1 Режими руху рідин

Умови тепло- і масообміну між тілом і навколишнім його рідиною залежать від режиму руху та швидкості руху тіла відносно рідини. Режим руху визначається швидкістю руху, характерним розміром тіла і в'язкістю рідини. У розрахунках прийнято, що краплі емульгування мають форму кулі. При русі тіла в рідині виникає сила опору руху, яка пропорційна коефіцієнту форми тіла, коефіцієнту опору, площі найбільшого поперечного перерізу, перпендикулярного напрямку руху і динамічному натиску з боку рідини

$$F_{\text{оп}} = k \cdot \xi \cdot \mathrm{S} \cdot \mathrm{H}_g, \tag{1.1}$$

де κ – коефіцієнт форми тіла (для кулі прийнято κ=1), ξ – коефіцієнт опору, $S = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$ – площа поперечного перерізу, d – діаметр краплини, $\mathrm{H}_g = \frac{\rho_{cep} \cdot W^2}{2}$ – динамічний натиск, ρ_{cep} – густина рідини, W – швидкість руху тіла.

Повний вираз для сили опору буде

$$F_{\text{оп}} = \xi \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \frac{\rho_{cep} \cdot W^2}{2}. \tag{1.2}$$

Коефіцієнт опору залежить від режиму руху, який визначається величиною числа Рейнольдса

$$Re = \frac{W \cdot d}{\nu} = \frac{W \cdot d \cdot \rho_{\text{сер}}}{\eta}, \tag{1.3}$$

де ν – кінематична в’язкість середовища, η – динамічна в’язкість середовища.

Відомі два режими – ламінарний, коли рідина обтікає тіло плавно без завихрень, і турбулентний, коли навколо тіла виникають вихори.

Експериментально і розрахунками встановлено межі режимів руху і величини коефіцієнтів опору при русі сферичного тіла, які представлені в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 – Межі режимів руху і величини коефіцієнтів опору при русі сферичного тіла

Режим	Граничні значення	Коефіцієнт опору
Ламінарний	$10^{-4}<Re<2$	$\xi = 24/Re$
Перехідний	$2<Re<500$	$\xi = 18{,}5/Re^{0,6}$
Турбулентний	$500<Re<2\cdot10^5$	$\xi = 0{,}44$

Рух тіла в рідині відбувається під дією сил діючих на тіло. На тіло занурене в рідину завжди діють дві сили: гравітаційна – F_g, спрямована вниз, і архімедова – $F_{\text{а}}$, спрямована вгору

$$F_g = \frac{\pi \cdot d^3}{6} g \cdot \rho_{\text{тв}},$$

$$F_{\text{а}} = \frac{\pi \cdot d^3}{6} g \cdot \rho_{\text{рід}},$$

де $\rho_{\text{рід}}$ – густина рідини, $\rho_{\text{тв}}$ – щільність твердого тіла.

Можуть діяти і інші сили, наприклад електромагнітна, але вони використовуються в спеціальних випадках.

Абсолютна сумарна сила, що діє на тіло буде

$$F_S = F_g - F_{\text{а}} = \frac{\pi \cdot d^3}{6} \cdot g \cdot (\rho_{\text{тв}} - \rho_{\text{рід}}), \tag{1.4}$$

Знак сили залежить від вектора напрямку координати, якщо $\rho_{\text{тв}} > \rho_{\text{рід}}$ – тіло рухається вниз (занурюється), якщо $\rho_{\text{тв}} < \rho_{\text{рід}}$ – тіло рухається вгору (спливає). У початковий момент (утворення краплини всередині рідини) під дією сумарної сили тіло починає переміщатися в рідині з деяким прискоренням, проте з виникненням сили опору величина прискорення зменшується і при рівності сумарної сили силі опору тіло продовжує рухатися з постійною швидкістю. Такий рух називають сталим. Зазвичай такий стан досягається при проходженні тілом шляху, що дорівнює кільком його діаметрам. Таким чином, сталий режим характеризується співвідношенням

$$F_{\text{оп}} = F_g. \tag{1.5}$$

1.1 Швидкість переміщення тіла при різних режимах руху

А. Ламінарний режим.

