,53          | 15,78          |
| 9,28           | 12,45          | 16,39          | 13,82          | 16,44          | 19,22          | 12,01          | 15,16          | 21,31          | 16,79          |
| 10,12          | 13,27          | 18,87          | 14,84          | 17,93          | 19,36          | 12,84          | 16,06          | 22,59          | 18,03          |
| 11,12          | 14,12          | 19,60          | 15,86          | 18,52          | 20,52          | 13,28          | 16,66          | 23,27          | 18,29          |
| 12,19          | 15,23          | 21,21          | 16,41          | 19,80          | 21,95          | 15,13          | 17,65          | 24,44          | 19,93          |
| 13,01          | 16,07          | 21,84          | 17,80          | 20,76          | 22,45          | 15,84          | 18,46          | 25,85          | 20,32          |
| 14,12          | 17,40          | 23,00          | 18,61          | 21,30          | 23,56          | 17,08          | 19,54          | 26,74          | 21,18          |
| 15,21          | 18,68          | 24,44          | 19,57          | 22,25          | 24,90          | 17,99          | 20,58          | 27,36          | 22,47          |
| 16,29          | 19,46          | 25,36          | 21,26          | 24,14          | 25,53          | 18,32          | 21,77          | 28,37          | 23,47          |
| 17,01          | 20,52          | 25,54          | 21,08          | 24,17          | 26,11          | 19,49          | 22,15          | 29,22          | 24,07          |
| 18,03          | 21,32          | 27,14          | 22,99          | 25,66          | 28,02          | 20,59          | 23,80          | 30,50          | 25,57          |
| 19,19          | 22,58          | 27,95          | 23,43          | 26,50          | 28,37          | 21,35          | 24,79          | 31,21          | 27,07          |
| 20,21          | 23,73          | 28,99          | 24,63          | 27,46          | 29,48          | 23,20          | 25,57          | 32,56          | 27,62          |
| 21,22          | 25,02          | 30,80          | 25,41          | 29,02          | 30,42          | 24,21          | 27,18          | 33,66          | 28,42          |

