МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

Т.М.КАДИЛЬНИКОВА, І.В.ЩЕРБИНА, П.Г.ХОРОШМАНЕНКО

ВИЩА МАТЕМАТИКА
В ПРИКЛАДАХ ТА ЗАДАЧАХ

Частина IV

Дніпропетровськ НМетАУ 2010

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

Т.М.КАДИЛЬНИКОВА, І.В.ЩЕРБИНА, П.Г.ХОРОШМАНЕНКО

ВИЩА МАТЕМАТИКА
В ПРИКЛАДАХ ТА ЗАДАЧАХ

Частина IV

Затверджено на засіданні Вченої ради академії
як навчальний посібник

Дніпропетровськ НМетАУ 2010

УДК 517(07)

Кадильникова Т.М., Щербина І.В., Хорошманенко П.Г. Вища математика в прикладах та задачах. Частина IV: Навч. посібник.- Дніпропетровськ: НМетАУ, 2010.- 96 с.

Наведені докладні рекомендації до вивчення дисципліни «Вища математика». Теоретичні положення супроводжуються необхідними поясненнями та ілюстраціями, а також розв'язуванням типових задач. Рекомендуються завдання для самостійної роботи.

Призначений для студентів технічних спеціальностей всіх форм навчання.

Іл.18. Бібліогр. 5 найм.

Друкується за авторською редакцією.

Відповідальний за випуск А.В.Павленко, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рецензенти: Т.С.Кагадій, д-р фіз.-мат. наук, проф. (НГУ)
А.В.Сясєв, канд. фіз.-мат. наук, доц. (ДНУ).

ВСТУП

Розв’язання задач з вищої математики часто пов’язано з багатьма складностями. Відомо, що при самостійному розв’язуванні задач студентам потрібні постійні консультації щодо способів їх розв’язування, оскільки знайти шлях до розв’язування задачі без допомоги викладача або відповідного підручника студентові не під силу. Допомогти студентам подолати ці складності, навчити їх застосовувати теоретичні знання до розв’язування задач - основне призначення цього навчального посібника.

Метою видання є надання допомоги студентам у отриманні навичок з розв’язування типових задач, користуючись наведеними теоремами та формулами, а також детально розібраними прикладами. Там, де це можливо, задачі класифікувалися за темами. До кожного нового типу подано задачі з розв’язуванням і кілька задач того самого типу для самостійного опрацювання. Основна форма навчання студентів – самостійна робота над навчальним матеріалом, яка складається з вивчення теоретичних положень за підручником, розгляду прикладів і розв’язання задач. При вивченні матеріалу за підручником треба переходити до наступного питання тільки після правильного зрозуміння попереднього, виконуючи на папері усі обчислення, навіть і ті, які пропущені у підручнику.

Завершальний етап вивчення наведених частин дисципліни «Вища математика» - складання заліків та іспитів відповідно до навчального плану, тому студент повинен пам’ятати, що тільки при систематичній самостійній роботі допомога навчального видання буде носити ефективний характер.

1. Подвійний інтеграл, його властивості. Обчислення подвійного інтеграла в декартових координатах

Нехай $D-$обмежена область площини xoy з кусково-гладкими межами, а функція $f(x,y)$ визначена і обмежена в області D. За допомогою сітки кусково-гладких кривих розбиваємо область D на скінченне число елементарних підобластей $\Delta D_1, \Delta D_2, ..., \Delta D_n$ з площинами $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$ (рис. 1.1). Множину цих елементарних частин області D назвемо розбиттям δ_n. Нехай $\lambda_n -$найбільший з діаметрів елементарних областей $\Delta D_1, \Delta D_2, ..., \Delta D_n$. У кожній з елементарних областей вибирається довільна $N_i(x_i, y_i)$ точка.

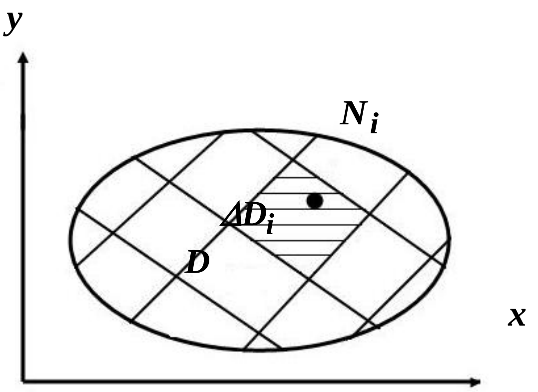

Рис. 1.1

Число $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i$ ставиться у відповідність кожному розбиттю σ_n і називається інтегральною сумою розбиття σ_n.

Якщо існує границя інтегральної суми σ_n при $\lambda_n \to 0$, і якщо вона не залежить від способу розбиття області D на елементарні підобласті ΔD_i і від вибору точок $N_i(x_i, y_i)$, то вона називається подвійним інтегралом від функції $f(x,y)$ по області D і позначається через $\iint\limits_D f(x,y)\,dS$.Таким чином,

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dS = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i\,, \qquad (1.1)$$

де $\lambda_n = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i;$ $\quad d_i = diam(\Delta S_i),\quad i = \overline{1,n}$.

Теорема. Подвійний інтеграл (1.1) існує, якщо в скінченній замкненій області D, обмеженій гладким або кусково-гладким контуром, функція $f(x,y)$

або неперервна, або обмежена і має розриви на скінченному числі кусково-гладких ліній.

Властивості подвійного інтеграла

1. Сталий множник можна винести за знак подвійного інтеграла:

$$\iint\limits_{D} c \cdot f(x,y)\, dS = c \cdot \iint\limits_{D} f(x.y)\, dS .$$

2. Подвійний інтеграл алгебраїчної суми дорівнює відповідній сумі інтегралів від складових:

$$\iint\limits_{D} [f(x,y) \pm g(x,y)]\, dS = \iint\limits_{D} f(x,y)\, dS \pm \iint\limits_{D} g(x,y)\, dS .$$

3. Якщо область D розкласти на скінчене число частин, тоді подвійний інтеграл по всій області D дорівнює сумі інтегралів по всіх її частинах:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\, dS = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\, dS + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\, dS + \ldots + \iint\limits_{D_n} f(x,y)\, dS .$$

4. Якщо в замкненій області D функції $f(x,y)$ і $g(x,y)$ непевні й, задовольняють співвідношення $f(x,y) \geq g(x,y)$, тоді справедлива нерівність:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\, dS \geq \iint\limits_{D} d(x,y)\, dS .$$

5. Абсолютна величина інтеграла не перевищує інтеграла від абсолютної величини підінтегральної функції:

$$\left| \iint\limits_{D} f(x,y)\, dS \right| \leq \iint\limits_{D} |f(x,y)|\, dS .$$

6. ***Теорема про середнє***. Якщо $f(x,y)$ і $g(x,y)$ неперервні в скінченній замкненій області D, і $g(x,y)$ знакостала в D, то справедлива формула:

$$\iint\limits_{D} f(x,y) \cdot g(x,y)\, dS = f(x_0, y_0) \cdot \iint\limits_{D} g(x,y)\, dS ,$$

де $M_0(x_0, y_0) \in D$.

Обчислення подвійного інтеграла в декартових координатах

Нехай функція $f(x,y)$ неперервна в прямокутнику $D=\{a \le x \le b; \quad c \le y \le d\}$. Вираз $dS = dx \cdot dy$ є елементом площі в декартових прямокутних координатах. Подвійний інтеграл від функції $f(x,y)$ по області D обчислюється за формулою:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy. \tag{1.2}$$

Якщо поміняти місцями x і y в (1.2), то буде справедливою рівність:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx.$$

В останній формулі інтегрування ведеться спочатку по x при сталому y, а потім одержаний результат інтегрується по y, тобто послідовно обчислюється два визначених інтеграли.

Нехай функція $f(x,y)$ неперервна або кусково-неперервна в криволінійній області $D=\{a \le x \le b; \quad y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$, де $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – функції, які неперервні на відрізку $[a;b]$. Візьмемо область D в прямокутник $\Omega=\{a \le x \le b; \quad c \le y \le d\}$, де c – найменше значення $y_1(x)$ в $[a;b]$, d – найбільше значення $y_2(x)$ в $[a;b]$ (рис. 1.2).

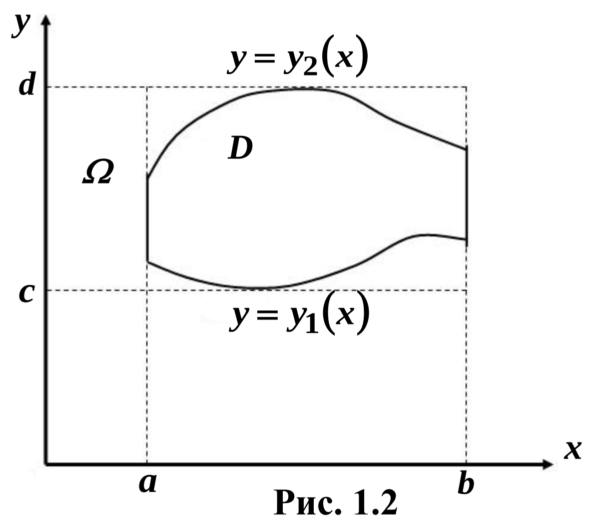

Рис. 1.2

Визначимо у цьому прямокутнику функцію $f_*(x, y)$ такими рівностями:

$$f_*(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \textbf{якщо точка } (x,y) \textbf{ належить } D; \\ 0, & \textbf{якщо точка } (x,y) \textbf{ належить } \Omega / D. \end{cases}$$

Функція $f_*(x, y)$ кусково-неперервна в прямокутнику Ω, тому, згідно формулою (1.2), маємо:

$$\iint_{\Omega} f_*(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_c^d f_*(x, y)\, dy .$$

Звідси отримаємо наступну формулу:

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy . \tag{1.3}$$

Якщо область інтегрування $D = \{c \le y \le d; \quad x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$ (рис.1.3), то, змінюючи у формулі (1.3) роль x і y, прийдемо до аналогічної формули:

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx . \tag{1.4}$$

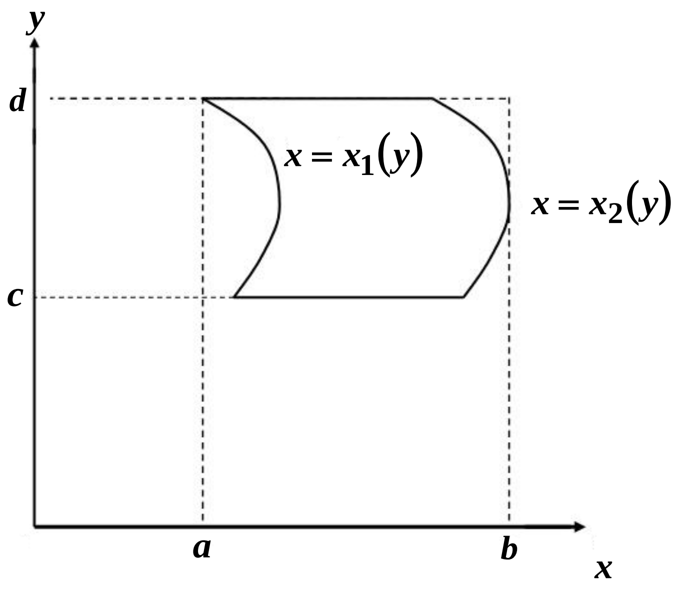

Рис. 1.3

Якщо область D не задовольняє наведеним для (1.3) і (1.4) умовам, а саме, вертикальні й горизонтальні прямі перетинають її границю більше ніж у двох точках, то у цьому випадку область $\boldsymbol{D}$ розбивають на частини, як розглянуто вище, й, підсумовуючи одержаний результат по кожній частині, обчислюємо інтеграл по всій області.

Зразки розв'язування задач

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\iint\limits_{D}(2x+3y)\,dx\,dy$, якщо область $\boldsymbol{D}$ поширена на інтервалі $\{1\le x\le 2;\quad 3\le y\le 4\}$.

Розв'язання.

Шуканий інтеграл дорівнює

$$\iint(2x3y)\,dx\,dy=\int_1^2 dx\int_3^4(2x+3y)\,dy.$$

Для функції $2x+3y$, яка розглядається як функція від x при постійному y, первісною буде функція $2x\cdot y+3\cdot\frac{y^2}{2}$.

Тому

$$\int_3^4(2x+3y)\,dy=\left(2\cdot x\cdot y+3\cdot\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=3}^{y=4}=8x-6x+24-\frac{27}{2}=2x-\frac{21}{2}.$$

Шуканий подвійний інтеграл дорівнює:

$$\int_1^2\left(2x-\frac{21}{2}\right)dx=\left(2\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{21}{2}x\right)\Bigg|_{x=1}^{x=2}=4-21-\left(1-\frac{21}{2}\right)=-7{,}5.$$

Приклад 2. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі

$$\int_0^2 dx\int_{x^2}^{2x} f(x,y)\,dy.$$

Розв'язання.

Побудуємо область інтегрування $\boldsymbol{D}$, визначивши криві та прямі, якими обмежена ця область (рис. 1.4).

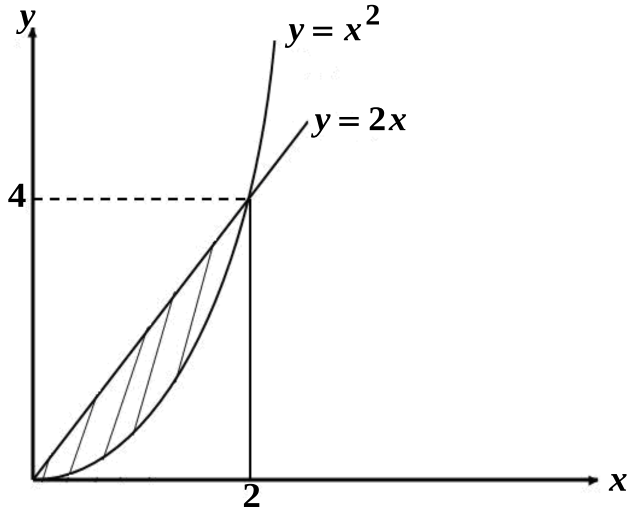

Рис. 1.4

Область D аналітично має вигляд: $D = \{x = 0; x = 2; y = x^2; y = 2x\}$. Межі інтегрування вибираємо по змінній y, для цього спроектуємо область D на вісь Oy. Область D проектується на відрізок $[0;4]$ осі Oy. Абсциса у цих межах змінюється від $x = \frac{y}{2}$ до $x = \sqrt{y}$. Таким чином, змінивши порядок інтегрування, матимемо:

$$\int_0^2 dx \int_{x^2}^{2x} f(x, y)\, dx = \int_0^4 dy \int_y^{\sqrt{4}} f(x, y)\, dx .$$

Приклад 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D xy\, dx\, dy$, якщо область D обмежена кривими: $y = 2x^2$; $y = 3 - x^2$; $x = 0$.

Розв'язання. Область інтегрування зображена на рис. 1.5.

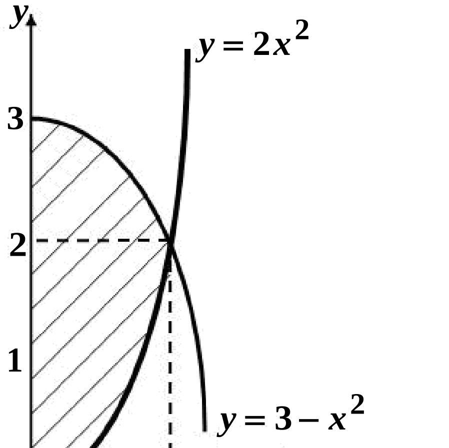

Рис.1.5

Для обчислення заданого інтеграла краще скористатися формулою (1.3):

$$\iint\limits_D xy\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{2x^2}^{3-x^2} x\cdot y\,dx = \int_0^1 x\cdot\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{2x^2}^{3-x^2} dx = \int_0^1 \frac{x}{2}\left(\left(3-x^2\right)^2 - 4x^4\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\left(9-6x^2+x^4-4x^4\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^1\left(9-6x^2-3x^4\right)dx = \frac{1}{2}\left(9x-6\cdot\frac{x^3}{3}-3\cdot\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(9-2-\frac{3}{5}\right) = 3{,}2\,.$$

Приклад 4. Розставити границі інтегрування двома способами й обчислити подвійний інтеграл

$$\iint\limits_D \cos x\,dx\,dy\,,$$

якщо область інтегрування обмежена лініями: $y = x;\ y = 2x;\ x = \pi$.

Розв'язання.

Область інтегрування зображена на рис. 1.6.

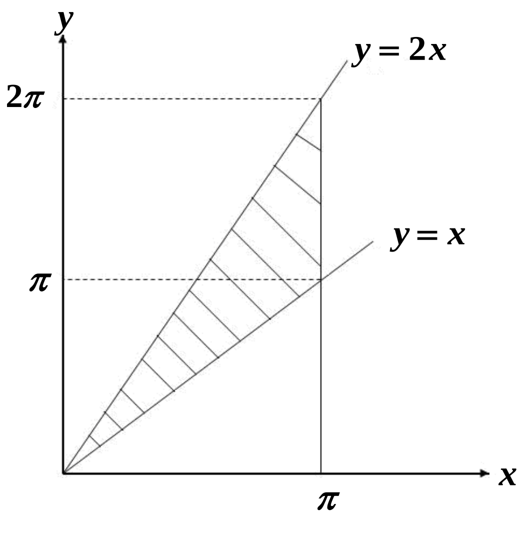

Рис. 1.6

Для обчислення заданого інтеграла скористаємось спочатку формулою (1.3.):

$$\iint\limits_D \cos x\, dxdy = \int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_x^{2x} \cos x\, dy = \int\limits_0^{\pi} \cos x \cdot (y) \Big|_x^{2x} dx = \int\limits_0^{\pi} x \cdot \cos x\, dx .$$

Останній інтеграл проінтегруємо за частинами: $u = x$; $dv = \cos x\, dx$; $du = dx$; $v = \sin x$. Тоді

$$\iint\limits_D \cos x\, dx\, dy = (x \cdot \sin x) \Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} \sin x\, dx = (\cos x) \Big|_0^{\pi} = -1 - 1 = 2 ;$$

$$\iint\limits_D \cos x dxdy = (x \cdot \sin x) \Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} \sin x dx = (\cos x) \Big|_0^{\pi} = -1 - 1 = -2 .$$

Якщо для обчислення даного інтеграла скористатися формулою (1.4), то

$$x = \frac{y}{2} \text{ і } x = y \text{ при } 0 \le y \le \pi ;$$

$$x = \frac{y}{2} \text{ і } x = \pi \text{ при } \pi \le y \le 2\pi .$$

Отже, область D треба розбити на дві області, після чого маємо:

$$\iint\limits_D \cos x\, dx\, dy = \int\limits_0^{\pi} dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{y} \cos x\, dx + \int\limits_{\pi}^{2\pi} dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{2\pi} \cos x\, dx = \int\limits_0^{\pi} (\sin x) \Big|_{\frac{y}{2}}^{y} dy + \int\limits_{\pi}^{2\pi} (\sin x) \Big|_{\frac{y}{2}}^{\pi} dy =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \left(\sin y - \sin \frac{y}{2} \right) dy + \int\limits_{\pi}^{2\pi} \left(-\sin \frac{y}{2} \right) dy = \left(-\cos y + 2\cos \frac{y}{2} \right) \Big|_0^{\pi} + 2 \left(\cos \frac{y}{2} \right) \Big|_{\pi}^{2} =$$
$$= 1 + 1 - 2 + 2 \cdot (-1) = -2 ,$$

тобто ми одержали такий же результат, що й раніше.

Приклад 5. Змінити порядок інтегрування й обчислити повний інтеграл

$$I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^3} x\, dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} x\, dx .$$

Розв'язання.

Побудуємо область інтегрування D, яка обмежена кривою $x = y^3$, прямою $x = 2 - y$ та віссю oy (рис.1.7.).

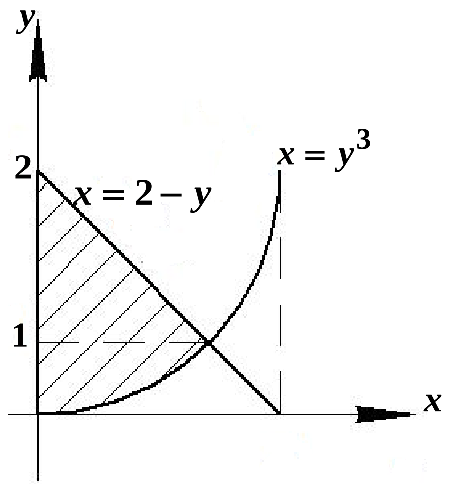

Рис 1.7

Спроектуємо область D на вісь ox у відрізок $[0;1]$, на якому y змінюється від $\sqrt[3]{x}$ до $2-x$.