Підставив в вираз (1.5) значення $F_{\text{оп}}$ з (1.2), F_S з (1.4) та ξ з таблиці 1.1 для ламінарного режиму получимо вираз

$$\frac{\pi \cdot d^3}{6} \cdot g \cdot (\rho_{\text{тв}} - \rho_{\text{рід}}) =\cdot \frac{24 \cdot \pi \cdot d^2}{Re \cdot 4} \cdot \frac{\rho_{\text{рід}} \cdot W^2}{2}. \tag{1.6}$$

Після підстановки в (1.6) вираз Re через динамічну в'язкість (1.3) получимо вираз для швидкості руху тіла (занурення або спливання) при ламінарному режимі

$$W = \frac{d^2}{18} \cdot g \cdot \frac{|\rho_{\text{тв}} - \rho_{\text{рід}}|}{\eta} = \frac{2 \cdot r^2}{9} \cdot g \cdot \frac{|\rho_{\text{тв}} - \rho_{\text{рід}}|}{\eta}. \tag{1.7}$$

Цей вираз відомий як закон Стокса.

Б. Перехідний режим.

Підстановка в (1.5) значення $F_{\text{оп}}$, F_S та ξ з таблиці 1.1 дає

$$\frac{\pi\cdot d^3}{6}\cdot g\cdot(\rho_{\text{тв}}-\rho_{\text{рід}}) =\cdot \frac{18{,}5\cdot\pi\cdot d^2}{Re^{0{,}6}\cdot 4}\cdot\frac{\rho_{\text{рід}}\cdot W^2}{2}.$$

Після відповідних перетворень

$$W = 0{,}78\cdot\frac{d^{1{,}14}\cdot\left|\rho_{\text{тв}}-\rho_{\text{рід}}\right|^{0{,}715}}{\rho_{\text{рід}}^{0{,}285}\eta^{0{,}43}}. \qquad (1.8)$$

В. Турбулентний режим

$$\frac{\pi\cdot d^3}{6} g\cdot(\rho_{\text{тв}}-\rho_{\text{рід}}) =\cdot 0{,}44\frac{\pi\cdot d^2}{4}\cdot\frac{\rho_{\text{рід}}\cdot W^2}{2}, \text{ звідки}$$

$$W=\sqrt{\frac{4\cdot d\cdot\left|\rho_{\text{тв}}-\rho_{\text{рід}}\right|\cdot g}{3\cdot 0{,}44\cdot\rho_{\text{рід}}}}.$$

Прийняв g = 9,81 м/с^2, спрощуємо вираз

$$W = 5{,}45\sqrt{\frac{d\cdot\left|\rho_{\text{тв}}-\rho_{\text{рід}}\right|}{\rho_{\text{рід}}}}. \qquad (1.9)$$

Аналіз отриманих виразів показує, що зв'язок швидкості переміщення тіла в рідині від діаметра тіла істотно залежить від режиму руху. При ламінарному режимі (1. 7) швидкість руху пропорційна квадрату діаметра. При перехідному (1.8) швидкість переміщення практично пропорційна діаметру (показник ступеня 1,14 близький до одиниці), при турбулентному − пропорційна кореню квадратному від діаметра.

1.2. Визначення режиму переміщення тіла

Так як швидкість переміщення визначається режимом руху, а режим руху залежить від швидкості, то виникає задача визначення цих двох параметрів.

Завдання знаходження режиму руху може бути вирішена винятком швидкості з виразу для діючих сил

$$\frac{\pi\cdot d^3}{6}\cdot g\cdot\left|\rho_{\text{тв}}-\rho_{\text{рід}}\right| =\cdot \frac{\xi\cdot\pi\cdot d^2}{4}\cdot\frac{\rho_{\text{рід}}\cdot W^2}{2},$$

з якого слідує

$$W^2 =\cdot \frac{4}{3}\frac{g\cdot\left|\rho_{\text{тв}}-\rho_{\text{рід}}\right|\cdot d}{\xi\cdot\rho_{\text{рід}\cdot}}. \qquad (1.10)$$

Виразимо з числа Рейнольдса швидкість і підставивши у вираз (1.10), отримаємо

$$\frac{Re^2\cdot\nu^2}{d^2} =\cdot \frac{4}{3}\frac{g\cdot\left|\rho_{\text{тв}}-\rho_{\text{рід}}\right|\cdot d}{\xi\cdot\rho_{\text{рід}\cdot}}$$