**10. СТАТИСТИЧЕСКИЕ  
ТАБЛИЦЫ**

**ТАБЛИЦА 1**  
**КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТЬЮДЕНТА**

| Число степеней свободы<br><b>k</b> | Уровень значимости $\alpha$<br>(двусторонняя критическая область) |             |             |             |              |              |
|------------------------------------|---|-------------|-------------|-------------|--------------|--------------|
|                                    | <b>0,10</b>   | <b>0,05</b> | <b>0,02</b> | <b>0,01</b> | <b>0,002</b> | <b>0,001</b> |
| <b>1</b>                           | 6,31  | 12,7        | 31,82       | 63,7        | 318,3        | 637,0        |
| <b>2</b>                           | 2,92  | 4,30        | 6,97        | 9,92        | 22,33        | 31,6         |
| <b>3</b>                           | 2,35  | 3,18        | 4,54        | 5,84        | 10,22        | 12,9         |
| <b>4</b>                           | 2,13  | 2,78        | 3,75        | 4,60        | 7,17         | 8,61         |
| <b>5</b>                           | 2,01  | 2,57        | 3,37        | 4,03        | 5,89         | 6,86         |
| <b>6</b>                           | 1,94  | 2,45        | 3,14        | 3,71        | 5,21         | 5,96         |
| <b>7</b>                           | 1,89  | 2,36        | 3,00        | 3,50        | 4,79         | 5,40         |
| <b>8</b>                           | 1,86  | 2,31        | 2,90        | 3,36        | 4,50         | 5,04         |
| <b>9</b>                           | 1,83  | 2,26        | 2,82        | 3,25        | 4,30         | 4,78         |
| <b>10</b>                          | 1,81  | 2,23        | 2,76        | 3,17        | 4,14         | 4,59         |
| <b>11</b>                          | 1,80  | 2,20        | 2,72        | 3,11        | 4,03         | 4,44         |
| <b>12</b>                          | 1,78  | 2,18        | 2,68        | 3,05        | 3,93         | 4,32         |
| <b>13</b>                          | 1,77  | 2,16        | 2,65        | 3,01        | 3,85         | 4,22         |
| <b>14</b>                          | 1,76  | 2,14        | 2,62        | 2,98        | 3,79         | 4,14         |
| <b>15</b>                          | 1,75  | 2,13        | 2,60        | 2,95        | 3,73         | 4,07         |
| <b>16</b>                          | 1,75  | 2,12        | 2,58        | 2,92        | 3,69         | 4,01         |
| <b>17</b>                          | 1,74  | 2,11        | 2,57        | 2,90        | 3,65         | 3,96         |
| <b>18</b>                          | 1,73  | 2,10        | 2,55        | 2,88        | 3,61         | 3,92         |
| <b>19</b>                          | 1,73  | 2,09        | 2,54        | 2,86        | 3,58         | 3,88         |
| <b>20</b>                          | 1,73  | 2,09        | 2,53        | 2,85        | 3,55         | 3,85         |
| <b>21</b>                          | 1,72  | 2,08        | 2,52        | 2,83        | 3,53         | 3,82         |
| <b>22</b>                          | 1,72  | 2,07        | 2,51        | 2,82        | 3,51         | 3,79         |
| <b>23</b>                          | 1,71  | 2,07        | 2,50        | 2,81        | 3,49         | 3,77         |
| <b>24</b>                          | 1,71  | 2,06        | 2,49        | 2,80        | 3,47         | 3,74         |
| <b>25</b>                          | 1,71  | 2,06        | 2,49        | 2,79        | 3,45         | 3,72         |
| <b>26</b>                          | 1,71  | 2,06        | 2,48        | 2,78        | 3,44         | 3,71         |
| <b>27</b>                          | 1,71  | 2,05        | 2,47        | 2,77        | 3,42         | 3,69         |
| <b>28</b>                          | 1,70  | 2,05        | 2,46        | 2,76        | 3,40         | 3,66         |
| <b>29</b>                          | 1,70  | 2,05        | 2,46        | 2,76        | 3,40         | 3,66         |
| <b>30</b>                          | 1,70  | 2,04        | 2,46        | 2,75        | 3,39         | 3,65         |
| <b>40</b>                          | 1,68  | 2,02        | 2,42        | 2,70        | 3,31         | 3,55         |
| <b>60</b>                          | 1,67  | 2,00        | 2,39        | 2,66        | 3,23         | 3,46         |
| <b>120</b>                         | 1,66  | 1,98        | 2,36        | 2,62        | 3,17         | 3,37         |
| <b><math>\infty</math></b>         | 1,64  | 1,96        | 2,33        | 2,58        | 3,09         | 3,29         |

ТАБЛИЦА 2

**КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФИШЕРА**  
**(  $k_1$  ,  $k_2$  - числа степеней свободы )**

| <i>Уровень значимости <math>\alpha = 0,01</math></i> |       |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|--|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $k_2$  | $k_1$ |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|  | 1     | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   |
| <b>1</b>   | 4052  | 4999 | 5404 | 5624 | 5764 | 5859 | 5928 | 5981 | 6022 | 6056 |
| <b>2</b>   | 98,5  | 99,0 | 99,2 | 99,3 | 99,3 | 99,3 | 99,4 | 99,4 | 99,4 | 99,4 |
| <b>3</b>   | 34,1  | 30,8 | 29,5 | 28,7 | 28,2 | 27,9 | 27,7 | 27,5 | 27,3 | 27,2 |
| <b>4</b>   | 21,2  | 18,0 | 16,7 | 16,0 | 15,5 | 15,2 | 15,0 | 14,8 | 14,7 | 14,5 |
| <b>5</b>   | 16,3  | 13,3 | 12,1 | 11,4 | 11,0 | 10,7 | 10,5 | 10,3 | 10,2 | 10,1 |
| <b>6</b>   | 13,8  | 11,0 | 9,78 | 9,15 | 8,75 | 8,47 | 8,26 | 8,10 | 7,98 | 7,87 |
| <b>7</b>   | 12,3  | 9,55 | 8,45 | 7,85 | 7,46 | 7,19 | 6,99 | 6,84 | 6,72 | 6,62 |
| <b>8</b>   | 11,3  | 8,65 | 7,59 | 7,01 | 6,63 | 6,37 | 6,18 | 6,03 | 5,91 | 5,81 |
| <b>9</b>   | 10,6  | 8,02 | 6,99 | 6,42 | 6,06 | 5,80 | 5,61 | 5,47 | 5,35 | 5,26 |
| <b>10</b>  | 10,1  | 7,56 | 6,55 | 5,99 | 5,64 | 5,39 | 5,20 | 5,06 | 4,94 | 4,85 |
| <b>11</b>  | 9,65  | 7,21 | 6,22 | 5,67 | 5,32 | 5,07 | 4,89 | 4,74 | 4,63 | 4,54 |
| <b>12</b>  | 9,33  | 6,93 | 5,95 | 5,41 | 5,06 | 4,82 | 4,64 | 4,50 | 4,39 | 4,30 |
| <b>13</b>  | 9,07  | 6,70 | 5,74 | 5,21 | 4,86 | 4,62 | 4,44 | 4,30 | 4,19 | 4,10 |
| <b>14</b>  | 8,86  | 6,51 | 5,56 | 5,04 | 4,69 | 4,46 | 4,28 | 4,14 | 4,03 | 3,94 |
| <b>15</b>  | 8,68  | 6,36 | 5,42 | 4,89 | 4,56 | 4,32 | 4,14 | 4,00 | 3,89 | 3,80 |
| <b>16</b>  | 8,53  | 6,23 | 5,29 | 4,77 | 4,44 | 4,20 | 4,03 | 3,89 | 3,78 | 3,69 |
| <b>17</b>  | 8,40  | 6,11 | 5,19 | 4,67 | 4,34 | 4,10 | 3,93 | 3,79 | 3,68 | 3,59 |
| <b>18</b>  | 8,29  | 6,01 | 5,09 | 4,58 | 4,25 | 4,01 | 3,84 | 3,71 | 3,60 | 3,51 |
| <b>19</b>  | 8,18  | 5,93 | 5,01 | 4,50 | 4,17 | 3,94 | 3,77 | 3,63 | 3,52 | 3,43 |
| <b>20</b>  | 8,10  | 5,85 | 4,94 | 4,43 | 4,10 | 3,87 | 3,70 | 3,56 | 3,46 | 3,37 |