Таким чином ,

$$I=\int_0^1 dx\int_{\sqrt[3]{x}}^{2-x} x\,dy=\int_0^1 x\cdot(y)\Big|_{\sqrt[3]{x}}^{2-x}dx=\int_0^1\left(2x-x^2-x^{\frac{4}{3}}\right)dx=\left(2\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{3}{7}\sqrt[3]{x^7}\right)\Big|_0^1=$$

$$=1-\frac{1}{3}-\frac{3}{7}=\frac{5}{21}.$$

Завдання для самостійної роботи

І. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі:

а) $\int_0^1 dx\int_1^{2-x} f(x,y)\,dy$;

б) $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$;

в) $\int_0^1 dy\int_{2y+1}^{4-y^2} f(x,y)\,dx$;

г) $\int_0^1 dy\int_0^{2y+1} f(x,y)\,dy+\int_1^{\sqrt{2}} dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy$.

II. Обчислити подвійний інтеграл:

а) $\iint\limits_D (x-2y)\,dx\,dy$, $D:\begin{cases} y=x; \quad y=3x; \\ x=2. \end{cases}$

б) $\iint\limits_D y^2\cdot xdxdy,$ $\quad D:\begin{cases} y=x^2, \\ x+y=6. \end{cases}$

в) $\iint\limits_D \frac{x}{y^2}dxdy,$ $\quad D:\begin{cases} x=4, \quad y=x, \\ x\cdot y=1. \end{cases}$

г) $\iint\limits_D y\cdot \cos xydxdy,$ $\quad D:\begin{cases} x=1, \ \ x=2, \\ y=\frac{\pi}{2}, \ \ y=\pi. \end{cases}$

2. Обчислення подвійного інтеграла в полярній системі координат. Застосування подвійних інтегралів до задач геометрії.

У випадку ***полярної системи*** координат $x=\rho\cos\varphi, \quad y=\rho\sin\varphi$. Тоді елемент площі в полярних координатах має вигляд:

$$dS=\rho\, d\rho\, d\varphi.$$

Подвійний інтеграл в полярній системі координат обчислюється за формулою:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_{\alpha}^{\beta}d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}f(\rho\cos\varphi)\rho\, d\rho, \qquad (2.1)$$

де α і β – відповідно найменше й найбільше значення змінної φ в області D; $\rho=\rho_1(\varphi)$ і $\rho=\rho_2(\varphi)$ – рівняння межі D (рис. 2.1).

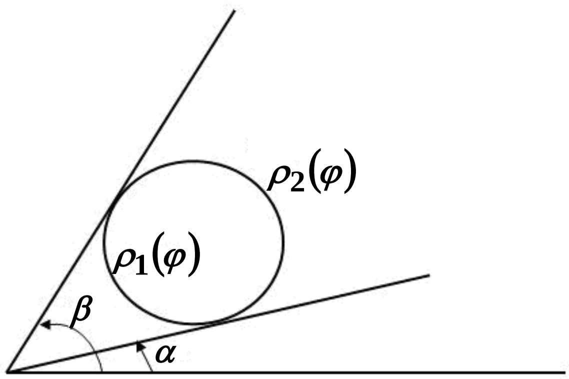

Рис. 2.1

Об'єм тіла. Для циліндричного тіла твірні якого паралельні осі $\boldsymbol{Oz}$, яке обмежене знизу областю $\boldsymbol{D}$ площини $\boldsymbol{xOy}$, а зверху – поверхнею $\boldsymbol{z = f(x, y) > 0}$, об'єм обчислюється за наступною формулою:

$$\boldsymbol{V = \iint\limits_D f(x, y) dx\, dy,} \qquad (2.2)$$

де $\boldsymbol{f(x, y)} -$ функція неперервна в області $\boldsymbol{D}$.

Площа поверхні обертання. Якщо поверхня $\boldsymbol{z = f(x, y)}$ проектується на площину $\boldsymbol{xOy}$ у вигляді області $\boldsymbol{D}$, то площа поверхні $\boldsymbol{z = f(x, y)}$ обчислюється за формулою:

$$p = \iint\limits_D \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2}\, dx\, dy. \qquad (2.3)$$

Площа плоскої фігури. Якщо $\boldsymbol{f(x, y) = 1}$, а $\boldsymbol{(x, y) \in D}$, то циліндричне тіло, об'єм якого обчислюється за формулою (2.2), перетворюється в прямий циліндр з висотою, яка дорівнює 1. Об'єм такого циліндра дорівнює площі його основи. Отже, площа області $\boldsymbol{D}$ буде обчислюватися за формулою:

$$\boldsymbol{S = \iint\limits_D dx\, dy}. \qquad (2.4)$$

Для полярної системи координат $\boldsymbol{S = \iint\limits_D \rho\, d\rho\, d\varphi}$.

Зразки розв'язування задач

Приклад 1. Перейти до полярних координат і обчислити подвійний інтеграл $\boldsymbol{\iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}}$, де область $\boldsymbol{D}$ обмежена колом $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 1}$.

Розв'язання.

Покладемо $\boldsymbol{x = \rho \cos\varphi}$ і застосуємо формулу (2.1). Оскільки $\boldsymbol{x^2 + y^2 = \rho^2}$, то

$$\boldsymbol{\iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy = \iint\limits_D \sqrt{1 - \rho^2}\, \rho\, d\rho\, d\varphi}.$$

Для рівняння кола: $\boldsymbol{0 \le \varphi \le 2\pi;}$ $\boldsymbol{0 \le \rho \le 1}$. Тоді подвійний інтеграл за формулою (2.1) буде мати вигляд:

$$\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,.$$

Для інтеграла $I = \int\limits_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho$ введемо заміну: $1-\rho^2 = t, \quad -2\rho\,d\rho = dt,$ $\rho\,d\rho = -\frac{dt}{2}, \quad 1 \le \rho \le 0$. Тоді

$$I = -\frac{1}{2}\int\limits_1^0 \sqrt{t}\,dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\,\Bigg|_1^0 = \frac{1}{3}\,.$$

Шуканий інтеграл дорівнює:

$$\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{3}d\varphi = \frac{1}{3}d\varphi\,\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{3}\cdot 2\pi = \frac{2\pi}{3}\,.$$

Приклад 2. Обчислити площу області D, обмежену лініями: $y = x^2$ і $x + y = 2$.

Розв'язання. Область являє собою фігуру, обмежену знизу параболою $y = x^2$, а зверху прямою $y = 2 - x$ (рис. 2.2).

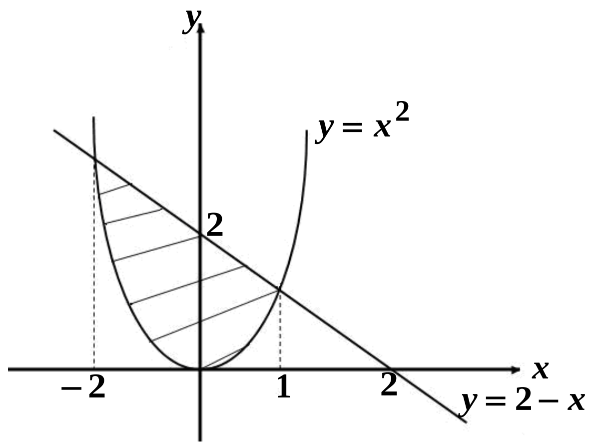

Рис. 2.2

Розв'язуючи сумісно рівняння параболи й прямої, знаходимо точки їх перетину:

$$\begin{cases} y = x^2; \\ y = 2 - x, \end{cases} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0; \quad x_1 = -2; \quad x_2 = 1.$$

Згідно (2.4), маємо:

$$S=\int_{-2}^{1}dx\int_{x^2}^{2-x}dy=\int_{-2}^{1}y\Big|_{x^2}^{2-x}dx=\int_{-2}^{1}\left(2-x-x^2\right)dx=\left(2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1}=$$

$$=2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\left(-4-2+\frac{8}{3}\right)=4{,}5\,(\text{кв.од.}).$$

Приклад 3. Обчислити площу фігури, обмежену лініями, застосовуючи полярну систему координат:

$\left(x^2+y^2\right)^2=2ax^3,\quad (a>0).$

Розв'язання. Покладемо $x=\rho\sin\varphi$ і запишемо рівняння даної кривої у вигляді: $\rho^4=2a\cdot\rho^3\cos^3\varphi$. Отже, $\rho=2a\cos^3\varphi$.

Побудуємо отриману криву на площині xOy (рис.2.3).

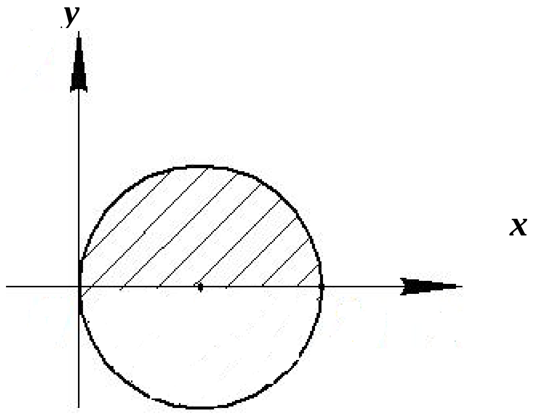

Рис. 2.3

Так як крива $\rho=2a\cos^3\varphi$ симетрична відносно вісі Ox і розташована в І та IV квадрантах, то площа області, яку утворює крива, можна знаходити як $2\cdot S_1$, де S_1 – площа відповідної області D_1 в межах $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$. Отже, маємо:

$$S=2\cdot\iint_D\rho\,d\rho\,d\varphi=2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2a\cos^3\varphi}\rho d\rho=2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{2a\cos^3\varphi}d\varphi=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\varphi\,d\varphi=$$

$$= 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right)^3 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 3\cos 2\varphi + 3\cos^2 2\varphi + \cos^3 2\varphi \right) d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(\varphi + \frac{3}{2} \sin 2\varphi \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2\varphi \, d\varphi + \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2 2\varphi \right) \cos 2\varphi \, d\varphi .$$

В останньому інтегралі введемо заміну: $\sin 2\varphi = t,\quad 2\cos 2\varphi \, d\varphi = dt$, $\cos 2\varphi \, d\varphi = \dfrac{dt}{2},\quad 0 \le t \le 0$. Отже, останній інтеграл дорівнює нулю. Тоді

$$S = \frac{\pi a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \cos 4\varphi \right) d\varphi = \frac{\pi a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} \left(\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{4} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi a^2}{4} + \frac{3\pi a^2}{8} = \frac{5\pi a^2}{8} \text{ (кв.од.)}.$$

Приклад 4. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = x^2 + y^2 + 1$; $x + y - 3 = 0;\quad x = 0;\quad y = 0;\quad z = 0$.

Розв'язання. Задане тіло обмежено зверху частиною параболоїда обертання $z = x^2 + y^2 + 1$, а знизу – частиною площини xOy, вміщеною між прямою $y = 3 - x$ та осями координат x і y (рис. 2.4).

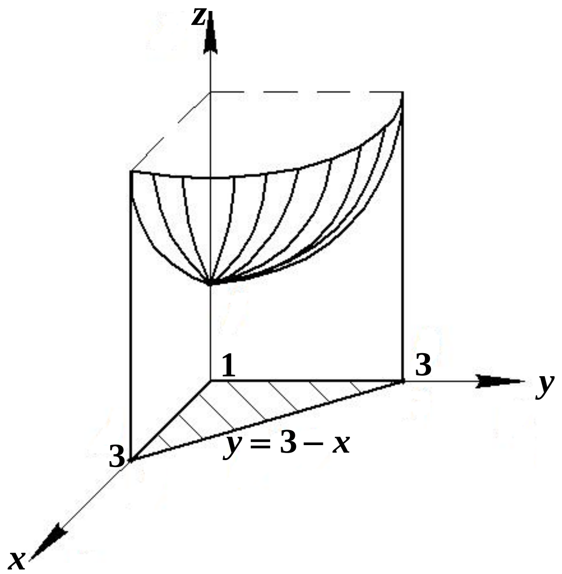

Рис. 2.4

За формулою (2.2) дістанемо:

$$V = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2 + 1\right) dx\, dy \ .$$

Розставляючи межі інтегрування в подвійному інтегралі, отримаємо:

$$V = \int_0^3 dx \int_0^{3-x} \left(x^2 + y^2 + 1 \right) dy = \int_0^3 \left(x^2 \cdot y + \frac{y^3}{3} + y \right) \Bigg|_0^{3-x} dx =$$

$$= \int_0^3 \left(x^2 \cdot (3-x) + \frac{\left(3-x^3\right)}{3} + 3 - x \right) dx = \int_0^3 \left(3x^2 - x^3 + 9 - 9x + 3x^2 - \frac{x^3}{3} + 3 - x \right) dx =$$

$$= \int_0^3 \left(6x^2 - \frac{4}{3}x^3 - 10x + 12 \right) dx = \left(6 \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{4}{3} \cdot \frac{x^4}{4} - 10 \cdot \frac{x^2}{2} + 12x \right) \Bigg|_0^3 =$$

$= 54 - 27 - 45 + 36 = 18$ (куб.од.).

Приклад 5. Обчислити площу бокової поверхні, обмеженої конусом $z^2 = x^2 + y^2$ та площиною $z = \sqrt{2}$.

Розв'язання. Тіло обертання, площу бокової поверхні якого треба знайти, зображено на рис. 2.5.

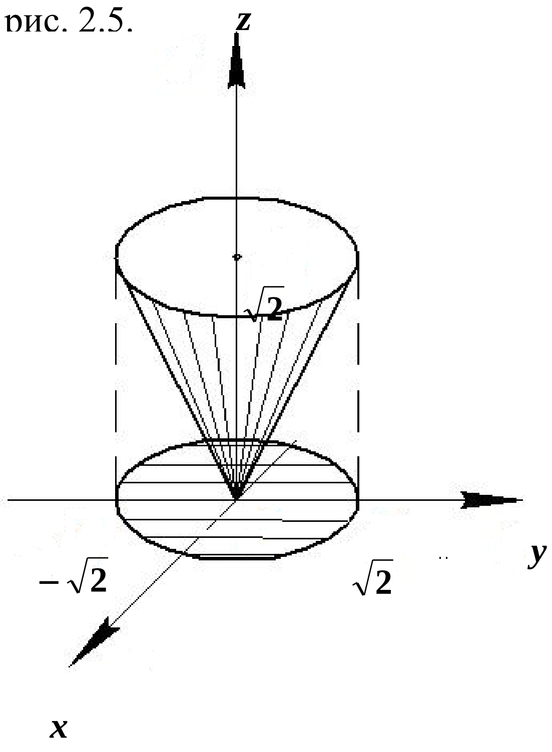

Рис. 2.5

Знайдемо частинні похідні функції $z=\sqrt{x^2+y^2}$:

$$f'_x=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad f'_y=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Підставивши f'_x і f'_y у формулу (2.4), одержуємо:

$$P=\iint\limits_D\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dx\,dy=\iint\limits_D\sqrt{\frac{2x^2+2y^2}{x^2+y^2}}dx\,dy=\sqrt{2}\iint\limits_D dx\,dy.$$

В останньому інтегралі перейдемо до полярної системи координат: $x=\rho\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\varphi$.

Тоді за формулою (2.1) маємо:

$$P=\sqrt{2}\iint\limits_D\rho\,d\rho=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\rho\,d\rho=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^{\sqrt{2}}d\varphi=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=2\sqrt{2}\pi \text{ (кв. од.).}$$

Завдання для самостійної роботи

I. Перейти до полярних координат і обчислити подвійний інтеграл:

а) $\iint\limits_D x\,dxdy,\qquad D:\begin{cases}x^2+y^2=1;\\ x^2+y^2=9;\\ y\ge 0.\end{cases}$

б) $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy,\qquad D:\ x^2+y^2\le 4a^2.$

II. Обчислити площу D, обмежену лініями:

а) $x\cdot y=4,\qquad x+y=5;$

б) $y=1+x\qquad y^2=1-x;$

в) $y=(x-1)^2\qquad x^2+y^2=1.$

III. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями $y=2x^2+z^2,\quad y=2$.

IV. Обчислити площу бокової поверхні, обмеженої верхньою половиною сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

3. Застосування подвійного інтеграла для деяких задач механіки

Статичним моментом матеріальної точки відносно будь-якої осі називається добуток маси цієї точки на відстань її від цієї осі. Для точки (x, y) з масою m статичні моменти M_x і M_y відносно осей Ox і Oy обчислюються відповідно за формулами :

$$M_x = y \cdot m; \qquad M_y = x \cdot m.$$

Статичним моментом системи матеріальних точок $(x_i; y_i)$ з масами m_i називається сума статичних моментів усіх точок. Отже,

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} y_i m_i; \qquad M_y = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i. \tag{3.1}$$

Центром мас системи матеріальних точок називають таку точку, в якій, якщо зосередити масу системи $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$, статичний момент відносно будь-якої осі буде дорівнювати відповідному статичному моменту усієї системи. Якщо центр мас знаходиться у точці $C(x_c, y_c)$, то

$$M_x = y_c \cdot m; \qquad M_y = x_c \cdot m,$$

звідки

$$x_c = \frac{M_y}{m}; \qquad y_c = \frac{M_x}{m}.$$

Розглянемо на площині xOy матеріальну пластинку, яка має форму замкненої області D, в кожній точці якої густина визначається функцією $\gamma = \gamma(x, y)$, де $\gamma -$неперервна функція в області D. Якщо пластинка однорідна, то будемо вважати $\gamma = const$.

Розіб'ємо область D довільним чином на n часткових областей D_i з площами ΔS_i. У кожній з таких областей довільно оберемо точки (ξ_i, η_i) (рис. 3.1). Тоді маса пластинки буде обчислюватися за формулою:

$$M = \sum_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i, \eta_i)\, \Delta S_i\,. \qquad (3.3)$$

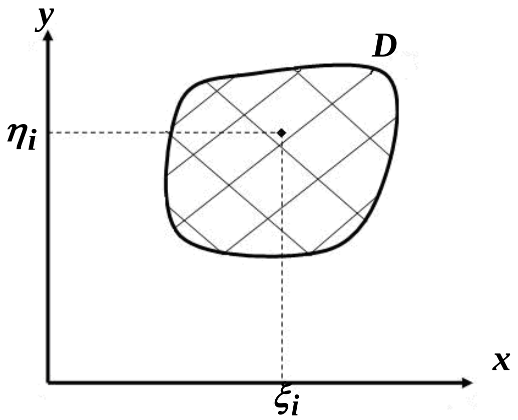

Рис. 3.1

Якщо перейти до границі за умови, що кожна з часткових областей стягується у точку, то отримаємо точний вираз для маси пластинки:

$$m = \iint_D \gamma(x, y)\, dS \qquad (3.3^*)$$

Для декартової системи координат елемент площі dS дорівнює $dS = dx\,dy$.

Згідно з формулами (3.1) і (3.3), одержимо формули для обчислення статичних моментів неоднорідної пластини:

$$M_x = \iint_D y \cdot \gamma(x, y)\, dx\, dy;$$
$$M_y = \iint_D x \cdot \gamma(x, y)\, dx\, dy. \qquad (3.4)$$

Координати центра мас пластинки обчислюється за формулами (3.2).

Момент інерції пластинки

Осьовим моментом інерції матеріальної точки відносно будь-якої осі називається добуток маси m цієї точки на квадрат її відстані від цієї осі. Для точки (x, y) з масою m осьові моменти інерції обчислюються за формулами:

$$I_x = y^2 \cdot m, \qquad I_y = x^2 \cdot m.$$

В декартовій системі координат формули для обчислення моментів інерції неоднорідної пластинки мають вигляд:

$$\begin{aligned} I_x &= \iint\limits_D y^2 \cdot \gamma(x, y)\,dx\,dy; \\ I_y &= \iint\limits_D x^2 \cdot \gamma(x, y)\,dx\,dy. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Досить часто в механіці розглядається момент інерції матеріальної точки відносно даної точки – полюса. Цей момент інерції I_0 називається ***полярним*** і обчислюється за формулою:

$$I_0 = \left(x^2 + y^2\right)m, \text{ тобто } I_0 = I_x + I_y. \tag{3.6}$$

Відцентровим моментом інерції матеріальної точки відносно двох осей називається добуток маси точки на її відстані від цих осей. Якщо осями є координатні осі, то відцентровий момент інерції точки (x, y) обчислюється за формулою:

$$I_{xy} = x \cdot y \cdot m. \tag{3.7}$$

Для неоднорідної пластинки формули (3.6) і (3.7) будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned} I_0 &= \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) \cdot \gamma(x, y)\,dx\,dy; \\ I_{xy} &= \iint\limits_D x \cdot y \cdot \gamma(x, y)\,dx\,dy. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Якщо вісь проходить через центр мас пластинки, то вона називається ***центральною***. Якщо відцентровий момент інерції дорівнює нулю, то відповідні вісі називаються ***головними вісями інерції***. Головні вісі, що проходять через центр мас, називаються ***головними центральними вісями інерції.***

Якщо пластинка являє собою криволінійний сектор, обмежений прямими $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ $(\varphi_1 < \varphi_2)$ й кривою $\rho = \rho(\varphi)$, то після переходу до полярної системи координат маємо:

$$m=\iint_D \gamma\cdot\rho\, d\rho\, d\varphi;\quad M_x=\iint_D \gamma\rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi;\quad M_y=\iint_D \gamma\rho^2\cos\varphi\, d\rho\, d\varphi;$$

$$I_x=\iint_D \lambda\rho^3\sin^2\varphi\, d\rho\, d\varphi;\quad I_y=\iint_D \gamma\rho^3\cos^2\varphi\, d\rho\, d\varphi; \tag{3.9}$$

$$I_0=\iint_D \gamma\rho^3 d\rho\, d\varphi;\qquad I_{xy}=\frac{1}{2}\iint_D \gamma\rho^3\sin 2\varphi\, d\rho\, d\varphi.$$

Якщо пластинка симетрична відносно деякої осі, то центр має пластинки лежить на цій осі.