або

$$Re^2 \cdot \xi =\cdot \frac{4}{3}\frac{g\cdot|\rho_{\text{тв}}-\rho_{\text{рід}}|\cdot d^3}{\nu^2\cdot\rho_{\text{рід}\cdot}}. \qquad (1.11)$$

Вхідний в (1.11) вираз

$$\frac{d^3\cdot g\cdot|\rho_{\text{тв}}-\rho_{\text{рід}}|\cdot}{\nu^2\cdot\rho_{\text{рід}\cdot}} = Ar \qquad (1.12)$$

є числом Архімеда.

Таким чином, замість (1.11) можна записати

$$Re^2 \cdot \xi = \frac{4}{3}Ar.$$

Для ламінарного режиму руху $Re \leq 2$, а $\xi = 24/Re$, тоді отримаємо

$$Ar \leq 36.$$

Відповідно для перехідного режиму число Архімеда

$$36 < Ar < 83000$$

та для турбулентного

$$Ar \geq 83000.$$

Таким чином, визначення режиму спливання зводиться до розрахунку числа Архімеда та зіставлення його з граничними значеннями.

Після цього вибирається вираз для швидкості руху, і проводиться його розрахунок.

1.3 Енергія утворення дисперсної системи

Створення дисперсної системи вимагає додаткової енергії, що витрачається на утворення нової поверхні

$$G_S = \sigma \cdot S = \sigma \cdot 4 \cdot \pi \cdot R^2,$$

де G_S – робота (енергія) утворення дисперсної частинки (краплини), Дж; σ – поверхневий натяг на межі фаз, Дж/м^2; S – площа поверхні, м; R – радіус частинки, м.

Маса краплі при цьому буде

$$m = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \rho,$$

де ρ – густина краплини.

Відповідно питома робота (робота, що віднесена до одиниці маси утворення краплини) буде

$$A_{\text{уд}} = \frac{G_S}{m} = \frac{3 \cdot 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \sigma_{\text{Ме–Шл}}}{4 \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \rho} = \frac{3 \cdot \sigma_{\text{Ме–Шл}}}{R \cdot \rho}.$$

Таким чином, питома робота утворення крапель обернено пропорційна радіусу, тобто чим дрібніше краплини, тим більше витрати енергії на їх утворення. Величини поверхневого натягу для металу 1,2 ... 1,8 Дж/м^2, для шлаку 0,3...0,6 Дж/м^2. З огляду на те, що густина шлаку в 2,5-3 рази нижче густини металу, то випливає, що витрати енергії на емульгування шлаку в метал і металу в шлак приблизно однакові.

2 Теплообмін у краплинах

При знаходженні краплини в рідких середовищах відбуваються процеси теплообміну і масообміну з навколишнім середовищем. У процесах теплопередачі розрізняють внутрішній і зовнішній теплообмін. Зовнішній теплообмін полягає в передачі теплоти від середовища до поверхні тіла, а внутрішній – від поверхні тіла в його обсяг. Способом передачі теплоти від середовища до рухомого в ній тілу є конвекція, що викликається переміщенням тіла. Внутрішній теплообмін в рідких краплинах може здійснюватися тільки теплопровідністю або спільно теплопровідністю і конвекцією. При малих розмірах частинок конвективний перенос в їх обсязі розвинений слабко і тому можна вважати, що передача теплоти в об'ємах частинок (краплин) здійснюється тільки теплопровідністю. Надалі краплина іменується тілом, навколишній розплав – середовищем, а нагрівання (охолодження) центральносиметричним.

2.1 Внутрішній теплообмін

Загальна схема теплообміну краплі з навколишнім середовищем (для випадку нагрівання) приведена на рис. 2.1.