**ТАБЛИЦА 2**  
(продолжение 1)

**КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФИШЕРА**  
(  $k_1$  ,  $k_2$  - числа степеней свободы )

| <i>Уровень значимости <math>\alpha = 0,01</math></i> |       |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|--|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $k_2$  | $k_1$ |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|  | 11    | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   | 17   | 18   | 19   | 20   |
| <b>1</b>   | 6083  | 6107 | 6126 | 6143 | 6157 | 6170 | 6181 | 6191 | 6201 | 6209 |
| <b>2</b>   | 99,4  | 99,4 | 99,4 | 99,4 | 99,4 | 99,4 | 99,4 | 99,4 | 99,4 | 99,4 |
| <b>3</b>   | 27,1  | 27,1 | 27,0 | 26,9 | 26,9 | 26,8 | 26,8 | 26,8 | 26,7 | 26,7 |
| <b>4</b>   | 14,5  | 14,4 | 14,3 | 14,2 | 14,2 | 14,2 | 14,1 | 14,1 | 14,0 | 14,0 |
| <b>5</b>   | 9,96  | 9,89 | 9,82 | 9,77 | 9,72 | 9,68 | 9,64 | 9,61 | 9,58 | 9,55 |
| <b>6</b>   | 7,79  | 7,72 | 7,66 | 7,60 | 7,56 | 7,52 | 7,48 | 7,45 | 7,42 | 7,40 |
| <b>7</b>   | 6,54  | 6,47 | 6,41 | 6,36 | 6,31 | 6,28 | 6,24 | 6,21 | 6,18 | 6,16 |
| <b>8</b>   | 5,73  | 5,67 | 5,61 | 5,56 | 5,52 | 5,48 | 5,44 | 5,41 | 5,38 | 5,36 |
| <b>9</b>   | 5,18  | 5,11 | 5,05 | 5,01 | 4,96 | 4,92 | 4,89 | 4,86 | 4,83 | 4,81 |
| <b>10</b>  | 4,77  | 4,71 | 4,65 | 4,60 | 4,56 | 4,52 | 4,49 | 4,46 | 4,43 | 4,41 |
| <b>11</b>  | 4,46  | 4,40 | 4,34 | 4,29 | 4,25 | 4,21 | 4,18 | 4,15 | 4,12 | 4,10 |
| <b>12</b>  | 4,22  | 4,16 | 4,10 | 4,05 | 4,01 | 3,97 | 3,94 | 3,91 | 3,88 | 3,86 |
| <b>13</b>  | 4,02  | 3,96 | 3,91 | 3,86 | 3,82 | 3,78 | 3,75 | 3,72 | 3,69 | 3,66 |
| <b>14</b>  | 3,86  | 3,80 | 3,75 | 3,70 | 3,66 | 3,62 | 3,59 | 3,56 | 3,53 | 3,51 |
| <b>15</b>  | 3,73  | 3,67 | 3,61 | 3,56 | 3,52 | 3,49 | 3,45 | 3,42 | 3,40 | 3,37 |
| <b>16</b>  | 3,62  | 3,55 | 3,50 | 3,45 | 3,41 | 3,37 | 3,34 | 3,31 | 3,28 | 3,26 |
| <b>17</b>  | 3,52  | 3,46 | 3,40 | 3,35 | 3,31 | 3,27 | 3,24 | 3,21 | 3,19 | 3,16 |
| <b>18</b>  | 3,43  | 3,37 | 3,32 | 3,27 | 3,23 | 3,19 | 3,16 | 3,13 | 3,10 | 3,08 |
| <b>19</b>  | 3,36  | 3,30 | 3,24 | 3,19 | 3,15 | 3,12 | 3,08 | 3,05 | 3,03 | 3,00 |
| <b>20</b>  | 3,29  | 3,23 | 3,18 | 3,13 | 3,09 | 3,05 | 3,02 | 2,99 | 2,96 | 2,94 |