Зразки розв'язування задач

Приклад 1. Знайти масу однорідної пластини, обмеженої лініями: $y=\cos x;\quad y=\sin x;\quad x=0$.

Розв'язання. Область D, яку займає пластина в площині xOy, зображена на рис. 3.2.

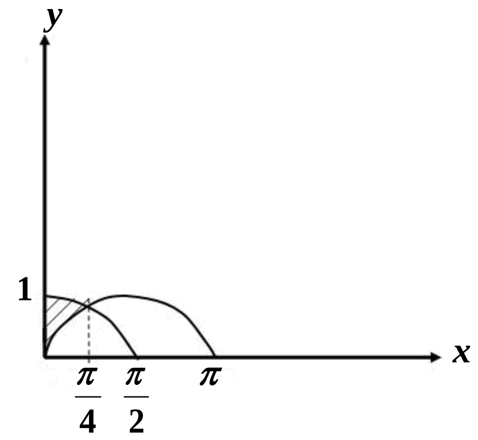

Рис. 3.2

Точка перетинання кривих $y=\cos x$ і $y=\sin x$ має абсцису $x=\dfrac{\pi}{4}$. За формулою (3.3*) для $\gamma=1$ маємо:

$$m=\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx\int_{\sin x}^{\cos x} dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}} y\Big|_{\sin x}^{\cos x} dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx=(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}-1\approx 0{,}4.$$

Приклад 2. Пластина обмежена параболою $y^2 = 2x$ та прямою, яка проходить через фокус параболи перпендикулярно до її осі. Знайти масу пластини, якщо в кожній її точці густина обернено пропорційна відстані точки від директриси параболи.

Розв'язання. За умовами задачі густину можна виразити таким чином:

$$\gamma = \frac{1}{x+\frac{1}{2}}.$$

Дана пластина симетрична відносно осі $0x$ (рис. 3.3), тому можна знайти масу половини пластини

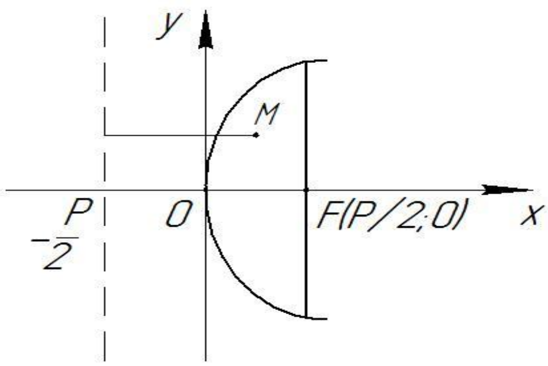

Рис. 3.3

За формулою (3.3*) маємо:

$$\frac{1}{2}m = \iint_D \frac{dx\,dy}{x+\frac{1}{2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{2x}} \frac{dy}{x+\frac{1}{2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{y}{x+\frac{1}{2}}\Bigg|_0^{\sqrt{2x}} dx = \sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x}}{x+\frac{1}{2}dx}. \qquad (3.10)$$

Для останнього інтеграла введемо заміну: $x = t^2, \quad dx = 2t\,dt, \quad 0 \le t \le \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Тоді співвідношення (3.10) можна записати таким чином:

$$\frac{1}{2}m = 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^2dt}{t^2+\frac{1}{2}} = 2\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dt - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dt}{t^2+\frac{1}{2}}\right) = 2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}arctg\sqrt{2}t\,\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

Тоді маса всієї пластини дорівнює $m = 2\sqrt{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$.

Приклад 3. Знайти координати центра мас однорідної пластини, обмеженої кривими $y^2 = x$, $x^2 = y$.

Розв'язання. Параболи перетинаються у точках $(0,0)$ і $(1,1)$ (рис. 3.4).

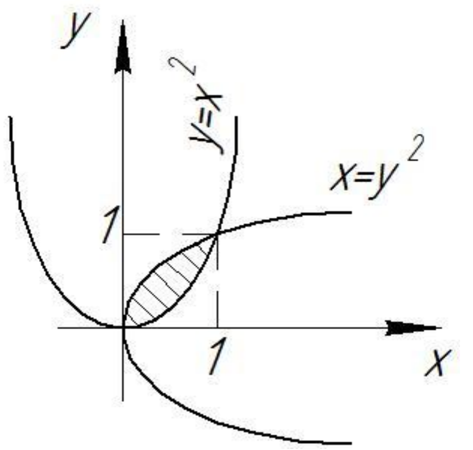

Рис. 3.4

Оскільки пластина однорідна, то $\gamma = 1$, і маса пластини знаходиться за формулою (3.3*):

$$m = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \int\limits_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Статичні моменти знаходяться за формулами (3.4):

$$M_x = \iint\limits_D y\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} ydy = \int\limits_0^1 \frac{y^2}{2}\Bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(x - x^4\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{20};$$

$$M_y=\iint_D x\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x dy=\int_0^1 x\cdot(y)\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx=\int_0^1\left(x^{\frac{3}{2}}-x^3\right)dx=\left(\frac{2}{5}\sqrt{x^5}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{3}{20}$$

.

Отже , за формулою (3.2), координати центра мас дорівнюють:

$$x_c=\frac{9}{20};\qquad y_c=\frac{9}{20}.$$

Приклад 4. Знайти моменти інерції відносно координатних осей, полярний і відцентровий моменти інерції однорідної пластини, обмеженої лініями $y=\frac{x^2}{2}$, $y=x$.

Розв'язання. Парабола і пряма перетинаються у точках з абсцисами $x=0$ і $x=2$ (рис. 3.5).

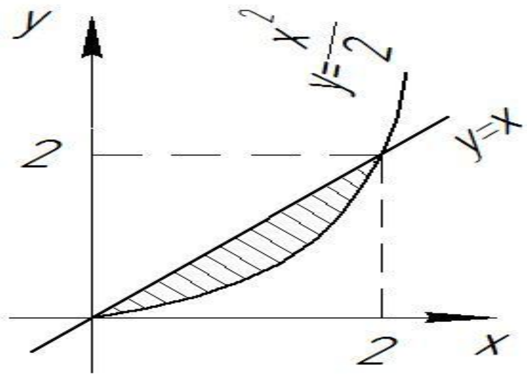

Рис. 3.5

Оскільки пластина однорідна, то будемо вважати $\gamma=1$. За формулами (3.5) маємо:

$$I_x=\iint_D y^2dx\,dy=\int_0^2 dx\int_{\frac{x^2}{2}}^{x} y^2dy=\int_0^2\frac{y^3}{3}\Big|_{\frac{x^2}{2}}^{x}dx=\frac{1}{3}\int_0^2\left(x^3-\frac{x^6}{8}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^7}{56}\right)\Bigg|_0^2=\frac{16}{3}\cdot\frac{14-8}{56}=\frac{4}{7};$$

$$I_y=\iint_D x^2dx\,dy=\int_0^2 dx\int_{\frac{x^2}{2}}^{x} x^2dy=\int_0^2 x^2\cdot(y)\Bigg|_{\frac{x^2}{2}}^{x}dx=\int_0^2\left(x^3-\frac{x^4}{2}\right)dx==\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_0^2=\frac{4}{5}.$$

Для обчислення полярного і відцентрового моментів інерції використовуємо формули (3.8). Отже

$$I_{xy}=\iint_D xydx\,dy=\int_0^2 dx\int_{\frac{x^2}{2}}^{x} x\cdot y\,dy=\int_0^2 x\cdot\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{\frac{x^2}{2}}^{x}dx=\frac{1}{2}\int_0^2\left(x^3-\frac{x^5}{4}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{24}\right)\Bigg|_0^2=\frac{2}{3};\ I_0=\frac{4}{7}+\frac{4}{5}=\frac{48}{35}.$$

Приклад 5. Дана однорідна пластина, обмежена лініями $x^2+y^2=1,\quad x\le 0,\ y\le 0$. Знайти координати центра мас пластини, її моменти інерції відносно координатних осей, полярний та відцентровий моменти інерції.

Розв'язання. Оскільки пластина симетрична відносно прямої $y=x$ (рис. 3.6), то її центр мас знаходиться на цій прямій, а звідки випливає, що $x_c=y_c,\quad M_x=M_y,\quad I_x=I_y$.

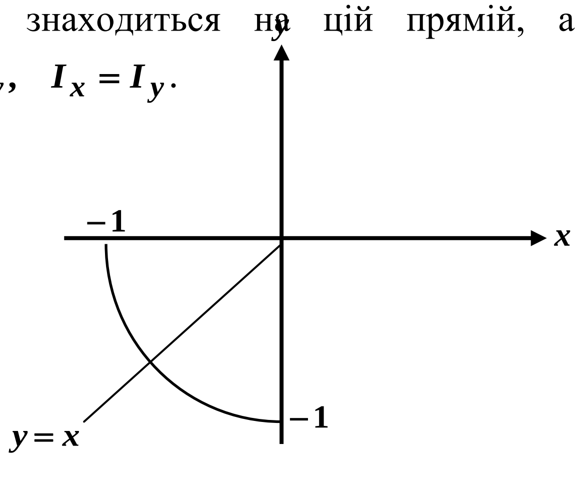

Рис. 3.6

Якщо пластина однорідна, то будемо вважати $\gamma = 1$, і маса пластини дорівнює її площі $m = \dfrac{\pi}{4}$.

Зважаючи на форму і розташування пластини, обчислення будемо здійснювати у полярній системі координат, використовуючи формули (3.9):

$$M_x = M_y = \iint\limits_D y dx dy = \int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2 \sin\varphi \, d\rho = \int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin\varphi \cdot \left. \left(\frac{\rho^3}{3} \right) \right|_0^1 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}(-\cos\varphi) \Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} = -\frac{1}{3}.$$

Тоді $x_c = y_c = -\dfrac{4}{3\pi}$.

Осьові моменти інерції пластини відносно x та y, згідно (3.9), дорівнюють:

$$I_x = I_y = \iint\limits_D x^2 dx\, dy = \int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^3 \sin^2\varphi \, d\rho = \int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2\varphi \cdot \left. \left(\frac{\rho^4}{4} \right) \right|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{8} \int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} (1 - \cos 2\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{8}\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}.$$

Полярний момент інерції пластини, згідно (3.6), дорівнює $I_0 = \dfrac{\pi}{8}$.

Відцентровий момент інерції пластини за формулами (3.9) дорівнює:

$$I_{xy} = \iint\limits_D xy\, dx\, dy = \frac{1}{2} \int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^3 \sin 2\varphi \, d\rho = \frac{1}{2} \int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin 2\varphi \cdot \left. \left(\frac{\rho^4}{4} \right) \right|_0^1 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 2\varphi \right) \Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{8}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти масу однорідної пластини, обмеженої лініями $y = \sin x$ і $y = \dfrac{2}{\pi}x$.
2. Знайти координати центра мас пластинки, обмеженої параболою $y = 2x - x^2$ та віссю Ox.
3. Обчислити момент інерції прямокутника зі сторонами 2 і 4 відносно точки перетину його діагоналей.
4. Знайти моменти інерції відносно вісі Oy однорідної пластини, обмеженої лініями $y = x^2, \quad x + y = 6$.
5. Обчислити відцентровий момент інерції однорідної пластини, обмеженої лініями $4x^2 + 9y^2 = 36, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$.
6. Знайти момент інерції однорідної еліптичної пластини з півосями a і b відносно осі Oy.

4. Обчислення криволінійних інтегралів першого та другого роду. Формула Гріна. Умови незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування

Нехай $L-$кусково-гладка просторова крива з початком у точці A і кінцем в точці B, на якій визначена і неперервна функція $F(M)$. Інтегральною сумою розбиття дуги AB на n елементарних частин довжини $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$ називається наступна функція $\alpha_n = \sum\limits_{k=1}^{n} F(N_k)\Delta S_k$, де $N_k -$довільна точка на елементарному відрізку $[M_{k-1}, M_k]$ розбиття.

Криволінійним інтегралом першого роду від функції $F(M)$ по дузі AB називається границя (якщо вона існує) інтегральної суми розбиття α_n при $max\, x|\Delta S_k| \to 0$ та $n \to \infty$, яка не залежить від способу розбиття дуги AB точками M_k на елементи і вибору точок N_k в частинних дугах довжини ΔS_k і позначається таким чином:

$$\int_{AB} F(M)\,dS = \lim_{\substack{max|\Delta S_k|\to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} F(N_k)\,\Delta S_k .$$

Нехай на кусково-гладкій просторовій кривій L задана векторна функція $\bar{a}(M)$, яка має проекції $P(M), Q(M), R(M)$ на осі вибраної декартової системи координат. Інтегральною сумою розбиття дуги AB на n елементарних частин $\Delta l_1, \Delta l_2, ..., \Delta l_n$ з проекціями $\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k$ називається функція:

$$\beta_n = \sum_{k=1}^{n} \left[P(N_k)\Delta x_k + Q(N_k)\Delta y_k + R(N_k)\Delta z_k\right],$$

де $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$; $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$; $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$; N_k – довільна точка на Δl_k.

К***риволінійним інтегралом другого роду*** від векторної функції $\bar{a}(P,Q,R)$ по дузі AB називається скінчена границя інтегральної суми β_n при $max|\Delta S_k| \to 0$ (якщо вона існує і не залежить від способу розбиття дуги AB на елементи і вибору точок N_k). Інтеграл має вигляд:

$$\int_{AB} \bar{a}\,d\bar{r} = \lim_{max|\Delta S_k|\to 0} \beta_n = \int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

де $\bar{r}$ – радіус вектор точки; $\bar{a}\,d\bar{r}$ – скалярний добуток.

Для криволінійних інтегралів першого і другого роду має місце залежність:

$$\int_{AB} \bar{a}(M)\cdot d\bar{r} = \int_{AB} a_\tau(M)\,dS,$$

де $a_\tau(M)$ – проекція вектора $\bar{a}(M)$ на вектор $\bar{\tau}$, який напрямлений по дотичній до дуги AB в точці M в бік від A до B.

Властивості криволінійних інтегралів

1. Криволінійні інтеграли першого й другого родів не залежать від вибору початкової точки на цьому контурі.
2. Криволінійний інтеграл першого роду не залежить від напряму обходу шляху інтегрування.

3. Інтеграл другого роду залежить від напряму обходу дуги AB, а саме
$\int\limits_{AB} \bar{a} \cdot d\bar{r} = -\int\limits_{BA} \bar{a}\, d\bar{r}$.

4. ***Теорема про середнє.*** Якщо функція $F(M)$ визначена й неперервна на гладкій дузі AB (включаючи її кінці), то на цій дузі знайдеться така точка M', для якої має місце наступна рівність:

$$\int\limits_{AB} F(M)ds = F(M')S_{AB}.$$

де S_{AB} – довжина дуги AB.

Тобто криволінійний інтеграл першого роду дорівнює добутку середнього значення підінтегральної функції на довжину шляху інтегрування.

Обчислення криволінійних інтегралів першого роду за плоскою областю

I. Крива $A\breve{B}$ задається рівнянням $y = y(x)$, а точки A і B задані своїми координатами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$:

$$\int\limits_{AB} F(x,y)ds = \int\limits_{x_1}^{x_2} F\Big(x, y(x)\Big)\sqrt{1+(y'_x)^2}\, dx. \tag{4.1}$$

II. Крива $A\breve{B}$ задається параметричним рівнянням $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, де $t_1 \le t \le t_2$.

$$\int\limits_{AB} F(x,y)ds = \int\limits_{t_1}^{t_2} F\Big(x(t), y(t)\Big) \cdot \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt. \tag{4.2}$$

III. Крива $A\breve{B}$ задається рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, де $\varphi_A \le \varphi \le \varphi_B$.

$$\int\limits_{AB} F(x,y)ds = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(\rho cos\varphi,\ \rho sin\varphi)\sqrt{\rho^2 + (\rho'_\varphi)^2}\, d\varphi. \tag{4.3}$$

Обчислення криволінійних інтегралів другого роду за плоскою областю

I. Крива $A\breve{B}$ задана рівнянням $y = y(x)$, а точки A і B задані кординатами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)ds + Q(x,y)dy = \int\limits_{x_1}^{x_2} \Big(P\big(x, y(x)\big) + Q\big(x, y(x)\big) \cdot y'_x\Big)dx. \qquad (4.4)$$

II. Крива $A\breve{B}$ задається параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$,

$t_A \le t \le t_B$.

$$\int\limits_{AB} P(x,y)ds + Q(x,y)dy = \int\limits_{t_A}^{t_B} \Big(P\big(x(t), y(t)\big)x'_t + Q\big(x(t)y(t)\big) \cdot y'_t \Big) dt. \qquad (4.5)$$

III. Крива $A\breve{B}$ задається рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\quad \varphi_A \le \varphi \le \varphi_B$.

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$\int\limits_{\varphi_A}^{\varphi_B} \Big(-P(\rho cos\varphi, \rho sin\varphi)sin\varphi + Q(\rho cos\varphi, \rho sin\varphi) \cdot cos\varphi \Big)\rho d\varphi. \qquad (4.6)$$

Формула Гріна встановлює зв'язок між подвійним інтегралом по плоскій області й криволінійним інтегралом по контуру цієї області. Формула Гріна має вигляд:

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int\limits_{\Gamma} Q(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy,$$

де Γ – контур області D; $P(x,y), Q(x,y)$ – функції неперервні в області D, для яких існують неперервні частинні похідні $\frac{\partial Q}{\partial x}$ і $\frac{\partial P}{\partial y}$.

Нехай функції $P(x,y), Q(x,y), P'_y(x,y), Q'_x(x,y)$ визначені і неперервні в однозв'язній обмеженій замкненій області D площини xOy. Тоді величина криволінійного інтеграла

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy$$

не залежить від шляху інтегрування, а лише від початкової й кінцевої точок інтегрування та від функцій P і Q, якщо буде виконуватися рівність:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Зразки розв'язування задач

Приклад 1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+9}}$, де $L-$відрізок прямої, яка сполучає точки $O(0,0)$ і $A(1,3)$.

Розв'язання.

Рівняння прямої, якій задовольняють задані точки, знаходиться за формулою:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$

де $(x_1,y_1),(x_2,y_2)-$ задані точки.

Пряма OA має вигляд: $\frac{x}{1}=\frac{y}{3}$, або $y=3x$. Звідси $y'=3,$ $dl=\sqrt{10}\,dx$.

За формулою (4.1) матимемо

$$\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+9}}=\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10x^2+9}}dx=\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2}}=ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{9}{10}}\right|\Bigg|_0^1=$$

$$=ln\left|1+\sqrt{\frac{19}{10}}\right|-ln\sqrt{\frac{9}{10}}=ln\frac{\sqrt{10}+\sqrt{19}}{3}.$$

Приклад 2. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_L (x-y)dl$, де $L-$коло $x^2+y^2=2x$.

Розв'язання.

Перейдемо до полярних координат: $x=\rho\cos\varphi,$ $y=\rho\sin\varphi$. Рівняння кривої L набуває вигляду $\rho=2\cos\varphi$, де $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$. Для обчислення інтеграла застосуємо формулу (4.3), оскільки $\rho'=-2\sin\varphi$. Отже

$$dl=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi=\sqrt{4\cos^2\varphi+4\sin^2\varphi}\,d\varphi=2d\varphi;$$

$$\int_L (x-y)dl = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi(\cos\varphi-\sin\varphi)\cdot 2\cdot d\varphi = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi + 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d(\cos\varphi) =$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\varphi)\, d\varphi + 4\cdot \frac{\cos^2\varphi}{2}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\cdot\left(\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi .$$

Приклад 3. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int_L xdy - ydx$, де L – дуга циклоїди $x = a(t-\sin t),\quad y = a(1-\cos t)$ між точками $A(2\pi, 0)$ та $B(0,0)$.