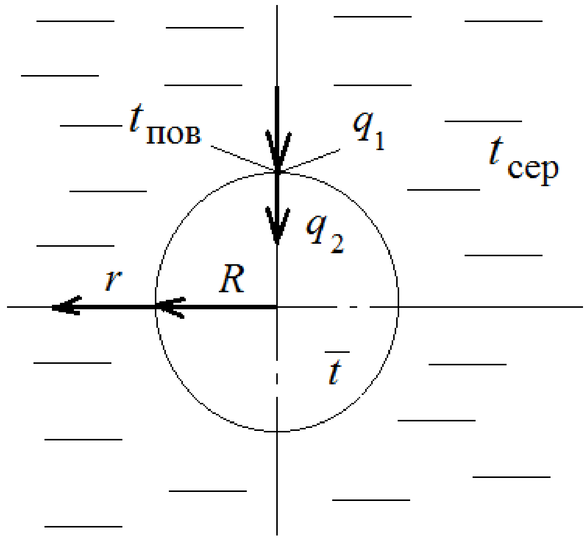

Рис. 2.1 – Схема теплообміну краплини з навколишнім середовищем при нагріванні

На поверхню тіла спрямований тепловий потік

$$q_1 = \alpha \cdot (t_{сер} - t_{пов}),$$

де α – коефіцієнт теплопередачі (тепловіддачі), $t_{сер}$ – температура середовища, $t_{пов}$ – температура поверхні тіла.

Усередині тіла існує тепловий потік від поверхні в об'єм

$$q_2 = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}|_{r=R}, \tag{1.13}$$

де λ – теплопровідність тіла, $\frac{\partial T}{\partial r}$ – градієнт температур на поверхні, r – координата, R – радіус тіла. Вираз $r = R$ означає, що вираз (1.13) відноситься до поверхні, знак (–) означає, що потік теплоти направлений назустріч градієнту. Так як поверхня не має товщини, і теплота в ній не накопичується, то теплові потоки q_1 та q_2 дорівнюють між собою.

$$\alpha \cdot (t_{сер} - t_{пов}) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}|_{r=R}. \tag{1.14}$$

Вираз (1.14) є граничною умовою третього роду (задані температура середовища і умови теплообміну між тілом і середовищем).

Поширення температур в обсязі тіла при центральній симетрії описується рівнянням Фур'є для сферичного тіла

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a_т \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right),$$

де τ – час, $a_т = \frac{\lambda_т}{C_т \rho_т}$ – температуропровідність тіла, $\lambda_т$ – теплопровідність тіла, $C_т$ – його теплоємкість; $\rho_т$ – его щільність. Приведення рівняння (1.13) до безрозмірного вигляду дає критерій - *теплове число Біо*

$$Bi = \frac{\alpha \cdot R}{\lambda_т},$$

яке є відношенням зовнішнього теплообміну до внутрішнього.

Приведення до безрозмірного вигляду рівняння (1.14) дає *теплове число Фур'є*

$$Fo = \frac{a \cdot \tau}{R^2}, \quad (1.15)$$

яке представляє безрозмірний час процесу.

Так як умови теплообміну приведені до безрозмірного вигляду, то і температура також повинна бути безрозмірною

$$\theta = \frac{T - t_{min}}{t_{max} - t_{min}}.$$

У загальному вигляді рішення рівняння (1.14) з граничними умовами (1.13) має вигляд

$$\theta = f(Fo, Bi, \eta_r), \quad (1.16)$$

де $\eta_r = \frac{r}{R}$ – безрозмірна координата.

Умови обмеження нагрівання визначаються величиною числа *Bi*. При значенні *Bi* = ∞ (практично *Bi* > 100) лімітує внутрішній теплообмін і температура поверхні миттєво досягає температури середовища. При значенні *Bi* = 0 (практично *Bi* < 0,3) лімітує зовнішній теплообмін і градієнт температур в обсязі практично відсутній. При проміжних значеннях *Bi* (0,3 < *Bi* <100) має місце випадок змішаного теплообміну.

Для дрібних частинок розподіл температур в обсязі тіла не має істотного значення і краще користуватися середньою температурою тіла – $\bar{t}$, при цьому вираз для безрозмірної середньої температури буде $\bar{\theta} = \frac{\bar{t} - t_{min}}{t_{max} - t_{min}}$,

звідки $\bar{t} = (t_{max} - t_{min}) \cdot \bar{\theta} + t_{min}$.

Температури t_{max} та t_{min} – це найбільша та найменша температури, що мають місце при нагріванні (охолодженні) даного тіла. Таким чином, температура, що шукається, завжди знаходиться між ними, тобто безрозмірна температура $\bar{\theta}$ буде змінюватися від 0 до 1, а функціональний зв'язок (1.16) спрощується $\bar{\theta} = f(Fo, Bi)$.