**ТАБЛИЦА 2**  
(продолжение 2)

**КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФИШЕРА**  
(  $k_1$  ,  $k_2$  - числа степеней свободы )

| <i>Уровень значимости <math>\alpha = 0,05</math></i> |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $k_2$  | $k_1$ |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|  | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    |
| <b>1</b>   | 161,4 | 199,5 | 215,7 | 224,6 | 230,2 | 234,0 | 236,8 | 238,9 | 240,5 | 241,9 |
| <b>2</b>   | 18,51 | 19,00 | 19,16 | 19,25 | 19,30 | 19,33 | 19,35 | 19,37 | 19,38 | 19,40 |
| <b>3</b>   | 10,1  | 9,55  | 9,28  | 9,12  | 9,01  | 8,94  | 8,89  | 8,85  | 8,81  | 8,79  |
| <b>4</b>   | 7,71  | 6,94  | 6,59  | 6,39  | 6,26  | 6,16  | 6,09  | 6,04  | 6,00  | 5,96  |
| <b>5</b>   | 6,61  | 5,79  | 5,41  | 5,19  | 5,05  | 4,95  | 4,88  | 4,82  | 4,77  | 4,74  |
| <b>6</b>   | 5,99  | 5,14  | 4,76  | 4,53  | 4,39  | 4,28  | 4,21  | 4,15  | 4,10  | 4,06  |
| <b>7</b>   | 5,59  | 4,74  | 4,35  | 4,12  | 3,97  | 3,87  | 3,79  | 3,73  | 3,68  | 3,64  |
| <b>8</b>   | 5,32  | 4,46  | 4,07  | 3,84  | 3,69  | 3,58  | 3,50  | 3,44  | 3,39  | 3,35  |
| <b>9</b>   | 5,12  | 4,26  | 3,86  | 3,63  | 3,48  | 3,37  | 3,29  | 3,23  | 3,18  | 3,14  |
| <b>10</b>  | 4,96  | 4,10  | 3,71  | 3,48  | 3,33  | 3,22  | 3,14  | 3,07  | 3,02  | 2,98  |
| <b>11</b>  | 4,84  | 3,98  | 3,59  | 3,36  | 3,20  | 3,09  | 3,01  | 2,95  | 2,90  | 2,85  |
| <b>12</b>  | 4,75  | 3,89  | 3,49  | 3,26  | 3,11  | 3,00  | 2,91  | 2,85  | 2,80  | 2,75  |
| <b>13</b>  | 4,67  | 3,81  | 3,41  | 3,18  | 3,03  | 2,92  | 2,83  | 2,77  | 2,71  | 2,67  |
| <b>14</b>  | 4,60  | 3,74  | 3,34  | 3,11  | 2,96  | 2,85  | 2,76  | 2,70  | 2,65  | 2,60  |
| <b>15</b>  | 4,54  | 3,68  | 3,29  | 3,06  | 2,90  | 2,79  | 2,71  | 2,64  | 2,59  | 2,54  |
| <b>16</b>  | 4,49  | 3,63  | 3,24  | 3,01  | 2,85  | 2,74  | 2,66  | 2,59  | 2,54  | 2,49  |
| <b>17</b>  | 4,45  | 3,59  | 3,20  | 2,96  | 2,81  | 2,70  | 2,61  | 2,55  | 2,49  | 2,45  |
| <b>18</b>  | 4,41  | 3,55  | 3,16  | 2,93  | 2,77  | 2,66  | 2,58  | 2,51  | 2,46  | 2,41  |
| <b>19</b>  | 4,38  | 3,52  | 3,13  | 2,90  | 2,74  | 2,63  | 2,54  | 2,48  | 2,42  | 2,38  |
| <b>20</b>  | 4,35  | 3,49  | 3,10  | 2,87  | 2,71  | 2,60  | 2,51  | 2,45  | 2,39  | 2,35  |