Розв'язання.

Знайдемо похідні функцій x та y за параметром t:

$$x'_t = a(1-\cos t);\quad y'_t = a\sin t .$$

За формулою (4.5) матимемо

$$\int_L xdy - ydx = \int_{2\pi}^{0}\left(a^2(t-\sin t)\cdot \sin t - a^2(1-\cos t)^2\right)dt =$$

$$= a^2\int_{2\pi}^{0}\left(t\cdot \sin t - \sin^2 t - 1 + 2\cos t - \cos^2 t\right)dt =$$

$$= a^2\left(\int_{2\pi}^{0} t\cdot \sin t\, dt - 2\int_{2\pi}^{0}(1-\cos t)\right)dt = \left|\begin{array}{l} t = u;\quad du = dt; \\ \sin t dt = dv; \\ v = \int \sin t dt = \\ = -\cos t + c \end{array}\right| = a^2\left((-t\cos t)\Big|_{2\pi}^{0} +\right.$$

$$\left. + \int_{2\pi}^{0} \cos t dt - 2(t - \sin t)\Big|_{2\pi}^{0}\right) = a^2\left(2\pi + \sin t\Big|_{2\pi}^{0} + 2\cdot 2\pi\right) = 6a^2\pi .$$

Приклад 4. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L ydx + x^2 dy$, де L – відрізок прямої від точки $A(1,1)$ до точки $B(2,3)$.

Розв'язання.

Запишемо рівняння прямої, що проходить через точки A і B:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}; \qquad 2x-2=y-1; \qquad y=2x-1.$$

Тоді $dy=2dx$. Скористаємось формулою (4.4):

$$\int\limits_L ydx+x^2dy=\int\limits_1^2\left(2x-1+2x^2\right)dx=\left(2\cdot\frac{x^2}{2}-x+2\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2=4-2+\frac{16}{3}-1+1-\frac{2}{3}=$$

$$=2+\frac{14}{3}=\frac{20}{3}.$$

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\int\limits_L (x+y)dx-xdy$ вздовж ламаної OBA, де $O(0{,}0)$, $A(4{,}2)$ і $B(2{,}0)$.

Розв'язання.

Вздовж ламаної OBA на ділянці OB маємо $y=0$ і $dy=0$, на ділянці BA: $y=x-2,\quad dy=dx$.

Тому, згідно з формулою (4.4), маємо:

$$\int\limits_L (x+y)dx-xdy=\int\limits_{OB}(x+y)dx-xdy+\int\limits_{BA}(x+y)dx-xdy=$$

$$=\int\limits_0^2 xdx+\int\limits_2^4(x+x-2-x)dx=\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2+\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Bigg|_2^4=2+2=4.$$

Приклад 6. Обчислити інтеграл $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}$, де $L-$частина гіперболічної спіралі $\rho\varphi=1$ від $\varphi=\sqrt{3}$ до $\varphi=2\sqrt{2}$.

Розв'язання.

Розглянемо полярну систему координат: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Тоді

$$\rho=\frac{1}{\varphi};\quad \rho'=-\frac{1}{\varphi^2};\quad dl=\sqrt{\frac{1}{\varphi^2}+\frac{1}{\varphi^4}}\,d\varphi=\frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi^2}d\varphi.$$

За формулою (4.3) маємо

$$\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}} = \int\limits_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi^2\cdot\dfrac{1}{\varphi^3}}\,d\varphi = \int\limits_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \varphi\cdot\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi =$$

$$= \left|\begin{array}{l} 1+\varphi^2=t; \quad 2\varphi\,d\varphi=dt; \\ \varphi\,d\varphi=\dfrac{dt}{2}; \\ при\,\varphi=\sqrt{3}\to t=4; \\ при\,\varphi=2\sqrt{2}\to t=9; \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int\limits_4^9 \sqrt{t}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\,\Big|_4^9 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{9^3}-\sqrt{4^3}\right) = \frac{19}{3}.$$

Приклад 7. За допомогою формули Гріна обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (xy+2x-3y)dx+(xy+2x+3y)dy$, де $L-$коло $x^2+y^2=4x$.

Розв'язання.

За умовами задачі $P(x,y)=x\cdot y+2x-3y$;

$Q(x,y)=xy+2x+3y$. Отже $\dfrac{\partial P}{\partial y}=x+3;\quad \dfrac{\partial Q}{\partial x}=y+2$.

За формулою Гріна

$$\int\limits_L (xy+2x-3y)dx+(xy+2x+3y)dy = \iint\limits_D \left(y+2-(x-3)\right)dxdy =$$

$$= \iint\limits_D (y-x+5)dxdy.$$

Область $D-$коло з центром в точці $(2{,}0)$ і радіусом $R=2$. Рівняння кола має вигляд:

$$(x-2)^2+y^2=4.$$

Перейдемо до полярних координат з полюсом у центрі $O(2;0)$. Рівняння, яке зв'язує (x,y) і полярні координати (ρ,φ) з полюсом у точці $O(2;0)$, має вигляд: $x-2=\rho\cos\varphi;\qquad y=\rho\sin\varphi,\quad 0\le\varphi\le 2\pi,\quad 0\le\rho\le 2$.

Таким чином, $\iint\limits_D (y-x+5)dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^2 (\rho\sin\varphi-\rho\cos\varphi-2+5)\rho d\rho =$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (\rho\, sin\varphi - \rho\, cos\varphi + 3)\rho d\rho = \int_0^{2\pi} \left(sin\varphi \cdot \frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^2 - cos\varphi \cdot \frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^2 + 3\cdot\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^2 \right) d\varphi =$$

$$= \left(-\frac{8}{3}cos\varphi - \frac{8}{3}sin\varphi + 6\varphi \right)\Bigg|_0^{2\pi} = -\frac{8}{3} + 12\pi + \frac{8}{3} = 12\pi .$$

Приклад 8. Чи залежить криволінійний інтеграл від шляху інтегрування $\int\limits_L x^3y^4dx - x^4y^3dy$?

Розв'язання.

За умовами задачі: $P(x,y) = x^3y^4;\quad Q(x,y) = -x^4y^3$. Знайдемо часткові похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$: $\frac{\partial P}{\partial y} = 4x^3y^3;\qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -4x^3y^3;\quad \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Отже, інтеграл залежить від шляху інтегрування.

Завдання для самостійної роботи

I. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $\int\limits_L \frac{dl}{x-y}$, де $L-$відрізок прямої між точками $A(0;-2)$ і $B(4;0)$;

б) $\int\limits_L xydl$, де $L-$прямокутник з вершинами $O(0,0),\ A(4,0),\ B(4,2),\ C(0,2)$;

в) $\int\limits_L (x^2+y^2)^n dl$, де $L-$коло $x^2+y^2=a^2$;

г) $\int\limits_L y^2dl,$ де $L-$арка циклоїди $x = a(t - sint),\quad y = a(1-cos\,t),\ 0 \le t \le 2\pi$;

д) $\int\limits_L y^2dx + x^2dy$, де $L-$верхня половина еліпса $x = a\,cos\,t,\ y = b\,sint$ по ходу стрілки годинника;

е) $\int\limits_L \frac{y}{x}dx - xdy$, де $L-$лінія $y = ln\,x$ від точки $A(1,0)$ до точки $B(e,1)$.

II. За допомогою формули Гріна обчислити криволінійний інтеграл

$\int\limits_L (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$, де $L-$коло $x^2+y^2=ax$.

III. Вказати криволінійний інтеграл по координатах, який не залежить від шляху інтегрування

а) $\int\limits_L xydx+3x\sin ydy$;

б) $\int\limits_L ydx-xdy$;

в) $\int\limits_L x^2dx+y^3dy$.

5. Звичайні диференціальні рівняння. Диференціальне рівняння першого порядку.

Диференціальним рівнянням називають рівняння, яке зв'язує незалежну змінну x, шукану функцію y та її похідні (або диференціали):

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right)=0, \text{ або}$$

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0.$$

Порядок диференціального рівняння визначається найвищим порядком похідної (диференціала) цього рівняння.

Розв'язком диференціального рівняння називається функція $y=\varphi(x)$, яка при підстановці у це рівняння перетворює його на тотожність.

Диференціальне рівняння першого порядку має вигляд

$$F(x, y, y')=0, \tag{5.1}$$

де $x-$ незалежна змінна, $y-$ шукана функція, $y'-$похідна шуканої функції.

Якщо рівняння можна розв'язати відносно похідної, то його записують у вигляді

$$y' = f(x, y).$$

Розв'язком диференціального рівняння (5.1) на деякому інтервалі (a, b) називається диференційована на цьому інтервалі функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці в рівняння (5.1) перетворює його на тотожність на (a, b).

Функція $y = \varphi(x, C)$, де C – довільна стала, називається загальним розв'язком рівняння (5.1) в області G, якщо вона задовольняє дві умови:

1) функція $y = \varphi(x, C)$ є розв'язком рівняння при будь-якому значенні сталої C з деякої множини;

2) для довільної точки $(x_0, y_0) \in G$ можна знайти таке значення $C = C_0$, що функція $y = \varphi(x, C_0)$ задовольняє початкову умову:

$$\varphi(x_0, C_0) = y_0.$$

Частинним розв'язком рівняння (5.1) називається функція $y = \varphi(x, C_0)$, яка утворюється із загального розв'язку $y = \varphi(x, C)$ при певному значенні $C = C_0$.

Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння знайдено в неявному вигляді, тобто $\Phi(x, y, C) = 0$, то такий розв'язок називають загальним інтегралом диференціального рівняння (5.1).

Види диференціальних рівнянь першого порядку:

1. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.
2. Однорідні диференціальні рівняння.
3. Лінійні диференціальні рівняння.
4. Диференціальні рівняння Бернуллі.

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними мають вигляд:

$$y' = f(x) g(y), \tag{5.2}$$

де $f(x)$ і $g(y)$ – задані і неперервні на деякому інтервалі функції. Вважаючи, що $y' = \dfrac{dy}{dx}$, дістанемо

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \quad \text{або} \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx, \; (\, g(y) \neq 0 \,). \tag{5.3}$$

Рівняння (5.3) називається рівнянням з відокремленими змінними.

Інтегруючи обидві частини останнього рівняння отримаємо загальний інтеграл диференціального рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C\,.$$

Диференціальне рівняння (5.2) є окремим випадком рівняння виду:

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \tag{5.4}$$

Для відокремлення змінних у цьому рівнянні досить обидві його частини поділити на добуток $N_1(x)\cdot M_2(x),\quad N_1(y)\neq 0;\quad M_2(x)\neq 0$.

Функція $f(x, y)$ називається однорідною функцією $n-$го виміру відносно змінних x та y, якщо для довільного $\lambda \neq 0$ виконується тотожність:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

Диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y) \tag{5.5}$$

називається **однорідним**, якщо функція $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового виміру, тобто, $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$.

Підстановкою $y = ux,\quad y' = u'x + u,\quad \lambda = \dfrac{1}{x}$, де $u(x)-$невідома функція, рівняння (5.5) зводиться до рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x}\,.$$

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{5.6}$$

де $P(x)$ та $Q(x)-$задані і неперервні на деякому проміжку функції.

Розв'язок рівняння (5.6) знаходимо у вигляді

$$y = uv\,, \tag{5.7}$$

де $u(x)$ та $v(x)-$ невідомі функції, причому одна з них функція довільна (але не дорівнює тотожно нулю). Після підстановки (5.7) в рівняння (5.6) рівняння (5.6) перетворюється на систему 2-х рівнянь з відокремлюваними змінними.

Рівняння Бернуллі має вигляд

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}, \tag{5.8}$$

де $\alpha \in R, \quad \alpha \neq 0, \alpha \neq 1$.

При $\alpha = 0$ рівняння (5.8) буде лінійним, при $\alpha = 1$ – рівнянням з відокремлюваними змінними. Метод розв'язання рівняння Бернуллі такий саме як і для лінійного рівняння, тобто розв'язок його знаходимо у вигляді $y = uv$.

Зразки розв'язування задач

Приклад 1. Розв'язати рівняння:

$$x(y^2+9)dx + y\,dy = 0.$$

Розв'язання.

Це рівняння є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними. Для того, щоб відокремити змінні, поділимо обидві частини рівняння на (y^2+9), а потім проінтегруємо його:

$$xdx + \frac{ydy}{y^2+9} = 0,$$

$$\int xdx + \int \frac{ydy}{y^2+9} = 0,$$

$$\int xdx = -\int \frac{ydy}{y^2+9}.$$

Для того, щоб обчислити інтеграл, що знаходиться у правій частині, використаємо заміну змінної в невизначеному інтегралі:

$$t = y^2 + 9,$$

$$dt = 2ydy,$$

$$ydy = \frac{dt}{2}.$$

Маємо:

$\int xdx = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}$, або $\frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2}ln|t| + \frac{1}{2}lnC$.

Повертаючись до старої змінної, дістанемо:

$x^2 = -ln\left| y^2 + 9 \right| + lnC$, $x^2 = ln\dfrac{C}{y^2 + 9}$ − загальний розв'язок рівняння.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' = \frac{y}{x^2 - 4}.$$

Розв'язання.

Вважаючи, що $y' = \dfrac{dy}{dx}$, маємо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2 - 4}.$$

Помножимо обидві частини на dx, а потім відокремимо змінні. Для цього рівняння розділимо на y:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x^2 - 4}.$$

Після інтегрування отримаємо:

$$ln|y| = \frac{1}{2 \cdot 2} ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + ln|C|,$$

$$ln|y| = ln\left|\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{1/4} \cdot C\right|,$$

$$y = C \cdot \sqrt[4]{\frac{x-2}{x+2}}$$ – загальний розв'язок.

Приклад 3. Розв'язати задачу Коші:

$$\left(x^2 y - x^2\right) 2y = \left(xy^2 + y^2\right) dx \qquad y(1) = 1.$$

Розв'язання.

Для того, щоб відокремити змінні, треба спочатку винести за дужки співмножники в кожній з частин рівняння, тобто x^2 та y^2 з лівої і правої частин рівняння відповідно, а потім розділити рівняння на $\left(x^2 \cdot y^2\right)$ і проінтегрувати

$$x^2(y-1)\,dy = y^2(x+1)\,dx\,,$$

$$\frac{x^2(y-1)\,dy}{x^2y^2} = \frac{y^2(x+1)\,dx}{x^2y^2}\,,$$

$$\int\frac{y-1}{y^2}dy = \int\frac{x+1}{x^2}dx\,,$$

$$\int\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}\right)dy = \int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx\,,$$

$$ln|y| + \frac{1}{y} = ln|x| - \frac{1}{x} + C\,,$$

$$ln\left|\frac{y}{x}\right| + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = C -$$ загальний розв'язок.

Підставимо початкові умови в загальний розв'язок та отримаємо частинний розв'язок рівняння

$$ln\left|\frac{1}{1}\right| + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = C \Rightarrow\ C = 2\,,$$

$$ln\left|\frac{y}{x}\right| + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 2\ -$$ частинний розв'язок.

Приклад 4. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$e^x \cdot tg\,y\,dx + \left(1+e^x\right)sec^2\,y\,dy, \qquad y(0) = \frac{\pi}{4}\,.$$

Розв'язання.

Для відокремлювання змінних у цьому рівнянні розділимо його на $tg\,y\cdot\left(1+e^x\right)$. Маємо:

$$\frac{e^x dx}{1+e^x} = -\frac{tg\,y\,dy}{cos^2\,y}\,.$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння та для обчислення інтегралів зробимо відповідні заміни змінних:

$$\int\frac{e^x dx}{1+e^x} = -\int\frac{tg\,y}{cos^2\,y}dy\,,$$

$$\left| \begin{array}{ll} t = 1 + e^{x} & z = tg\, y \\ dt = e^{x} dx & dz = \dfrac{dy}{\cos^2 y} \end{array} \right|,$$

$$\int \frac{dt}{t} = -\int \frac{dz}{z},$$

$$\ln|t| = -\ln|z| + \ln|C|, \text{ або } \ln|t| = \ln\left|\frac{C}{z}\right|,$$

$$t = \frac{C}{z} \quad \text{або} \quad 1 + e^{x} = \frac{C}{tg\, y}.$$

$(1 + e^{x}) \cdot tg\, y = C$ – загальний розв'язок.

Використаємо початкові умови і отримаємо частинний розв'язок рівняння:

$$\begin{cases} (1 + e^{0}) \cdot tg\dfrac{\pi}{4} = C, & \Rightarrow C = 2, \\ (1 + e^{x}) \cdot tgy = 2, & \Rightarrow 1 + e^{x} = 2ctgy, \quad \Rightarrow y = arcctg\, {}^{1}\!/_{2}(1 + e^{x}). \end{cases}$$

Приклад 5. Записати рівняння кривої, яка проходить через точку $(1;2)$, кутовий коефіцієнт дотичної до якої у кожній точці дорівнює $\dfrac{y^2 - 1}{2x}$.

Розв'язання.

Кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = f(x)$ у кожній точці є y'. Маємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y' = \frac{y^2 - 1}{2x}.$$

Вважаємо, що $y' = \dfrac{dy}{dx}$, та відокремлюючи змінні отримаємо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 1}{2x},$$

$$\frac{dy}{y^2 - 1} = \frac{1}{2}\frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dy}{y^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{2} ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \frac{1}{2}\ ln\ |x| + \frac{1}{2} ln|C|, \quad \Rightarrow \quad ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = ln|C\,x|, \quad \Rightarrow$$

$\frac{y-1}{y+1} = C\,x -$ загальний розв’язок рівняння.

Підставимо координати точки, через яку проходить шукана крива, в отриманий розв’язок:

$\frac{2-1}{2+1} = C \cdot 1, \quad \Rightarrow \quad C = 1/3$.

Тоді $\frac{y-1}{y+1} - \frac{1}{3}x = 0$ є рівнянням цієї кривої.

Приклад 6. Розв’язати рівняння:

$$xy' - y = x \cdot 2^{-\frac{y}{x}}.$$

Розв’язання.

Доведемо, що це рівняння є однорідним. Нехай $\begin{matrix} x \to xt \\ y \to yt \end{matrix}$, тоді

$$xy \cdot y' - yt = xt \cdot 2^{-\frac{yt}{xt}},$$

$$y' = \frac{yt + xt \cdot 2^{-\frac{y}{x}}}{xt} \Rightarrow \quad y' = \frac{y}{x} + 2^{-y/x}$$, тобто рівняння однорідне.

Для того, щоб перетворити його на рівняння з відокремлюваними змінними, зробимо підстановку: $y = u \cdot x; \quad y' = u'x + u; \quad u = \frac{y}{x}$. Отримаємо:

$$x(u'x + u) - ux = x \cdot 2^{-\frac{ux}{u}}, \text{ або } \ u'x + u - u = 2^{-u},$$

$$u'x = 2^{-u}, \quad \Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = 2^{-u}.$$

Відокремлюючи змінні, маємо

$$2^u du = \frac{dx}{x}.$$

Після інтегрування отримаємо загальний інтеграл даного диференціального рівняння:

$$\frac{2^{u}}{ln2}=ln\left|\,x\,\right|+ln\left|\,C\,\right|,$$

$$2^{y/x}=ln2\cdot ln\left|Cx\right|.$$

Приклад 7. Знайти загальний розв’язок:

$$\left(y^2-2xy\right)dx+x^2dy=0.$$

Розв’язання.

Маємо:

$$P=y^2-2xy;\quad Q=x^2.$$

Функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ є однорідними функціями другого виміру:

$$P(tx,ty)=(ty)^2-2(tx)(ty)=t^2y^2-2t^2y^2-2t^2xy=t^2\left(y^2-2xy\right)=t^2P(x,y);$$

$$Q(tx,ty)=(tx)^2=t^2x^2=t^2Q(x,y),$$

Тобто початкове рівняння є однорідним.