2.2 Зовнішній теплообмін

Зовнішній теплообмін визначається числом *Нуссельта*

$$Nu = \frac{\alpha \cdot R}{\lambda_{сер}},$$

де $\lambda_{сер}$ – теплопровідність середовища.

Число Nu визначає співвідношення зовнішнього теплообміну середовища до теплопровідності середовища. Інтенсивність зовнішнього теплообміну визначається режимом і швидкістю руху частинок, тобто числом *Рейнольдса*, та співвідношенням швидкості передачі імпульсу до швидкості передачі теплоти, тобто числом *Прандтля*

$$Pr = \frac{\nu_{сер}}{a_{сер}},$$

де $\nu_{сер}$ – кінематична в'язкість середовища, $a_{сер} = \frac{\lambda_{сер}}{c_{сер}\rho_{сер}}$ – температуропровідність середовища.

Число Нуссельта може бути розраховано з виразів:

при значеннях $Re \le 300$

$$Nu = 2 \cdot (1 + 0{,}3 \cdot Re^{0{,}5} \cdot Pr^{1/3}),$$

при значеннях $Re > 300$

$$Nu = 0{,}37 \cdot Re^{0{,}6} \cdot Pr^{0{,}3}.$$

Коефіцієнт тепловіддачі визначається за величиною числа Nu

$$\alpha = \frac{Nu \cdot \lambda_{сер}}{R}.$$

За величиною α визначається число *Біо*.

3 Масообмін в краплинах

При знаходженні краплин в рідких розплавах, відмінних за характером і хімічним складом від речовини краплин (краплини металу в шлаку, краплини шлаку в металі), відбувається процес обміну речовинами між ними. Процеси масообміну і теплообміну, як буде показано нижче, мають аналогічну природу і описуються аналогічними диференціальними рівняннями. Така аналогія полегшує вирішення цілого ряду завдань, дозволяючи використовувати рішення задач теплообміну для вирішення завдань масообміну.

Масообмін між фазами складається з зовнішнього і внутрішнього масообміну. Способами передачі речовини при зовнішньому масообміні є конвекція, викликана рухом тіла в розплаві, і молекулярна дифузія. Внутрішній масообмін здійснюється молекулярної дифузією і при досить великих обсягах тіла і конвекцією. Для краплин, реально існуючих в металургійних процесах, конвекційним перенесенням в них можна знехтувати.

3.1 Внутрішній масообмін

При описі внутрішнього масообміну використана аналогія диференціальних рівнянь тепло- і масообміну. Загальна схема такого процесу аналогічна той, що зображена на рис. 3.1., тільки рушійним потенціалом є різниця концентрацій, а перенесення здійснюється дифузією.

На поверхню тіла направлений потік речовини

$$j_1 = \beta \cdot (C_{\text{сер}} - C_{\text{пов}}),$$

Від поверхні вглиб тіла виникає потік речовини в об'єм

$$j_2 = -D_{\text{т}} \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial r}\Big|_{r=R}, \tag{1.16}$$

де β – коефіцієнт масовіддачі, $\mathrm{C}_{\text{сер}}$ – концентрація речовини в середовищі, $\mathrm{C}_{\text{пов}}$ – концентрація речовини на поверхні тіла, $D_{\text{т}}$ – коефіцієнт дифузії речовини в тілі, $\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial r}$ – градієнт концентрації на поверхні тіла (r = R). Також, як при теплообміні знак (–) означає, що потік речовини направлений в другу сторону, ніж градієнт концентрацій.

На поверхні тіла обидва потоку дорівнюють друг другу

$$\beta \cdot \left(\mathrm{C}_{\text{сер}} - \mathrm{C}_{\text{пов}}\right) = -D_{\text{т}} \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial r}. \tag{1.17}$$

Вираз (1.17) є граничною умовою третього роду (задані концентрація речовини в середовищі і умови масообміну між тілом і середовищем).

Приведення рівняння (1.17) до безрозмірного вигляду дає критерій - *дифузійне число Біо*

$$Bi_{\text{д}} = \frac{\beta \cdot R}{D_{\text{т}}},$$

яке характеризує відношення зовнішнього масообміну до внутрішнього.