**ТАБЛИЦА 2**  
(продолжение 3)

**КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФИШЕРА**  
(  $k_1$  ,  $k_2$  - числа степеней свободы )

| <i>Уровень значимости <math>\alpha = 0,05</math></i> |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $k_2$  | $k_1$ |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|  | 11    | 12    | 13    | 14    | 15    | 16    | 17    | 18    | 19    | 20    |
| <b>1</b>   | 243,0 | 243,9 | 244,7 | 245,4 | 245,9 | 246,5 | 246,9 | 247,3 | 247,7 | 248,0 |
| <b>2</b>   | 19,40 | 19,41 | 19,42 | 19,42 | 19,43 | 19,43 | 19,44 | 19,44 | 19,44 | 19,45 |
| <b>3</b>   | 8,76  | 8,74  | 8,73  | 8,71  | 8,70  | 8,69  | 8,68  | 8,67  | 8,67  | 8,66  |
| <b>4</b>   | 5,94  | 5,91  | 5,89  | 5,87  | 5,86  | 5,84  | 5,83  | 5,82  | 5,81  | 5,80  |
| <b>5</b>   | 4,70  | 4,68  | 4,66  | 4,64  | 4,62  | 4,60  | 4,59  | 4,58  | 4,57  | 4,56  |
| <b>6</b>   | 4,03  | 4,00  | 3,98  | 3,96  | 3,94  | 3,92  | 3,91  | 3,90  | 3,88  | 3,87  |
| <b>7</b>   | 3,60  | 3,57  | 3,55  | 3,53  | 3,51  | 3,49  | 3,48  | 3,47  | 3,46  | 3,44  |
| <b>8</b>   | 3,31  | 3,28  | 3,26  | 3,24  | 3,22  | 3,20  | 3,19  | 3,17  | 3,16  | 3,15  |
| <b>9</b>   | 3,10  | 3,07  | 3,05  | 3,03  | 3,01  | 2,99  | 2,97  | 2,96  | 2,95  | 2,94  |
| <b>10</b>  | 2,94  | 2,91  | 2,89  | 2,86  | 2,85  | 2,83  | 2,81  | 2,80  | 2,79  | 2,77  |
| <b>11</b>  | 2,82  | 2,79  | 2,76  | 2,74  | 2,72  | 2,70  | 2,69  | 2,67  | 2,66  | 2,65  |
| <b>12</b>  | 2,72  | 2,69  | 2,66  | 2,64  | 2,62  | 2,60  | 2,58  | 2,57  | 2,56  | 2,54  |
| <b>13</b>  | 2,63  | 2,60  | 2,58  | 2,55  | 2,53  | 2,51  | 2,50  | 2,48  | 2,47  | 2,46  |
| <b>14</b>  | 2,57  | 2,53  | 2,51  | 2,48  | 2,46  | 2,44  | 2,43  | 2,41  | 2,40  | 2,39  |
| <b>15</b>  | 2,51  | 2,48  | 2,45  | 2,42  | 2,40  | 2,38  | 2,37  | 2,35  | 2,34  | 2,33  |
| <b>16</b>  | 2,46  | 2,42  | 2,40  | 2,37  | 2,35  | 2,33  | 2,32  | 2,30  | 2,29  | 2,28  |
| <b>17</b>  | 2,41  | 2,38  | 2,35  | 2,33  | 2,31  | 2,29  | 2,27  | 2,26  | 2,24  | 2,23  |
| <b>18</b>  | 2,37  | 2,34  | 2,31  | 2,29  | 2,27  | 2,25  | 2,23  | 2,22  | 2,20  | 2,19  |
| <b>19</b>  | 2,34  | 2,31  | 2,28  | 2,26  | 2,23  | 2,21  | 2,20  | 2,18  | 2,17  | 2,16  |
| <b>20</b>  | 2,31  | 2,28  | 2,25  | 2,22  | 2,20  | 2,18  | 2,17  | 2,15  | 2,14  | 2,12  |