Зробимо підстановку $y=ux;\quad y'=u'x+u;\quad u=\frac{y}{x}$, та зведемо це рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y^2-2xy+x^2y'=0,$$

$$(ux)^2-2x\,ux+x^2\left(u'x+u\right)=0,$$

$$u^2x^2-2x^2u+x^2\left(u'x+u\right)=0,\quad\Rightarrow\quad u^2-2u+u'x+u=0, \text{ або}$$

$$u'x=u-u^2,\quad\Rightarrow\quad \frac{du}{dx}x=u-u^2.$$

Відокремимо змінні в останньому рівнянні:

$$\int\frac{du}{u-u^2}=\int\frac{dx}{x};$$

$$u-u^2=-\left(u^2+u\right)=-\left(u^2-2\cdot\frac{1}{2}u+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)=\frac{1}{4}-\left(u-\frac{1}{2}\right)^2;$$

$$\int\frac{du}{\frac{1}{4}-(u-1/2)^2}=\int\frac{dx}{x};$$

$$\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}} ln\left|\frac{\frac{1}{2}+u-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-u+\frac{1}{2}}\right| = ln|x| + ln|C|, \text{ або}$$

$ln\left|\frac{u}{1-u}\right| = ln|Cx|, \quad \Rightarrow \quad \frac{u}{1-u} = Cx, \quad \Rightarrow \quad \frac{y/x}{1-y/x} = Cx, \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x-y} = Cx -$ загальний інтеграл даного рівняння;

$$-\frac{x-y-x}{x-y} = Cx,$$

$$-\frac{x-y}{x-y} + \frac{x}{x-y} = Cx,$$

$$\frac{x}{x-y} = Cx+1, \Rightarrow \quad x = (Cx+1)(x-y), \Rightarrow \quad x = Cx^2 + x - y(Cx+1),$$

$Cx^2 = y(Cx+1), \quad \Rightarrow \quad y = \frac{Cx^2}{Cx+1}$ – загальний розв'язок рівняння.

Приклад 8. Розв'язати задачу Коші

$$y^2 + x^2y' = x\,y\,y', \qquad y(1) = 1.$$

Розв'язання.

Це рівняння є однорідним (перевірити самостійно), тому після підстановки $y = ux; \quad y' = u'x + u; \quad u = \frac{y}{x}$ отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$(ux)^2 + x^2(u'x+u) = x\,ux(u'x+u),$$

$$u^2x^2 + x^2(u'x+u) = x^2u(u'x+u), \quad \text{або} \quad u^2 + u'x + u = u\,u'x + u^2,$$

$$u'x - u\,u'x = -u,$$

$$u'x(1-u) = -u,$$

$$u'x(u-1) = u, \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx}\cdot x(u-1) = u.$$

Відокремимо змінні і проінтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int\frac{u-1}{u}du = \int\frac{dx}{x}, \quad \Rightarrow \quad \int\left(1-\frac{1}{u}\right)du = \int\frac{dx}{x}, \quad \Rightarrow \quad u - ln|u| = ln|x| + ln|C|,$$

або

$$u = ln\left|Cux\right|, \qquad \frac{y}{x} = ln\left|C\frac{y}{x}\cdot x\right|,$$

$y = x\,ln\left|Cy\right|$ – загальний інтеграл.

Використаємо початкові умови:

$$1 = 1\,ln\left|C\right|, \Rightarrow \quad lnC = 1, \quad \Rightarrow \quad C = e.$$

Тоді $y = x\,ln\left|e\cdot y\right|$, або $y = x\left(lne + ln\,y\right)$, або $y = x + x\,ln\,y$ – розв'язок задачі Коші.

Приклад 9. Знайти частинний розв'язок рівняння:

$$x y' = y\left(1 + ln\frac{y}{x}\right), \qquad y = \frac{1}{\sqrt{e}} \text{ при } x = 1.$$

Розв'язання.

Маємо:

$$y' = \frac{y}{x}\left(1 + ln\frac{y}{x}\right).$$

Це однорідне рівняння. Зробимо підстановку $y = ux, \quad y' = u'x + u, \quad u = {}^{y}\!/_{x}$ та аналогічно попереднім прикладам розв'яжемо отримане рівняння:

$$u'x + u = u\left(1 + ln\,u\right),$$

$$u'x = u + u\,ln\,u - u, \quad \Rightarrow u'x = u\,ln\,u, \quad \Rightarrow \frac{du}{dx}\cdot x = u\,ln\,u,$$

$$\frac{du}{u\,ln\,u} = \frac{dx}{x}, \quad \Rightarrow \quad \int\frac{du}{u\,ln\,u} = \int\frac{dx}{x}.$$

Для обчислення інтеграла, що знаходиться у лівій частині, використаємо заміну змінної $t = ln\,u; \quad dt = \dfrac{du}{u}$. Маємо:

$$\int\frac{dt}{t} = \int\frac{dx}{x}, \quad \Rightarrow \quad ln\left|t\right| = ln\left|x\right| + ln\left|C\right|, \quad \Rightarrow ln\left|t\right| = ln\left|Cx\right|, \quad \Rightarrow$$

$$t = Cx, \quad \Rightarrow \quad ln\left|u\right| = Cx.$$

Тоді, загальний інтеграл рівняння має вигляд $ln\left|\dfrac{y}{x}\right| = Cx$. Знайдемо C:

$$ln\left|\frac{1/\sqrt{e}}{1}\right| = C\cdot 1, \quad \Rightarrow \; C = ln\frac{1}{\sqrt{e}}, \quad \Rightarrow \; C = ln\,e^{-1/2}, \quad \Rightarrow C = -1/2\,.$$

$ln\left|\dfrac{y}{x}\right| = -1/2x, \quad \Rightarrow \quad y = xe^{-\frac{1}{2}x}$ – частинний розв'язок рівняння.

Приклад 10. Розв'язати рівняння:

$$y' - y\,ctg\,x = \frac{sin\,x}{x}\,.$$

Розв'язання.

Це рівняння є лінійним, і його розв'язок будемо шукати у вигляді $y = uv$. Тоді $y' = u'v + uv'$.

Маємо:

$$u'v + uv' - uv\,ctgx = \frac{sin\,x}{x}, \qquad u\left(v' - vctgx\right) + u'v = \frac{sin\,x}{x}\,.$$

Будемо вважати, що вираз в дужках у лівій частині рівняння дорівнює нулю. Тоді отримаємо систему диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними:

$$\begin{cases} v' - vctgx = 0, \\ u'v = \dfrac{sin\,x}{x}. \end{cases}$$

Знайдемо, спочатку, розв'язок першого рівняння. Для цього відокремимо змінні та проінтегруємо рівняння:

$$\frac{dv}{dx} = vctgx, \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = ctg\,x\,dx, \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dv}{v} = \int ctg\,x\,dx, \quad \Rightarrow$$

$$ln|v| = ln|sin\,x|, \quad \Rightarrow \quad v = sin\,x\,.$$

Підставимо знайдений розв'язок в друге рівняння системи:

$$u'\cdot sin\,x = \frac{sin\,x}{x}, \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{1}{x}, \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}, \; \Rightarrow$$

$$du = \frac{dx}{x}, \quad \Rightarrow \quad u = ln|x| + C\,.$$

Тоді, шуканий розв'язок лінійного рівняння матиме вигляд:

$$y = \left(ln\,x + C\right)\cdot sin\,x\,.$$

Приклад 11. Розв'язати рівняння:

$$y' - 2xy = xe^{-x^2}.$$

Розв'язання.

Розв'язок цього лінійного рівняння знаходимо у вигляді $y = uv$. Тоді $y' = u'v + uv'$. Після підстановки цих виразів в лінійне рівняння і розв'язування його аналогічно попередньому дістанемо:

$$u'v + uv' - 2xuv = xe^{-x^2},$$

$$u(v' - 2xv) + u'v = xe^{-x^2}.$$

$$\begin{matrix} I. \\ II. \end{matrix}\begin{cases} v' - 2xv = 0, \\ u'v = xe^{-x^2}. \end{cases}$$

I. $v' = 2xv, \;\Rightarrow\; \dfrac{dv}{dx} = 2xv, \;\Rightarrow\; \dfrac{dv}{v} = 2xdx, \;\Rightarrow\; \int \dfrac{dv}{v} = \int 2xdx, \;\Rightarrow$

$ln|v| = \dfrac{2x^2}{2}, \;\Rightarrow\; v = e^{x^2}.$

II. $u'e^{x^2} = xe^{-x^2}, \;\Rightarrow\; \dfrac{du}{dx}e^{x^2} = xe^{-x^2}, \;\Rightarrow\; du = \dfrac{xe^{-x^2}}{e^{x^2}}dx, \;\Rightarrow$

$$\int du = \int xe^{-2x^2}dx.$$

Для останнього інтеграла використаємо підстановку:

$$\left| \begin{array}{l} -2x^2 = t \\ dt = -4xdx \\ xdx = -\dfrac{dt}{4} \end{array} \right|.$$

Дістанемо: $\int du = -\dfrac{1}{4}\int e^t dt, \;\Rightarrow\; u = -\dfrac{1}{4}e^t + C, \;\Rightarrow\; u = -\dfrac{1}{4}e^{-2x^2} + C.$

Тоді загальний розв'язок лінійного рівняння буде мати вигляд:

$$y = \left(-\frac{1}{4}e^{-2x^2} + C\right) \cdot e^{x^2}.$$

Приклад 12. Розв'язати рівняння:

$$xy' - y = x^2 \cos x.$$

Розв'язання.

Розділимо рівняння на x, та розв'яжемо його аналогічно попередньому:
$y'-\dfrac{y}{x}=x\cos x$; $y=u\cdot v;$ $y'=u'v+uv'$;

$$u'v+uv'-\frac{uv}{x}=x\cos x, \qquad u\left(v'-\frac{v}{x}\right)+u'v=x\cos x,$$

$$\begin{array}{l} I. \\ II. \end{array}\begin{cases} v'-\dfrac{v}{x}=0, \\ u'v=x\cos x. \end{cases}$$

I. $v'=\dfrac{v}{x}, \Rightarrow \dfrac{dv}{dx}=\dfrac{v}{x}, \Rightarrow \dfrac{dv}{v}=\dfrac{dx}{x}, \Rightarrow \int\dfrac{dv}{v}=\int\dfrac{dx}{x}, \Rightarrow ln|v|=ln|x|, \Rightarrow v=x$.

II. $u'\cdot x=x\cos x, \Rightarrow u'=\cos x, \Rightarrow \dfrac{du}{dx}=\cos x, \Rightarrow du=\cos x dx, \Rightarrow \int du=\int\cos x dx,$

$\Rightarrow u=\sin x+C$.

Отже, $y=(\sin x+C)\cdot x$ – загальний розв'язок.

Приклад 13. Розв'язати задачу Коші:

$$y'\sqrt{1-x^2}+y=\arcsin x; \qquad y(0)=0.$$

Розв'язання.

Розділимо обидві частини рівняння на $\sqrt{1-x^2}$. Дістанемо:

$$y'+\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Тоді $y=uv;$ $y'=u'v+uv'$,

$$u'v+uv'+\frac{uv}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$u\left(v'+\frac{v}{\sqrt{1-x^2}}\right)+u'v=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\begin{array}{l} I. \\ II. \end{array}\begin{cases} v'+\dfrac{v}{\sqrt{1-x^2}}=0, \\ u'v=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}. \end{cases}$$

I. $v' = -\dfrac{v}{\sqrt{1-x^2}}$, $\Rightarrow$ $\dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{v}{\sqrt{1-x^2}}$, $\Rightarrow \dfrac{dv}{v} = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\Rightarrow \int \dfrac{dv}{v} = -\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

$\Rightarrow$ $\ln v = -\arcsin x,$ $\Rightarrow$ $v = e^{-\arcsin x}$;

II. $u' e^{-\arcsin x} = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},$ $\Rightarrow$ $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{e^{\arcsin x} \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},$ $\Rightarrow$

$$\int du = \int \frac{\arcsin x \cdot e^{\arcsin x} dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Зробимо заміну змінної в інтегралі, що знаходиться праворуч.

$$\left| \begin{array}{l} t = \arcsin x \\ dt = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right| \Rightarrow \int du = \int t e^t dt.$$

Для останнього інтеграла використаємо метод інтегрування частинами:

$$\left| \begin{array}{ll} u_1 = t, & du_1 = dt, \\ dv_1 = e^t dt, & v_1 = \int e^t dt = e^t, \\ \int u_1 dv_1 = u_1 v_1 - \int v_1 du_1. & \end{array} \right| \Rightarrow \int du = te^t - \int e^t dt, \Rightarrow u = te^t - e^t + C.$$

Отже, повертаючись до старої змінної, отримаємо:

$$u = \arcsin x\, e^{\arcsin x} - e^{\arcsin x} + C.$$

Тоді, загальний розв’язок лінійного рівняння має вигляд:

$y = \left(\arcsin x\, e^{\arcsin x} - e^{\arcsin x} + C\right) e^{-\arcsin x}$, або

$y = \arcsin x - 1 + C\, e^{-\arcsin x}$.

Підставимо в цей вираз початкові умови: $0 = \arcsin 0 - 1 + C\, e^{-\arcsin 0}$, $\Rightarrow$ $C = 1$.

Отже $y = \arcsin x - 1 + e^{-\arcsin x}$ – частинний розв’язок лінійного рівняння.

Приклад 14. Розв’язати рівняння:

$$xy' + y = xy^2 \ln x.$$

Розв’язання.

Маємо рівняння Бернуллі, класичний вигляд якого буде:

$$y' + \frac{y}{x} = y^2 \ln x .$$

Метод розв'язання – аналогічний до метода розв'язання лінійних рівнянь. Тобто, вважаючи, що $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, дістанемо:

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = (uv)^2 \ln x , \; u\left(v' + \frac{v}{x}\right) + u'v = u^2 v^2 \ln x .$$

Нехай, $v' + \frac{v}{x} = 0$, тоді $u'v = u^2 v^2 \ln x$ або $u' = u^2 v \ln x$. Таким чином, одержимо систему рівнянь з відокремлюваними змінними:

$$\begin{array}{l} I. \\ II. \end{array}\begin{cases} v' + \dfrac{v}{x} = 0, \\ u' = u^2 v \ln x . \end{cases}$$

I. $v' = -\frac{v}{x}, \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}, \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \Rightarrow$

$$\ln|v| = -\ln|x|, \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = \ln\left|x^{-1}\right|, \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{x} .$$

II. $u' = u^2 \cdot \frac{1}{x} \ln x, \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = u^2 \frac{\ln x}{x}, \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{u^2} = \int \frac{\ln x dx}{x} .$

Для останнього інтеграла використаємо заміну змінної $\left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \dfrac{dx}{x} \end{array} \right|$.

Дістанемо: $\int u^{-2} du = \int t dt, \quad \Rightarrow$

$$\frac{u^{-1}}{-1} = \frac{t^2}{2} + C, \quad \Rightarrow -\frac{1}{u} = \frac{\ln^2 x}{2} + C, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{u} = -\frac{\ln^2 x + 2C}{2}, \quad \Rightarrow \quad u = -\frac{2}{\ln^2 x + 2C} .$$

Загальний розв'язок рівняння Бернуллі матиме вигляд:

$y = -\dfrac{2}{\ln^2 x + 2C} \cdot \dfrac{1}{x}$, або $y = -\dfrac{2}{x \ln^2 x + 2Cx}$.

Приклад 15. Розв'язати рівняння:

$$y' = \frac{x}{y} e^{2x} + y .$$

Розв'язання.

Перепишемо це рівняння Бернуллі у класичному вигляді:

$$y' - y = \frac{xe^{2x}}{y}.$$

Загальний розв'язок рівняння Бернуллі буде

$$y = uv; \quad y' = u'v + uv'.$$

Після підстановки цих виразів в початкове рівняння маємо:

$$u'v + uv' - uv = \frac{xe^{2x}}{uv},$$

$$u(v' - v) + u'v = \frac{xe^{2x}}{uv}.$$

$$\begin{array}{l} I. \\ II. \end{array} \begin{cases} v' - v = 0, \\ u'v = \dfrac{xe^{2x}}{uv}. \end{cases}$$

I. $v' = v, \Rightarrow \dfrac{dv}{dx} = v, \Rightarrow \dfrac{dv}{v} = dx, \Rightarrow \int \dfrac{dv}{v} = \int dx, \Rightarrow ln|v| = x, \Rightarrow v = e^{x}$.

II. $u' \cdot e^{x} = \dfrac{x\ e^{2x}}{u \cdot e^{x}}, \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = \dfrac{x}{u}, \Rightarrow udu = xdx, \Rightarrow \int udu = \int xdx, \Rightarrow$

$$\frac{u^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{C^2}{2}, \Rightarrow u^2 = x^2 + C, \Rightarrow u = \pm\sqrt{x^2 + C}.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння: $y = \left(\pm\sqrt{x^2 + C}\right) \cdot e^{x}$.

Приклад 16. Розв'язати задачу Коші:

$$y' + \frac{3x^2 y}{x^3 + 1} = \left(1 + x^3\right) y^2 \sin x, \qquad y(0) = 1.$$

Розв'язання.

Загальний розв'язок рівняння Бернуллі будемо шукати у вигляді: $y = uv$. Тоді

$$y' = u'v + uv', \quad u'v + uv' + \frac{3x^2 uv}{x^3 + 1} = \left(1 + x^3\right)(uv)^2 \sin x,$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{3x^2 v}{x^3 + 1}\right) = \left(1 + x^3\right) u^2 v^2 \sin x.$$

$$\begin{cases} \text{I.} \; v' + \dfrac{3x^2 v}{x^3+1} = 0, \\ \text{II.} \; u'v = \left(1+x^3\right) u^2 v^2 \sin x; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \text{I.} \; v' = -\dfrac{3x^2 v}{x^3+1}, \\ \text{II.} \; u' = \left(1+x^3\right) u^2 v \sin x. \end{cases}$$

Тоді:

I. $\dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{3x^2 v}{x^3+1}, \quad \Rightarrow \int \dfrac{dv}{v} = -\int \dfrac{3x^2 dx}{x^3+1}, \quad \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \textit{Заміна змінної для} \\ \textit{останнього інтеграла} \\ t = x^3+1; \; dt = 3x^2 dx \end{array} \right|.$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dt}{t}, \quad \Rightarrow \ln|v| = -\ln|t|, \quad \Rightarrow \ln|v| = \ln\left|t^{-1}\right|, \quad \Rightarrow v = \frac{1}{t}, \quad \Rightarrow v = \frac{1}{x^3+1}.$$

II. $u' = \left(1+x^3\right) \cdot u^2 \dfrac{1}{x^3+1} \cdot \sin x, \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = u^2 \sin x, \quad \Rightarrow \int \dfrac{du}{u^2} = \int \sin x dx, \quad \Rightarrow$

$$\int u^{-2} du = \int \sin x dx, \quad \Rightarrow -\frac{1}{u} = -\cos x - C, \quad \Rightarrow \frac{1}{u} = \cos x + C, \quad \Rightarrow u = \frac{1}{\cos x + C}.$$

Отже загальний розв'язок рівняння Бернуллі має вигляд:

$$y = \frac{1}{\cos x + C} \cdot \frac{1}{x^3+1}; \qquad y = \frac{1}{(\cos x + C)\left(x^3+1\right)}.$$

Використовуючи початкові умови знайдемо сталу C:

$$1 = \frac{1}{(\cos 0 + C)\left(0^3+1\right)} \quad \Rightarrow \quad C = 1.$$

Маємо частинний розв'язок рівняння Бернуллі:

$$y = \frac{1}{\left(\cos x + 1\right)\left(x^3+1\right)}.$$

Приклад 17. Розв'язати задачу Коші:

$$y' - y \operatorname{tg} x = -\frac{2}{3} y^4 \sin x, \qquad y(0) = 1.$$

Розв'язання.