Аналогічно теплообміну, можливі три випадки лімітування процесу масообміну. При значенні $Bi_{\text{Д}}$ = ∞ (практично $Bi_{\text{Д}}$ > 100) лімітує внутрішній масообмін, при значенні $Bi_{\text{Д}}$ = 0 (практично $Bi_{\text{Д}}$ < 0,3) лімітує зовнішній масообмін. При 0,3 < Bi <100 має місце випадок змішаного масообміну.

Розподіл речовини в тілі за рахунок молекулярної дифузії описується рівнянням *Фіка*

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = D_{\text{т}}\left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial C}{\partial r}\right),$$

яке аналогічне рівнянню Фур'є (1.15) та при приведенню к безрозмірному виду дає *дифузійне число Фур'є*

$$Fo_{\text{д}} = \frac{D \cdot \tau}{R^2}.$$

Також, як для теплообміну між краплинами та розплавом, зважаючи на малий розмір краплин, зручніше користуватися середньою концентрацією речовини в краплині, безрозмірний вираз, для якої буде

$$\overline{\theta_{\text{д}}} = \frac{\bar{C} - C_{min}}{C_{max} - C_{min}},$$

звідки $\bar{C} = (C_{max} - C_{min}) \cdot \overline{\theta_{\text{д}}} + C_{min}$.

Загальна функціональна залежність має вигляд $\overline{\theta_{\text{д}}} = f\left(Fo_{\text{д}}, Bi_{\text{д}}\right)$.

3.2 Зовнішній масообмін

Зовнішній масообмін визначається числом *Шервуда*

$$Sh = \frac{\beta \cdot R}{D_{\text{сер}}},$$

де $D_{\text{сер}}$ – коефіцієнт дифузії середовища. Число *Шервуда* є дифузійним аналогом числа *Нуссельта*.

Інтенсивність зовнішнього масообміну зв'язана з режимом і швидкістю руху тіла та співвідношенням швидкості передачі імпульсу до швидкості передачі речовини, останнє визначається числом *Шмідта*

$$Sc = \frac{\nu_{\text{сер}}}{D_{\text{сер}}}.$$

Число *Шмідта* є аналог числа *Прандтля* та представляє міру відношення передачі імпульсу до передачі речовини конвекцією. Число *Шервуда* може бути розраховано за виразами:

при значеннях $Re \leq 200$

$$Sh = 2 \cdot (1 + 0{,}3 \cdot Re^{0{,}5} \cdot Sc^{1/3}),$$

При значеннях $Re > 200$

$$Sh = 0{,}43 \cdot Re^{0{,}56} \cdot Sc^{1/3}.$$

За величиною *Sc* може бути розрахований коефіцієнт масовіддачі

$$\beta = \frac{Sh \cdot D_{\text{сер}}}{R},$$

за яким розраховується дифузійне число *Біо*.

Якщо при теплообміні процес приходить до рівноваги при рівності температур у всіх частинах системи, то при масообміні гетерогенний процес закінчується при встановленні фазової рівноваги. Наприклад, для реакції (FeO) = [Fe] + [O], яку можна розглядати як перенесення кисню зі шлаку в метал, процес закінчиться при встановленні рівноваги, що можна уявити через константу розподілу кисню між металом і шлаком

$$L_O = \frac{a_{[O]}}{a_{(FeO)}},$$

де $a_{[O]}$ – активність кисню в металі, $a_{(FeO)}$ – активність оксиду заліза (II) у шлаці.

Якщо здійснюється перенесення кисню зі шлаку в метал, то він закінчується при досягненні активності кисню в металі, який рівноважний зі шлаком

$$\mathrm{C}_{\text{рівн}} = a_{[O]} = L_O \cdot a_{(FeO)}.$$

У разі перенесення кисню з металу в шлак (дифузійне розкислення), то процес закінчиться при досягненні активності в шлаку, який рівноважний з металом

$$\mathrm{C}_{\text{рівн}} = a_{(FeO)} = a_{[O]}/L_O.$$

При визначені $\overline{\theta}_{\text{д}}$ слід попередньо визначити в яку сторону (з якої фази в яку) здійснюється перенос речовини.