Аналогічно попередньому прикладу загальний розв'язок задачі шукаємо у вигляді $y = uv; \quad y' = u'v + uv'$. Маємо:

$$u'v + uv' - uvtgx = -\frac{2}{3}(uv)^4 \sin x,$$

$$u(v' - vtgx) + u'v = -\frac{2}{3}u^4 v^4 \sin x.$$

$$\begin{matrix} I. \\ II. \end{matrix}\begin{cases} v' - vtgx = 0, \\ u'v = -\dfrac{2}{3}u^4 v^4 \sin x; \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} I. \\ II. \end{matrix}\begin{cases} v' = vtgx, \\ u' = -\dfrac{2}{3}u^4 v^3 \sin x. \end{cases}$$

I. $\dfrac{dv}{dx} = vtgx, \quad \Rightarrow \dfrac{dv}{v} = tgxdx, \quad \Rightarrow \int \dfrac{dv}{v} = \int tgxdx, \quad \Rightarrow \ln|v| = -\ln|\cos x|, \quad \Rightarrow$

$$\ln|v| = \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right|, \quad \Rightarrow v = \frac{1}{\cos x}.$$

II. $\dfrac{du}{dx} = -\dfrac{2}{3}u^4 \dfrac{1}{(\cos x)^3} \cdot \sin x, \quad \Rightarrow \dfrac{du}{u^4} = -\dfrac{2}{3}\dfrac{\sin xdx}{\cos^3 x}, \quad \Rightarrow \int u^{-4}du = -\dfrac{2}{3}\int \dfrac{\sin xdx}{\cos^3 x},$

$$\left| \begin{array}{l} \textit{Для останнього інтеграла} \\ \textit{використаємо заміну змінної} \\ \cos x = t, \ \Rightarrow dt = -\sin xdx, \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$\frac{u^{-3}}{-3} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^3}, \quad \Rightarrow \quad \frac{u^{-3}}{-3} = \frac{2}{3}\frac{t^{-2}}{-2} - \frac{C}{3}, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{u^3} = \frac{1}{t^2} + C, \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u^3} = \frac{1}{\cos^2 x} + C, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{u^3} = \frac{1 + C\cos^2 x}{\cos^2 x}, \quad \Rightarrow \quad u^3 = \frac{\cos^2 x}{1 + C\cos^2 x}, \quad \Rightarrow$$

$$u = \sqrt[3]{\frac{\cos^2 x}{1 + C\cos^2 x}}.$$

Тоді, загальний розв’язок даного рівняння має вигляд:

$$y = \sqrt[3]{\frac{\cos^2 x}{1 + C\cos^2 x}} \cdot \frac{1}{\cos x}, \quad \text{або} \quad y = \frac{1}{\sqrt[3]{\left(1 + C\cos^2 x\right) \cos x}}.$$

Для визначення частинного розв’язку знаходимо C, підставляючи початкові умови в загальний розв’язок:

$$1 = \frac{1}{\sqrt[3]{\left(1 + C\cos^2 0\right) \cos 0}}, \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{1}{\sqrt[3]{1 + C}}, \quad \Rightarrow 1 + C = 1, \quad \Rightarrow C = 0.$$

Тому, частинний розв’язок має вигляд:

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{\cos x}}.$$

Завдання для самостійної роботи

I. З'ясувати чи будуть функції $y = f(x)$ розв'язком відповідного рівняння:

а) $y = xe^{-3x}$, $\quad y' - \frac{y}{x} = 2xe^{-3x}$;

б) $y = \frac{1-x}{x}$, $\quad y' = y^2 + x$;

в) $y = e^{tg\frac{x}{2}}$, $\quad y' \cdot \sin x = y \ln y$.

II. Знайти загальні інтеграли рівнянь:

1) $y^2 dx + x dy = 0$;

2) $xy' - y \ln y = 0$;

3) $y' = \frac{x-y}{x-2y}$;

4) $x\, y' \sin\frac{y}{x} + x = y \sin\frac{y}{x}$;

5) $y' - y = e^{x}\left(3x^2 - 1\right)$;

6) $xy' - y = x^2 \frac{\sin x}{\cos^3 x}$;

7) $3y' + 2xy = 2xe^{-2x^2} y^{-2}$;

8) $y' - ytgx + y^2 \cos x = 0$.

III. Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь :

1) $x(y+1)dy + y\left(2x^2+1\right)dx = 0$, $\quad y(1) = 1$;

2) $y' = 2^{x-y}$, $\quad y(-3) = -5$;

3) $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} + 4$, $\quad y(1) = 2$;

4) $xy' - y = xtg(y/x)$, $\quad y(1) = \frac{\pi}{2}$;

5) $y' - \frac{y}{x} = 2x^2 + 1$, $\quad y(0) = 3$;

6) $y' - \frac{y}{x^{\ln x}} = x \ln x$, $\quad y(e) = \frac{e^2}{2}$;

7) $y' + y = e^{x/2}\sqrt{y}$, $\quad y(0) = \frac{9}{4}$;

8) $2xy' - 3y = -\left(3 + 5x^2\right)y^3, \qquad y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

IV. Записати рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$, кутовий коефіцієнт дотичної до якої дорівнює $f(x, y)$.

1) $M_0(2;5), \qquad f(x, y) = \frac{y}{x}$;

2) $M_0(1;1), \qquad f(x, y) = x^2 \cdot y^2$;

3) $M_0(2;-1), \qquad f(x, y) = \frac{1 + x}{1 + y}$.

6. Диференціальні рівняння вищих порядків. Диференціальні рівняння, що припускають зниження порядку

Диференціальним рівнянням n-го порядку називається рівняння вигляду $F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)} = 0\right)$. Розв'язком такого рівняння називається будь-яка диференційована n разів функція $y = \varphi(x)$, яка перетворює дане рівняння на тотожність, тобто

$$F\left(x, \varphi(x), \ \varphi'(x), \ \varphi''(x), ..., \varphi^{(n)}(x)\right) \equiv 0.$$

Задача Коші для цього рівняння полягає у тому, щоб знайти розв'язок рівняння, який задовольняє умовам: $y = y_0$, $y' = y_0'$, $y'' = y_0''$, ..., $y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ при $x = x_0$, де $x_0, y_0, y_0', y_0'', ..., y_0^{(n-1)}$ - числа, які називаються початковими умовами.

Функція $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ називається *загальним розв'язком* даного диференціального рівняння n-го порядку, якщо при відповідному виборі довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$ ця функція є розв'язком будь-якої задачі Коші, що поставлена для цього рівняння. Будь-який розв'язок, який отриманий із загального розв'язку при конкретних значеннях сталих $C_1, C_2, ..., C_n$, називається *частинним розв'язком* цього рівняння.

1) Рівняння вигляду $y^{(n)} = f(x)$.

Розв'язок цього рівняння отримується n- кратним інтегруванням, тобто:

$$y^{(n)} = f(x),$$

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1 = f_1(x) + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int (f_1(x) + C_1)dx = f_2(x) + C_1 x + C_2,$$

....

$$y = f_n(x) + \frac{C_1}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!} x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n, \text{ де}$$

$$f_n(x) = \underbrace{\int\int\int\ldots\int}_{n \quad разів} f(x)dx^n.$$

2) **Диференціальне рівняння** $F(x, y', y') = 0$, що явно не містить шукану функцію y, за допомогою підстановки $y' = P(x)$; $y'' = P'(x)$ зводять до відповідного рівняння першого порядку $F(x, P(x), P'(x)) = 0$. Розв'язок цього рівняння знаходять, виходячи з його типу, а потім, для отримання загального розв'язку початкового рівняння, $y' = P$.

3) **Диференціальне рівняння вигляду** $F(y, y', y'') = 0$, що явно не містить незалежну зміну x, підстановкою $y' = P(y)$; $y'' = P'_y \cdot y'_x = P'P$ зводять до диференціального рівняння першого порядку $F(y, P, P') = 0$.

Зразки розв'язування задач

Приклад 1. Розв'язати рівняння:

$$y''' = \frac{1}{x^3} - sin4x + 3.$$

Розв'язання.

Права частина рівняння не містить невідомої функції y та її похідної y', тому для отримання розв'язку тричі послідовно інтегруємо обидві його частини:

$$y'' = \int\left(\frac{1}{x^3} - sin4x + 3\right)dx = \frac{x^{-2}}{-2} + \frac{1}{4}cos4x + 3x + C_1,$$

$$y' = \int\left(\frac{x^{-2}}{-2} + \frac{1}{4}\cos 4x + 3x + C_1\right)dx = \frac{x^{-1}}{2} + \frac{1}{16}\sin 4x + \frac{3x^2}{2} + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int\left(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{16}\sin 4x + \frac{3x^2}{2} + C_1 x + C_2\right)dx = -\frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{64}\cos 4x +$$

$$+\frac{3x^3}{2\cdot 3} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Отже, загальний розв'язок даного рівняння:

$$y = -\frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{64}\cos 4x + \frac{x^3}{2} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y'' = x\sin x.$$

Розв'язання.

Дане рівняння того же типу, що і попереднє, тому його розв'язок знаходимо аналогічно, тобто:

$$y' = \int x\sin x\,dx.$$

За методом інтегрування частинами, маємо

$$\left|\begin{array}{ll} u = x, & du = dx, \\ dv = \sin x dx, & v = \int \sin x dx = -\cos x. \end{array}\right|,$$

$$y' = x(-\cos x) - \int -\cos x dx = -x\cos x + \sin x + C_1,$$

$$y = \int\left(-x\cos x + \sin x + C_1\right)dx = -\int x\cos x dx - \cos x + C_1 x + C_2,$$

$$\int x\cos x dx = \left|\begin{array}{ll} u = x, & du = dx, \\ dv = \sin x dx, & v = \int \sin x dx = -\cos x. \end{array}\right| =$$

$$= x\cdot\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x.$$

Тоді загальний розв’язок рівняння має вигляд:

$$y=-(x\,sin\,x+cos\,x)-cos\,x+C_1x+C_2,$$

або $$y=-x\,sin\,x-2cos\,x+C_1x+C_2.$$

Приклад 3. Розв’язати задачу Коші:

$$y''=cos^2\,2{,}5x, \qquad y'(0)=2; \quad y(0)=-\frac{1}{50}.$$

Розв’язання.

$$y'=\int cos^2\,2{,}5x dx=\int\frac{1+cos\,x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{5}sin\,x\right)+C_1,$$

$$y=\int\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{5}sin5x\right)+C_1\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{25}cos5x\right)+C_1x+C_2.$$

Отже, загальний розв’язок рівняння:

$$y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{50}cos5x+C_1x+C_2.$$

Для того, щоб отримати частинний розв’язок, тобто, розв’язати задачу Коші, треба знайти C_1 та C_2 ,використовуючи початкові умови:

$$2=\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{5}sin0\right)+C_1, \quad \Rightarrow \quad C_1=2,$$

$$-\frac{1}{50}=\frac{1}{4}\cdot 0^2-\frac{1}{50}cos0+C_1\cdot 0+C_2, \quad \Rightarrow \quad C_2=0.$$

Таким чином, $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{50}cos5x+2x-$ частинний розв’язок рівняння.

Приклад 4. Знайти частинний розв’язок рівняння:

$$y''=2\,sin\,x\,cos^2\,x-sin^3\,x, \qquad y(0)=2; \quad y'(0)=-1.$$

Розв’язання.

Знайдемо загальний розв'язок інтегруванням:

$$y' = \int \left(2\sin x\cos^2 x - \sin^3 x\right)dx = \int \left(2\cos^2 x\sin x - \sin^2 x \cdot \sin x\right)dx =$$

$$= \int \left(2\cos^2 x - \sin^2 x\right)\sin x dx = \int \left(2\cos^2 x - 1 + \cos^2 x\right)\sin x dx =$$

$$\int \left(3\cos^2 x - 1\right)\sin x dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t, \\ dt = -\sin x dx, \\ \sin x dx = -dt. \end{array} \right| = -\int \left(3t^2 - 1\right)dt = -\frac{3t^3}{3} + t + C_1 =$$

$$= -\cos^3 x + \cos x + C_1.$$

$$y = \int \left(-\cos^3 x + \cos x + C_1\right)dx = \int \left(-\cos^2 x + 1\right)\cos x dx + C_1 \int dx =$$

$$= \int \sin^2 x \cos x dx + C_1 x = \left| \begin{array}{l} \sin x = t, \\ dt = \cos x dx. \end{array} \right| = \int t^2 dt + C_1 x = \frac{t^3}{3} + C_1 x + C_2 =$$

$$= \frac{\sin^3 x}{3} + C_1 x + C_2.$$

Знайдемо C_1 та C_2. Підставимо початкові умови у вирази з y' та y.

$$-1 = -\cos^3 0 + \cos 0 + C_1, \quad \Rightarrow \quad C_1 = -1; \; 2 = \frac{\sin^3 0}{3} + C_1 \cdot 0 + C_2, \quad \Rightarrow \quad C_2 = 2.$$

Тоді, частинний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y = \frac{\sin^3 x}{3} - x + 2.$$

Приклад 5. Розв'язати рівняння:

$$y'' + 2xy'^2 = 0.$$

Розв'язання.

Дане рівняння не містить явно функції y, тому зводимо його до рівняння першого порядку підстановкою $y' = P(x)$, тоді $y'' = P'(x)$. Маємо:

$$P' + 2xP^2 = 0,$$

$$\frac{dP}{dx} = -2xP^2, \quad \Rightarrow \frac{dP}{P^2} = -2xdx, \quad \Rightarrow \int \frac{dP}{P^2} = -\int 2xdx, \quad \Rightarrow -\frac{1}{P} = -\frac{2x^2}{2} - C_1$$

$$\frac{1}{P} = x^2 + C_1, \quad \Rightarrow P = \frac{1}{x^2 + C_1}.$$

Отже, $y' = \dfrac{1}{x^2 + C_1}$. Інтегруючи це рівняння, дістанемо

$$y = \frac{1}{\sqrt{C_1}} arctg \frac{x}{\sqrt{C_1}} + C_2.$$

Приклад 6. Розв'язати рівняння:

$$xy'' + y' = ln\, x.$$

Розв'язання.

Аналогічно попередньому прикладу введемо підстановку $y' = P(x)$, $y'' = P'(x)$. Отримаємо рівняння першого порядку:

$$xP' + P = ln\, x, \quad \Rightarrow P' + \frac{P}{x} = \frac{ln\, x}{x},$$

яке є лінійним рівнянням. Його розв'язок будемо шукати у вигляді $P = uv$, а $P = u'v + uv'$:

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{ln\, x}{x}, \qquad u\left(v' + \frac{v}{x}\right) + u'v = \frac{ln\, x}{x},$$

$$\begin{matrix} I \\ \\ II \end{matrix} \begin{cases} v' + \dfrac{v}{x} = 0, \\ u'v = \dfrac{ln\, x}{x}. \end{cases}$$

I. $v' = -\dfrac{v}{x}, \quad \Rightarrow \dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{v}{x}, \quad \Rightarrow \dfrac{dv}{v} = -\dfrac{dx}{x}, \quad \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \Rightarrow$

$$ln|v| = -ln|x|, \quad \Rightarrow \; ln v = ln\frac{1}{x}, \quad \Rightarrow v = \frac{1}{x}.$$

II. $$u' \cdot \frac{1}{x} = \frac{ln x}{x}, \quad \Rightarrow \; u' = ln x, \quad \Rightarrow \int du = \int ln x dx \left| \begin{array}{ll} \multicolumn{2}{l}{\textit{За методом інтегрування}} \\ \multicolumn{2}{l}{\textit{частинами маємо}} \\ u_1 = ln x, & du_1 = \dfrac{dx}{x}, \\ dv_1 = dx, & v_1 = x, \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$u = ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{dx}{x}, \quad \Rightarrow \; u = ln x \cdot x - \int dx, \quad \Rightarrow \; u = x\, ln x - x + C_1.$$

Маємо $P = (x\, ln x - x + C_1) \cdot \dfrac{1}{x}$, або $P = ln x - 1 + \dfrac{C_1}{x}$.

Тоді $y' = P = ln x - 1 + \dfrac{C_1}{x}$. Проінтегруємо це рівняння:

$$y = \int \left(ln x - 1 + \frac{C_1}{x} \right) dx = \int ln x dx + \int \left(-1 + \frac{C_1}{x} \right) dx.$$

Із попереднього $\int ln x dx = x\, ln x - x$.

Маємо $y = x\, ln x - x - x + C_1\, ln(x) + C_2$, або

$y = x\, ln x - 2x + C_1\, ln(x) + C_2$ – загальний розв'язок.

Приклад 7. Розв'язати рівняння:

$$xy'' = y'\, ln\frac{y'}{x}.$$

Розв'язання.

Рівняння явно не залежить від функції y, тому підстановкою $y' = P(x); \quad y'' = P'(x)$ зводимо його до диференціального рівняння першого порядку:

$$x\, P' = P\, ln\frac{P}{x},$$

яке є однорідним. Використовуємо заміну $P = ux, \quad P' = u'x + u, \quad u = \dfrac{P}{x}$ та отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$x\,(u'x + u) = u\, x\, ln\frac{ux}{x}, \text{ або}$$

$$u'x+u=u\ln u, \quad \Rightarrow \quad u'x=u\ln u-u, \quad \Rightarrow \frac{du}{dx}=u(\ln u-1), \quad \Rightarrow \int\frac{du}{u(\ln u-1)}=\int\frac{dx}{x}.$$

До інтеграла, що стоїть у лівій частині останнього рівняння застосуємо заміну $t=\ln u-1, \quad \Rightarrow \quad dt=\frac{du}{u}$. Дістанемо:

$$\int\frac{dt}{t}=\int\frac{dx}{x}, \quad \Rightarrow \ln|t|=\ln|x|+\ln|C_1|, \quad \Rightarrow \ln|t|=\ln|C_1x|, \quad \Rightarrow \quad t=C_1x, \quad \Rightarrow$$

$$\ln u-1=C_1x, \quad \Rightarrow \ln u=C_1x+1, \quad \Rightarrow u=e^{C_1x+1}, \quad \Rightarrow \frac{P}{x}=e^{C_1x+1}, \quad \Rightarrow P=xe^{C_1x+1}.$$

Маємо диференціальне рівняння першого порядку, яке розв'язуємо простим інтегруванням:

$$y=\int xe^{C_1+1}\cdot dx.$$

$$y=\int xe^{C_1x+1}dx \quad \left|\begin{array}{ll} \textit{використовуємо метод інтегрування частинами} & \\ u=x, & du=dx, \\ dv=e^{C_1x+1}dx, & v=\int e^{C_1x+1}dx=\frac{1}{C_1}e^{C_1x+1}. \end{array}\right|$$

$$y=x\cdot\frac{1}{C_1}e^{C_1x+1}-\int\frac{1}{C_1}e^{C_1x+1}dx=x\,\frac{1}{C_1}e^{C_1x+1}-\frac{1}{C_1^{\,2}}e^{C_1x+1}+C_2.$$

Отже, загальним розв'язком даного рівняння буде функція:

$$y=x\frac{1}{C_1}e^{C_1x+1}-\frac{1}{C_1^{\,2}}e^{C_1x+1}+C_2.$$

Приклад 8. Розв'язати задачу Коші:

$$y''\mathrm{ctg}x+y'=2, \qquad y(0)=0; \qquad y'(0)=-2.$$

Розв'язання.

Аналогічно попередньому, маємо: $y'=P(x); \quad y''=P'(x)$. Тоді

$$P'\mathrm{ctg}x+P=2.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремлюємо змінні та обчислюємо отримані інтеграли:

$$P'\mathrm{ctg}x=2-P, \quad \Rightarrow\frac{dP}{dx}\cdot\mathrm{ctg}x=2-P, \quad \Rightarrow\frac{dP}{2-P}=\frac{dx}{\mathrm{ctg}x}, \quad \Rightarrow\int\frac{dP}{2-P}=\int\mathrm{tg}x\,dx, \quad \Rightarrow$$

$$-\ln|2-P|=-\ln|\cos x|-\ln C_1, \quad \Rightarrow \ln|2-P|=\ln|C_1\cos x|, \quad \Rightarrow 2-P=C_1\cos x, \quad \Rightarrow$$

$$P = 2 - C_1 \cos x, \quad \Rightarrow \quad y' = 2 - C_1 \cos x, \quad \Rightarrow \quad y = \int \left(2 - C_1 \cos x\right) dx\,;$$

$$y = 2x - C_1 \sin x + C_2 \quad - \text{ загальний розв'язок.}$$

Використаємо початкові умови:

$$y'(0) = -2, \quad \Rightarrow \quad -2 = 2 - C_1 \cos 0, \quad \Rightarrow \quad C_1 = 4,$$
$$y(0) = 0, \quad \Rightarrow \quad 0 = 2 \cdot 0 - C_1 \sin 0 + C_2, \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0.$$

Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд:

$$y = 2x - 4 \sin x\,.$$

Приклад 9. Розв'язати задачу Коші:

$$1 + \left(y'\right)^2 = 2y\,y''.$$

Розв'язання.

Це рівняння явно не містить незалежну змінну x, тому слід використати підстановку $y' = P(y), \quad y'' = P'P,$ яка зведе наше рівняння до рівняння першого порядку:

$$1 + P'^2 = 2yP'P\,.$$

Відокремимо змінні, та обчислимо одержані інтеграли:

$$1 + P^2 = 2y\frac{dP}{dy} \cdot P, \quad \Rightarrow \quad \frac{2PdP}{1 + P^2} = \frac{dy}{y}, \quad \Rightarrow \quad \int \frac{2PdP}{1 + P^2} = \int \frac{dy}{y}, \quad \Rightarrow$$

$$\left| \begin{matrix} 1 + P^2 = t \\ dt = 2PdP \end{matrix} \right| \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dt}{t} = \int \frac{dy}{y}, \quad \Rightarrow \quad \ln|t| = \ln|y| + \ln|C_1|, \quad \Rightarrow \quad \ln|t| = \ln|C_1 y|, \quad \Rightarrow$$

$$t = C_1 y, \Rightarrow \quad 1 + P^2 = C_1 y, \Rightarrow \quad P^2 = C_1 y - 1, \Rightarrow \quad P = \sqrt{C_1 y - 1}, \Rightarrow y' = \sqrt{C_1 y - 1}\,.$$

Останнє рівняння – це диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{C_1 y - 1}, \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = dx, \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = \int dx, \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{C_1}\sqrt{C_1 y - 1} + C_2\,.$$

Отже, загальний інтеграл даного рівняння другого порядку:

$$x = \frac{2}{C_1}\sqrt{C_1 y - 1} + C_2\,.$$

Приклад 10. Розв’язати рівняння:

$$y''y^2=-9.$$

Розв’язання.

Аналогічно попередньому прикладу вводимо підстановку $y'=P(y)$; $y''=P'P$. Дістанемо:

$$PP'y^2=-9,\quad\Rightarrow\quad P\frac{dP}{dy}y^2=-9,\quad\Rightarrow\quad PdP=\frac{-9dy}{y^2},\quad\Rightarrow\quad \int PdP=-9\int\frac{dy}{y^2}$$

$$\frac{P^2}{2}=\frac{9}{y}+C_1,\quad\Rightarrow\quad P^2=\frac{18C_1+2y}{y},\quad\Rightarrow\quad P=\sqrt{\frac{18C_1+2y}{y}},\quad\Rightarrow$$

$$y'=\sqrt{\frac{18C_1+2y}{y}},\quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{18C_1+2y}{y}},\quad\Rightarrow\quad \int\sqrt{\frac{y}{18C_1+2y}}\,dy=\int dx.$$

Для інтеграла, що знаходиться у лівій частині останнього рівняння, зробимо підстановку:

$$\sqrt{\frac{y}{18C_1+2y}}=t,\quad\Rightarrow\quad \frac{y}{18C_1+2y}=t^2,\quad\Rightarrow\quad y=18C_1t^2+2yt^2,\quad\Rightarrow$$

$$y-2yt^2=18C_1t^2,\quad\Rightarrow\quad y\left(1-2t^2\right)=18C_1t^2,\quad\Rightarrow\quad y=\frac{18C_1t^2}{1-2t^2},\quad\Rightarrow$$

$$dy=18C_1\frac{2t\left(1-2t^2\right)-t^2(-4t)}{\left(1-2t^2\right)^2}dt,\quad\Rightarrow\quad 18C_1\frac{2t-4t^3+4t^3}{\left(1-2t^2\right)^2}dt=\frac{36C_1t\,dt}{\left(1-2t^2\right)^2}.$$

Отже:

$$\int t\cdot\frac{36C_1t\,dt}{\left(1-2t^2\right)^2}=\int dx,\quad\Rightarrow\quad 36C_1\int\frac{t^2dt}{\left(1-2t^2\right)^2}=x+C_2.$$

Обчислимо інтеграл $\int\frac{t^2dt}{\left(1-2t^2\right)^2}$. Підінтегральна функція представляє собою правильний раціональний дріб, який можна розкласти на простіші:

$$\frac{t^2}{\left(1-2t^2\right)^2}=\frac{t^2}{\left[\left(1-2\sqrt{2}\,t\right)\left(1+\sqrt{2}\,t\right)\right]^2}=$$

$$=\frac{t^2}{\left(1-\sqrt{2}t\right)^2\left(1+\sqrt{2}t\right)^2}=\frac{A}{1-\sqrt{2}t}+\frac{B}{\left(1-\sqrt{2}t\right)^2}+\frac{C}{1+\sqrt{2}t}+\frac{D}{\left(1+\sqrt{2}t\right)^2}=$$

$$=\frac{A\left(1-\sqrt{2}t\right)\left(1+\sqrt{2}t\right)^2+B\left(1+\sqrt{2}t\right)^2+C\left(1+\sqrt{2}t\right)\left(1-\sqrt{2}t\right)^2+D\left(1-\sqrt{2}t\right)^2}{\left(1-\sqrt{2}t^2\right)^2};$$

Тоді:

$$t^2=A\left(1-\sqrt{2}t\right)\left(1+\sqrt{2}t\right)^2+B\left(1+\sqrt{2}t\right)^2+C\left(1+\sqrt{2}t\right)\left(1-\sqrt{2}t\right)^2+D\left(1-\sqrt{2}t\right)^2.$$

Для знаходження невідомих чисел A, B, C, D по черзі прирівнюємо x кожному із коренів знаменника, а потім, оскільки, невідомих більше ніж різних коренів знаменника, прирівнюємо коефіцієнти при x в однакових ступенях в останній рівності. Дістанемо:

$$\begin{array}{l|c}
t=\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}=4B, \quad \Rightarrow \quad B=\frac{1}{8}, \\
t=-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}=4D, \quad \Rightarrow \quad D=\frac{1}{8}, \\
t^3 & 0=-2\sqrt{2}A+2\sqrt{2}C, \quad \Rightarrow \quad C=A, \\
t^0 & 0=A+B+C+D, \quad \Rightarrow \quad 2A=-\frac{1}{4}, \quad \Rightarrow \quad A=-1/8; C=-1/8.
\end{array}$$

Отже, $\int\frac{t^2dt}{\left(1-2t^2\right)^2}=\frac{1}{8}\int\left(-\frac{1}{1-\sqrt{2}t}+\frac{1}{\left(1-\sqrt{2}t\right)^2}-\frac{1}{\left(1+\sqrt{2}t\right)}+\frac{1}{\left(1+\sqrt{2}t\right)^2}\right)dt=$

$$=\frac{1}{8}\left(+\frac{1}{\sqrt{2}}ln\left|1-\sqrt{2}t\right|+\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{1-\sqrt{2}t}-\frac{1}{\sqrt{2}}ln\left|1+\sqrt{2}t\right|-\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{1+\sqrt{2}t}\right)=$$

$$=\frac{1}{8\sqrt{2}}\left(ln\frac{1-\sqrt{2}t}{1+\sqrt{2}t}+\frac{1+\sqrt{2}t-1+\sqrt{2}t}{\left(1-\sqrt{2}t\right)\left(1+\sqrt{2}t\right)}\right)=\frac{1}{8\sqrt{2}}\left(ln\frac{1-\sqrt{2}t}{1+\sqrt{2}t}+\frac{2\sqrt{2}t}{1-2t^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{8\sqrt{2}}ln\left|\frac{1-\sqrt{2}t}{1+\sqrt{2}t}+\frac{2\sqrt{2}t}{1-2t^2}\right|=\frac{1}{8\sqrt{2}}ln\left|\frac{1-\sqrt{2}t}{1+\sqrt{2}t}\right|+\frac{1}{4}\ \frac{t}{1-2t^2};$$

Повертаючись до старої змінної, маємо:

$$36C_1\left(\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-\sqrt{2}\sqrt{\frac{y}{18C_1+2y}}}{1+\sqrt{2}\sqrt{\frac{y}{18C_1+2y}}}\right|+\frac{1}{4}\frac{\sqrt{\frac{y}{18C_1+2y}}}{1-\frac{2y}{18C_1+2y}}\right)=x+C_2,$$ або

$$\frac{9C_1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{9C_1+y}-\sqrt{y}}{\sqrt{9C_1+y}+\sqrt{y}}\right|+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{y(9C_1+y)}=x+C_2$$ – загальний інтеграл рівняння.

Приклад 11. Знайти частинний розв'язок рівняння:

$$y\cdot y''-(y')^2=y^2\ln y,\qquad y(0)=1;\qquad y'(0)=1.$$

Розв'язання.

Підстановкою $y'=P(y),\quad y''=P'\cdot P$ початкове рівняння зводиться до рівняння Бернуллі першого порядку:

$$P\cdot yP'-P^2=y^2\ln y,\quad \text{або}\quad P'-\frac{P}{y}=\frac{y\ln y}{P}.$$

Розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді $P=uv$. Тоді $P'=u'v+uv'$.

$$u'v+uv'-\frac{uv}{y}=\frac{y\ln y}{uv},\quad\Rightarrow\quad u\left(v'-\frac{v}{y}\right)+u'v=\frac{y\ln y}{uv},$$

$$\begin{cases} I.\ v'-\frac{v}{y}=0,\\ II.\ u'v=\frac{y\ln y}{uv},\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \begin{cases} I.\ v'=\frac{v}{y},\\ II.\ u'=\frac{y\ln y}{uv^2}.\end{cases}$$

I. $\frac{dv}{dy}=\frac{v}{y},\quad\Rightarrow\quad\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dy}{y},\quad\Rightarrow\quad \ln|v|=\ln|y|,\quad\Rightarrow\quad v=y.$

II. $u'=\frac{y\ln y}{uy^2},\quad\Rightarrow\quad\frac{udu}{dy}=\frac{\ln y}{y},\quad\Rightarrow\quad\int u\,du=\int\frac{\ln y\,dy}{y},\quad\Rightarrow\quad\left|\begin{matrix}t=\ln y\\ dt=\frac{dy}{y}\end{matrix}\right|,\quad\Rightarrow$

$$\int udu=\int t\,dt,\quad\Rightarrow\quad\frac{u^2}{2}=\frac{t^2}{2}+\frac{C_1}{2},\quad\Rightarrow\quad u^2=t^2+C_1,\quad\Rightarrow\quad u=\sqrt{\ln^2 y+C_1}.$$

Дістанемо: $P=\sqrt{\ln^2 y+C_1}\cdot y$.

Отже

$$y' = \sqrt{ln^2 y + C_1} \cdot y, \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y\sqrt{ln^2 y + C_1}, \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y\sqrt{ln^2 y + C_1}} = \int dx, \quad \Rightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} ln\, y = t \\ dt = \dfrac{dy}{y} \end{array} \right|, \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + C_1}} = \int dx, \quad \Rightarrow \quad ln\left| t + \sqrt{t^2 + C_1} \right| = x + C_2 .$$

Загальний інтеграл рівняння матиме вигляд:

$$ln\left| ln\, y + \sqrt{ln^2 y + C_1} \right| = x + C_2 .$$

Використовуючи початкові умови, знайдемо C_1 та C_2:

$$\begin{array}{l} y(0) = 1, \quad \Rightarrow \\ y'(0) = 1, \quad \Rightarrow \end{array} \begin{cases} ln\left| ln 1 + \sqrt{ln^2 1 + C_1} \right| = C_2, \\ 1 = \sqrt{ln^2 1 + C_1}, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_2 = ln\sqrt{C_1}, \\ C_1 = 1, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} C_2 = 0 \\ C_1 = 1 \end{array}.$$

Таким чином, частинний розв'язок рівняння має вигляд:

$$ln\left| ln\, y + \sqrt{ln^2 y + 1} \right| = x .$$

Приклад 12. Знайти частинний розв'язок рівняння:

$$2yy'' + y^2 - (y')^2 = 0, \qquad y(0) = 1; \quad y'(0) = 1 .$$

Розв'язання.

Підстановкою $y' = P(y); \quad y'' = P'P$ зведемо дане рівняння до однорідного рівняння І-го порядку $2yPP' + y^2 - P^2 = 0$, яке за допомогою заміни $P = uy, \quad P' = u'y + u, \quad u = \dfrac{P}{y}$ перетвориться на диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$2yuy(u'y + u) + y^2 - (uy)^2 = 0$, або

$$2u(u'y + u) + 1 - u^2 = 0,$$
$$2uu'y + 2u^2 + 1 - u^2 = 0,$$

$$2uu'y = -(u^2 + 1), \quad \Rightarrow \quad \int \frac{2udu}{u^2 + 1} = -\int \frac{dy}{y}, \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} u^2 + 1 = t \\ dt = 2udu \end{array} \right|, \quad \Rightarrow$$

$$\int\frac{dt}{t}=-\int\frac{dy}{y},\quad\Rightarrow\quad \ln|t|=-\ln|y|+\ln|C_1|,\quad\Rightarrow\quad \ln|t|=\ln\left|\frac{C_1}{y}\right|,\quad\Rightarrow$$

$$t=\frac{C_1}{y},\quad\Rightarrow\quad u^2+1=\frac{C_1}{y},\quad\Rightarrow\quad u^2=\frac{C_1}{y}-1,\quad\Rightarrow\quad u=\sqrt{\frac{C_1-y}{y}},\quad\Rightarrow$$

$\frac{P}{y}=\sqrt{\frac{C_1-y}{y}},\quad\Rightarrow\quad P=y\sqrt{\frac{C_1-y}{y}}$, або

$$P=\sqrt{y(C_1-y)}\,.$$

Тобто, $y'=\sqrt{C_1y-y^2},\quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\sqrt{C_1y-y^2},\quad\Rightarrow\quad \int\frac{dy}{\sqrt{C_1y-y^2}}=\int dx$, або

$$\int\frac{dy}{\sqrt{\frac{C_1^2}{4}-\left(y-\frac{C_1}{2}\right)^2}}=\int dx\,.$$

Оскільки

$$C_1y-y^2=-\left(y^2-C_1y\right)=-\left(y^2-2\frac{C_1}{2}y+\frac{C_1^2}{4}-\frac{C_1^2}{4}\right)=\frac{C_1^2}{4}-\left(y-\frac{C_1}{2}\right)^2.$$

Дістанемо:

$\arcsin\frac{y-\frac{C_1}{2}}{\frac{C_1}{2}}=x+C_2$, або $\arcsin\frac{2y-C_1}{C_1}=x+C_2$ – загальний інтеграл рівняння.

З початкових умов випливає:

$$\begin{cases} y(0)=1,\\ y'(0)=1,\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\arcsin\frac{2-C_1}{C_1}=C_2,\\ 1=\sqrt{C_1-1},\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \begin{cases}C_2=0,\\ C_1=2\,.\end{cases}$$

Отже, частинний розв’язок рівняння має вигляд:

$$\arcsin(y-1)=x\,.$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти загальні розв’язки диференціальних рівнянь другого порядку:

1) $y''=\sin^2 3x$;　　　7) $x^2y''+xy'=1$;

2) $y'' = x^2 \ln x$;

3) $y''' = e^{5x} - x^3$;

4) $y''' = \dfrac{2}{x^3} - 5\sin 7x$;

5) $xy'' - y' = 0$;

6) $y'' + y' tgx = \sin 2x$;

8) $xy'' = y' + x \sin\dfrac{y'}{x}$;

9) $yy'' - y'\left(2\sqrt{yy'} - y'\right) = 0$;

10) $2yy'' = 3(y')^2 = 4y^2$;

11) $y''y^3 = 4$;

12) $y'' = \dfrac{y'}{\sqrt{y}}$.

7. Лінійні однорідні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Лінійним диференціальним рівнянням другого порядку називається рівняння

$$y'' + p y' + q y = f(x).$$

Якщо p та q є сталі числа, то рівняння називається ***лінійним диференціальним рівнянням другого порядку із сталими коефіцієнтами.***

Якщо $f(x) = 0$, то рівняння називається ***однорідним,*** якщо $f(x) \neq 0$ – ***неоднорідним.***

Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння $y'' + p y' + q y = 0$ має вигляд:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

де $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – лінійно-незалежні частинні розв'язки рівняння, тобто $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq const$, а C_1, C_2 – довільні сталі.

Для знаходження y_1, y_2 треба розв'язати характеристичне рівняння:

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Можливі наступні випадки:

k_1, k_2 – корені характеристичного рівняння	y_1, y_2 – частинні розв'язки	$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ – загальний розв'язок
k_1, k_2 – дійсні різні числа, $k_1 \neq k_2$	$y_1 = e^{k_1 x}$ $y_2 = e^{k_2 x}$	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
$k_1 = k_2$ – дійсні однакові числа	$y_1 = e^{k_1 x}$ $y_2 = x\, e^{k_1 x}$	$y = e^{k_1 x}\left(C_1 + C_2 x\right)$
$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ – комплексно-спряжені числа, $i^2 = -1$ – уявна одиниця, α, β – дійсні числа.	$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$	$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$

Зразки розв'язування задач

Приклад 1. Розв'язати рівняння:

$$y'' - 6y' + 8y = 0.$$

Розв'язання.

Складемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 6k + 8 = 0,$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 4,$$

$$k_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2};$$

де $k_1 = 4; \quad k_2 = 2$ – корені характеристичного рівняння дійсні та різні, тобто, загальний розв'язок рівняння має вигляд $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{2x}$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння:

$$y'' + 6y' + 9y = 0.$$

Розв'язання.

Характеристичне рівняння має вигляд $k^2+6k+9=0$. Його корені – дійсні, рівні $k_{1,2}=-3$. Тоді загальний розв'язок рівняння має вигляд $y=e^{-3x}(C_1+C_2x)$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння:

$$y''+4y'+13y=0.$$

Розв'язання.

Маємо характеристичне рівняння $k^2+4k+13=0$.

$D=4^2-4\cdot1\cdot13=-36$,

$k_{1,2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{-36}}{2}=-2\pm3i, \quad \Rightarrow \quad \alpha=-2; \quad \beta=3.$

Загальний розв'язок рівняння $y=e^{-2x}(C_1\cos3x+C_2\sin3x)$.

Приклад 4. Розв'язати задачу Коші:

$$y''-5y+6y'=0, \quad y(0)=3; \quad y'(0)=7.$$

Розв'язання.

Характеристичне рівняння має вигляд:

$$k^2-5k+6=0.$$

Його корені $k_1=2; \ k_2=3$. Тоді, загальний розв'язок $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$. Для того, щоб знайти частинний розв'язок треба визначити C_1 та C_2. Це можна зробити, використовуючи початкові умови, але спочатку треба знайти похідну y' від загального розв'язку: $y'=2C_1e^{2x}+3C_2e^{3x}$. Дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y(0)=3, \\ y'(0)=7, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3=C_1e^0+C_2e^0, \\ 7=2C_1e^0+3C_2e^0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1+C_2=3, \\ 2C_1+3C_2=7, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=2, \\ C_2=1. \end{cases}$$

Отже, частинний розв'язок рівняння: $y=2e^{2x}+e^{3x}$.

Приклад 5. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = 4; \quad y'(0) = 5.$$

Розв'язання.

Характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 1 = 0$. Його корені $k_1 = k_2 = 1$. Тоді загальний розв'язок $y = e^x(C_1 + C_2 x)$. Знайдемо похідну y':

$$y' = e^x(C_1 + C_2 x) + e^x \cdot C_2.$$

Маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} y(0) = 4, \\ y'(0) = -5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = e^0(C_1 + C_2 \cdot 0), \\ -5 = e^0(C_1 + C_2 \cdot 0) + e^0 \cdot C_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 4, \\ -5 = C_1 + C_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 4, \\ C_2 = -9. \end{cases}$$

Отже, розв'язок задачі Коші матиме вигляд:

$$y = e^x(4 - 9x).$$

Приклад 6. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - 6y' + 25y = 0 \quad y(0) = 3; \quad y'(0) = 5.$$

Розв'язання.

Характеристичне рівняння $k^2 - 6k + 25 = 0$.

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = -64; \quad k_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-64}}{2}; \quad k_{1,2} = 3 \pm 4i.$$

Загальний розв'язок $y = e^{3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$.

Обчислимо y':

$$y' = 3e^{3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x) + e^{3x}(-4C_1 \sin 4x + 4C_2 \cos 4x).$$

Використовуючи початкові умови, знайдемо C_1 та C_2:

$$\begin{cases} y(0) = 3, \\ y'(0) = 5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0), \\ 5 = 3e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) + e^0(-4C_1 \sin 0 + 4C_2 \cos 0), \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C_1 = 3, \\ 3C_1 + 4C_2 = 5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 3, \\ C_2 = -1. \end{cases}$$

Отже, частинний розв'язок однорідного рівняння буде

$$y = e^{3x}(3\cos 4x - \sin 4x).$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти загальні та частинні розв’язки однорідних диференціальних рівнянь другого порядку:

1) $y'' - y' - 12y = 0$;
2) $y'' + 8y' - 16y = 0$;
3) $y'' + 2y' + 5y = 0$;
4) $2y'' - 5y' = 0$;
5) $y'' - y' = 0$;
6) $9y'' + y' = 0$;
7) $4y'' - 4y' + y = 0, \quad y(0) = 5; \quad y'(0) = -1$;
8) $y'' - 7y' + 12 = 0, \quad y(0) = 4; \quad y'(0) = 13$;
9) $y'' + y = 0, \quad y(0) = 4; \quad y'(0) = 0$.

8. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами із спеціальною правою частиною

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + p\,y' + q\,y = f(x).$$

Якщо права частина $f(x)$ лінійного неоднорідного рівняння є функцією спеціального вигляду, то рівняння можна розв’язати *методом невизначених коефіцієнтів*, і загальний розв’язок має вигляд:

$$y = \bar{y} + y^*,$$

де $\bar{y}$ – загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння, y^* – частинний розв’язок неоднорідного рівняння, який залежить від функції $f(x)$ та коренів характеристичного рівняння k_1, k_2.

Можливі такі випадки:

1. Нехай $f(x)=e^{ax}P_n(x)$, де $P_n(x)-$ многочлен степеня n, тобто

$P_n(x)=a_n x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, тоді:

а) якщо $k_1 \neq a,\ \ k_2 \neq a$, тоді частинний розв'язок обираємо у вигляді $y^* = e^{ax}Q_n(x)$, де $Q_n(x)-$ многочлен ступеню n з невідомими коефіцієнтами, тобто, якщо

$$
\begin{array}{ll}
n=0 & Q_n(x)=A, \\
n=1 & Q_n(x)=Ax+B, \\
n=2 & Q_n(x)=Ax^2+Bx+C, \\
n=3 & Q_n(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D;
\end{array}
$$

б) якщо $k_1 \neq a, \quad k_2 = a$, тоді $y^* = x\,e^{ax}Q_n(x)$;

в) якщо $k_1 = k_2 = a$, тоді $y^* = x^2 e^{ax}Q_n(x)$.

Зауваження 1. Для знаходження невідомих коефіцієнтів многочлена $Q_n(x)$ треба підставити функцію y^* та її похідні першого та другого порядку в вихідне рівняння та прирівняти коефіцієнти при однакових ступенях n з обох його сторін. Таким чином, дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої визначимо невідомі коефіцієнти.

2. Нехай $f(x)=e^{ax}\left[P_n(x)\cos bx + Qm(x)\sin bx\right]$, де $P_n(x), Q_m(x)-$ многочлени степенів n та m, тоді існують такі випадки:

а) якщо $k_{1,2} \neq a \pm bi$, тоді $y^* = e^{ax}\left[Q_S(x)\cos bx + L_S(x)\sin bx\right]$, де $Q_S(x),\ \ L_S(x)-$ многочлени ступеню $s = \max\{n, m\}$ з невідомими коефіцієнтами;

б) якщо $k_{1,2} = a \pm bi$, тоді $y^* = x\,e^{ax}\left[Q_S(x)\cos bx + L_S(x)\sin bx\right]$.

Зауваження 2. У цьому випадку для знаходження невідомих коефіцієнтів многочленів $Q_S(x)$ та $L_S(x)$ діємо так само, але прирівнюємо коефіцієнти при $\cos bx,\ \sin bx$, внаслідок чого знов дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої визначимо невідомі коефіцієнти.

Якщо, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, де $f_1(x)$ та $f_2(x)$ – функції спеціального вигляду, то частинний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння y^* має вигляд

$$y^* = y_1^* + y_2^*,$$

де y_1^* та y_2^* – частинні розв'язки лінійних неоднорідних рівнянь

$y'' + py' + qy = f_1(x)$ та $y'' + py' + qy = f_2(x)$ відповідно.

Зразки розв'язування задач

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y'' - y' - 6y = e^{2x}(4x - 6).$$

Розв'язання.

Загальний розв'язок рівняння має вигляд $y = \bar{y} + y^*$, де $\bar{y}$ – загаль-ний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y'' - y' - 6y = 0$. Характеристичне рівняння $k^2 - k - 6 = 0$ має корені $k_1 = 3;\ \ k_2 = -2$. Отже $\bar{y} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}$.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння залежить від вигляду правої частини $f(x) = e^{2x}(4x - 6)$ (маємо $a = 2;\ \ n = 1;\ \ k_1 = 3;\ \ k_2 = -2$).

Тоді $y^* = e^{2x}(Ax + B)$. Для визначення невідомих коефіцієнтів A та B підставимо y^* в початкове рівняння. Щоб це було можливим, знайдемо першу і другу похідні від частинного розв'язку y^*:

$$y^{*'} = 2e^{2x}(Ax + B) + e^{2x} \cdot A,$$

$$y^{*''} = 4e^{2x}(Ax + B) + 2e^{2x}A + 2e^{2x}A = 4e^{2x}(Ax + B) + 4e^{2x}A.$$

Після підстановки $y^*, y^{*'}, y^{*''}$ в наше рівняння отримаємо

$$4e^{2x}(Ax + B) + 4e^{2x}A - \left(2e^{2x}(Ax + B) + e^{2x}A\right) - 6e^{2x}(Ax + B) = e^{2x}(4x - 6).$$

Розділимо рівняння на e^{2x} та приведемо подібні доданки. Маємо:

$$-4Ax + 3A - 4B = 4x - 6.$$

Прирівняємо коефіцієнти при x в однакових ступенях:

$$\begin{array}{c|l} x & -4A=4, \qquad \Rightarrow \quad A=-1, \\ x^0 & 3A-4B=-6, \quad \Rightarrow \quad 4B=3A+6 \quad \Rightarrow \quad B=\dfrac{3}{4}. \end{array}$$

Тобто, $y^* = e^{2x}\left(-x+\dfrac{3}{4}\right)$.

Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} + e^{2x}\left(-x+\frac{3}{4}\right).$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y'' - 6y' + 5y = e^{5x}\left(12x^2-8\right).$$

Розв'язання.

Загальний розв'язок цього рівняння складається з двох компонентів $y=\bar{y}+y^*$. Характеристичне рівняння відповідного однорідного рівняння $y''-6y'+5y=0$ має вигляд $k^2-6k+5=0$. Його корені: $k_1=5;\ k_2=1$. Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд: $\bar{y}=C_1e^{5x}+C_2e^{x}$.

Враховуючи, що $f(x)=e^{5x}\left(12x^2-8\right)$, тобто, $a=5, n=2$, а також, що $k_1=5=a,\quad k_2\neq a$, дістанемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$y^* = xe^{5x}\left(Ax^2+Bx+C\right) \quad \text{або} \quad y^* = e^{5x}\left(Ax^3+Bx^2+Cx\right).$$

Знаходимо:

$$y^{*\prime} = 5e^{5x}\left(Ax^3+Bx^2+Cx\right)+e^{5x}\left(3Ax^2+2Bx+C\right),$$

$$y^{*\prime\prime} = 25e^{5x}\left(Ax^3+Bx^2+Cx\right)+5e^{5x}\left(3Ax^2+2Bx+C\right)+5e^{5x}\left(3Ax^2+2Bx+C\right)+$$
$$+e^{5x}\left(6Ax+2B\right).$$

Підставляючи $y^*, y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$ в початкове рівняння, отримаємо:

$$25e^{5x}\left(Ax^3+Bx^2+Cx\right)+10e^{5x}\left(3Ax^2+2Bx+C\right)+e^{5x}\left(6Ax+2B\right) -$$
$$-6\left(5e^{5x}\left(Ax^3+Bx^2+Cx\right)+e^{5x}\left(3Ax^2+2Bx+C\right)\right)+5e^{5x}\left(Ax^3+Bx^2+Cx\right) =$$
$$=e^{5x}\left(12x^2-8\right).$$

Розділимо обидві частини на e^{5x} та приведемо подібні доданки:

$$12Ax^2+8Bx+6Ax+4C+2B=12x^2-8.$$

Прирівняємо коефіцієнти при x в однакових ступенях.

$$\begin{array}{c|l}
x^2 & 12A=12, \quad \Rightarrow \quad A=1, \\
x & 8Bx-6A=0, \quad \Rightarrow \quad 8B=6A, \quad \Rightarrow \quad B=\frac{3}{4}A, \quad \Rightarrow \quad B=\frac{3}{4}, \\
x^0 & 4C+2B=-8, \quad \Rightarrow \quad 2C=-4-B, \quad \Rightarrow \quad C=\dfrac{-4-\frac{3}{4}}{2}, \Rightarrow \quad C=-\frac{19}{8}.
\end{array}$$

Тоді, $y^*=e^{5x}\left(x^2+\frac{3}{4}x-\frac{19}{8}\right)$.

Дістанемо загальний розв’язок лінійного неоднорідного рівняння у вигляді:

$$y=C_1e^{5x}+C_2e^x+e^{5x}\left(x^2+\frac{3}{4}x-\frac{19}{8}\right).$$

Приклад 3. Знайти загальний розв’язок рівняння:

$$y''+6y'+9y=3\,e^{-3x}.$$

Розв’язання.

Аналогічно попередньому, маємо $y=\bar{y}+y^*$.

Характеристичне рівняння $k^2+6k+9=0$ має однакові корені $k_{1,2}=-3$.

Отже, $\bar{y}=e^{-3x}(C_1+C_2x)$.

$f(x)=3e^{-3x}$, тобто, $a=-3;$ $n=0;$ $k_{1,2}=-3=a$. Частинний розв’язок даного неоднорідного рівняння буде мати вигляд:

$$y^*=Ax^2e^{-3x},$$
$$y^{*\prime}=2Axe^{-3x}-3Ax^2e^{-3x},$$
$$y^{*\prime\prime}=2Ae^{-3x}-6Axe^{-3x}-6Axe^{-3x}+9Ax^2e^{-3x}, \quad \text{або}$$
$$y^{*\prime\prime}=2Ae^{-3x}-12Axe^{-3x}+9Ax^2e^{-3x}.$$

Після підстановки цих виразів в початкове рівняння, дістанемо

$2Ae^{-3x}-12Axe^{-3x}+9Ax^2e^{-3x}+6\left(2Axe^{-3x}-3Ax^2e^{-3x}\right)+9Ax^2e^{-3x}=3e^{-3x}$, або

$$2A=3, \quad \Rightarrow \quad A=\frac{3}{2}.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння буде:

$$y^*=\frac{3}{2}x^2e^{-3x},$$

а загальний : $\quad y=e^{-3x}\left(C_1+C_2x-\frac{3}{2}x^2\right).$

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$y''-5y'=4\cos 2x+8\sin 2x.$

Розв'язання.

Маємо: $k^2-5k=0, \quad \Rightarrow \quad k(k-5)=0, \quad \Rightarrow \quad k_1=0; \quad k_2=5.$

$y^*=A\cos 2x+B\sin 2x,$

$y^{*'}=-2A\sin 2x+2B\cos 2x,$

$y^{*''}=-4A\cos 2x-4B\sin 2x.$

Отримаємо:

$-4A\cos 2x-4B\sin 2x-5(-2A\sin 2x+2B\cos 2x)=4\cos 2x+8\sin 2x.$

Порівняємо коефіцієнти при $\cos 2x$ та $\sin 2x$ в обох частинах останнього рівняння:

$$\begin{array}{l|l} \cos 2x & -4A-10B=4, \\ \sin 2x & -4B+10A=8. \end{array}$$

Дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2A+5B=-2, \\ 5A-2B=4. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему рівнянь за формулами Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}=-4-25=-29;$$

$$\Delta_A=\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=4-20=-16; \qquad \Delta_B=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=8+20=28;$$

$$A=\frac{\Delta_A}{\Delta}=\frac{16}{29}; \qquad B=-\frac{28}{29}.$$

Отже: $\quad y^*=\frac{16}{29}\cos 2x-\frac{28}{29}\sin 2x$, а

$y = \bar{y} + y^* = C_1 + C_2 e^{5x} + \dfrac{16}{29}\cos 2x - \dfrac{28}{29}\sin 2x$ – загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння.

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y'' - 8y' + 25y = 26e^{4x}\cos 3x.$$

Розв'язання.

Маємо: $y'' - 8y' + 25y = 0 \;\;\Rightarrow\;\; k^2 - 8k + 25 = 0; \;\;\; D = 64 - 100 = -36$.

$k_{1,2} = 4 \pm 3i$, де $i = \sqrt{-1}$. Загальний розв'язок однорідного рівняння $\bar{y} = e^{4x}\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right)$.

Частинний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння шукатимемо у вигляді $\left(a = 4; \;\; b = 3; \;\; k_{1,2} = a \pm ib\right)$:

$$y^* = xe^{4x}\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right),$$

$$y^{*'} = 4e^{4x}\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right)x + e^{4x}\left(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x\right)x +$$
$$+ e^{4x}\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right),$$

$$y^{*''} = 16e^{4x}\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right)\cdot x + 4e^{4x}\left(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x\right)\cdot x +$$
$$+ 4e^{4x}\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right) + 4e^{4x}\left(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x\right)\cdot x +$$
$$+ e^{4x}\left(-9A\cos 3x - 9B\sin 3x\right)\cdot x + e^{4x}\left(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x\right) +$$
$$+ 4e^{4x}\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right) + e^{4x}\left(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x\right) =$$
$$= 16e^{4x}\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right)\cdot x + 8e^{4x}\left(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x\right)x +$$
$$+ e^{4x}\left(-9A\cos 3x - 9B\sin 3x\right)\cdot x + 2e^{4x}\left(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x\right) +$$
$$+ 4e^{4x}\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right).$$

Підставимо $y^*, y^{*'}$ та $y^{*''}$ в початкове рівняння та отримаємо:

$$16e^{4x}\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right)\cdot x + 8e^{4x}\left(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x\right)\cdot x +$$
$$+ e^{4x}\left(-9A\cos 3x - 9B\sin 3x\right)\cdot x + 2e^{4x}\left(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x\right) +$$
$$+ 4e^{4x}\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right) - 8\Big[4e^{4x}\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right)\cdot x +$$
$$+ e^{4x}\left(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x\right)\cdot x + e^{4x}\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right)\Big] +$$
$$+ 25e^{4x}\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right)\cdot x = 26e^{4x}\cos 3x.$$

Після низки арифметичних перетворень останнє рівняння набуває вигляду:

$$6B\cos 3x-4A\cos 3x-4B\sin 3x-6A\sin 3x=26\cos 3x\,.$$

Порівняємо коефіцієнти при $\cos 3x$ та $\sin 3x$:

$$\begin{array}{c|l} \cos 3x & 6B-4A=26, \\ \sin 3x & -4B-6A=0. \end{array}$$

Отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} -2A+3B=13, \\ -3A-2B=0, \end{cases}$$

яку розв'яжемо за формулами Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=4+9=13,$$

$$\Delta_A=\begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=-26\,, \qquad \Delta_B=\begin{vmatrix} -1 & 13 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}=39\,;$$

Тоді

$$A=\frac{\Delta_A}{\Delta}=-2\,; \qquad B=\frac{\Delta_B}{\Delta}=-3\,.$$

Отже, маємо $y^{*}=x\,e^{4x}\left(-2\cos 3x-3\sin 3x\right)$.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння дістанемо у вигляді:

$$y=e^{4x}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x\right)+x\cdot e^{4x}\left(-2\cos 3x-3\sin 3x\right).$$

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y''+9y=4\cos 3x+2\sin 3x\,.$$

Розв'язання.

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y''+9y=0$ має вигляд $\bar{y}=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$. Оскільки $f(x)=4\cos 3x+2\sin 3x$, тобто $a=0;\ b=3;\ k_{1,2}=\pm 3i=a\pm bi$, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння буде:

$$y^{*}=x\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right),$$

$$y^{*'}=A\cos 3x+B\sin 3x+x\left(-3A\sin 3x+3B\cos 3x\right),$$

$$y^{*''}=-3A\sin 3x+3B\cos 3x-3A\sin 3x+3B\cos 3x+x\left(-9A\cos 3x-9B\sin 3x\right)=$$
$$=-6A\sin 3x+6B\cos 3x+x\left(-9A\cos 3x-9B\sin 3x\right).$$

Дістанемо:

$$-6A\sin 3x+6B\cos 3x+x\left(-9A\cos 3x-9B\sin 3x\right)+9x\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right)=$$
$$=4\cos 3x+2\sin 3x\,,$$

Звідки, $A=-{}^{1}\!/_{3}; \quad B={}^{2}\!/_{3}$. Отже $y^{*}=x\left(-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{2}{3}\sin 3x\right)$.

Загальним розв'язком лінійного неоднорідного рівняння буде функція $y=\bar{y}+y^{*}=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+x\left(-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{2}{3}\sin 3x\right)$.

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y''-10y'=30x^2+200\sin 10x\,.$$

Розв'язання.

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y''-10y'=0$ має вигляд $\bar{y}=C_1+C_2e^{10x}$. Права частина початкового рівняння складається з двох доданків: $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, де $f_1(x)=30x^2; \quad f_2(x)=200\sin 10x$. Тому частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння теж складається з двох доданків: $y^{*}=y_1^{*}+y_2^{*}$, де y_1^{*} та y_2^{*} є частинними розв'язками рівнянь:

$$y''-10y'=30x^2 \qquad \text{та} \qquad y''-10y'=200\sin 10x$$

відповідно.

Аналогічно попередньому маємо:

$$y_1^{*}=x\left(Ax^2+Bx+C\right)=Ax^3+Bx^2+Cx,$$

$$y_1^{*\prime}=3Ax^2+2Bx+C\,,$$

$$y_1^{*\prime\prime}=6Ax+2B.$$

Отримаємо:

$$6Ax+2B-10\left(3Ax^2+2Bx+C\right)=30x^2, \quad \text{або}$$

$$-30Ax^2+\left(6A-20B\right)x+2B-10C=30x^2.$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & -30A=30, \ \Rightarrow A=-1, \\ x & 6A-20B=0, \ \Rightarrow 20B=6A, \ \Rightarrow B=\dfrac{3}{10}, \\ x^0 & 2B-10C=0, \ \Rightarrow C=\dfrac{6}{100}. \end{array}$$

Отже, $y_1^* = -x^3 + 0{,}3x^2 + 0{,}06x$.

$$y_2^* = A\cos 10x + B\sin 10x,$$

$$y_2^{*'} = -10A\sin 10x + 10B\cos 10x,$$

$$y_2^{*''} = -100A\cos 10x - 100B\sin 10x.$$

Тоді

$$-100A\cos 10x - 100B\sin 10x - 10\left(-10A\sin 10x + 10B\cos 10x\right) = 200\sin 10x.$$

$$\begin{array}{l|l} \cos 10x & -100A - 100B = 0, \quad \Rightarrow \quad A + B = 0, \\ \sin 10x & -100B + 100A = 200, \qquad\quad A - B = 2. \end{array}$$

Звідки, $A = 1;\quad B = -1$. Отже, $y_2^* = \cos 10x - \sin 10x$.

Загальний розв'язок початкового лінійного неоднорідного рівняння дістанемо у вигляді:

$$y = C_1 + C_2 e^{10x} - x^3 + 0{,}06x + \cos 10x - \sin 10x.$$

Приклад 8. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - y' - 2y = e^{4x}(10x + 7), \quad y(0) = 3; \quad y'(0) = 0.$$

Розв'язання.

Аналогічно попередньому маємо:

$$y'' - y' - 2y = 0,$$

$$k^2 - k - 2 = 0, \quad \Rightarrow \quad k_1 = 2; \quad k_2 = -1.$$

Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння буде

$$\bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}.$$

$$f(x) = e^{4x}(10x + 7).$$

$$a = 4; \quad n = 1, \quad k_1 = 2; \quad k_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad y^* = e^{4x}(Ax + B),$$

$$y^{*'} = 4e^{4x}(Ax + B) + e^{4x} \cdot A,$$

$$y^{*''} = 16e^{4x}(Ax + B) + 4e^{4x} \cdot A + 4e^{4x} \cdot A = 16e^{4x}(Ax + B) + 8e^{4x}A.$$

Підставимо $y^*, y^{*'}, y^{*''}$ в початкове рівняння:

$16e^{4x}(Ax + B) + 8e^{4x}A - \left(4e^{4x}(Ax + B) + e^{4x}A\right) - 2e^{4x}(Ax + B) = e^{4x}(10x + 7)$, або

$$16(Ax + B) + 8A - 4(Ax + B) - A - 2(Ax + B) = 10x + 7.$$

$$\begin{array}{l|l} x & 16A-4A-2A=10, \quad \Rightarrow \quad A=1, \\ x^0 & 16B+8A-4B-A-2B=+7, \quad \Rightarrow \quad 7A-10B=+7, \quad \Rightarrow \quad B=0. \end{array}$$

Частинний розв'язок диференціального рівняння має вигляд: $y^* = xe^{4x}$, а загальний розв'язок – $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} + xe^{4x}$.

Використаємо початкові умови, для цього знайдемо y':

$$y' = 2C_1e^{2x} - C_2e^{-x} + e^{4x} + 4xe^{4x}.$$

Маємо:

$$\begin{cases} 3 = C_1e^0 + C_2e^0 + 0, \\ 0 = 2C_1 - C_2 + e^0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 3, \\ 2C_1 - C_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3C_1 = 3, \\ C_1 - C_2 = 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 2. \end{cases}$$

Отже, дістанемо розв'язок задачі Коші:

$$y = e^{2x} + 2e^{-x} + 4xe^{4x}.$$

Приклад 9. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - 10y' + 25y = (-100x + 30)e^{-5x} + 4\cos 5x, \qquad y(0) = -1{,}9; \qquad y'(0) = -1{,}1.$$

Розв'язання.

Характеристичне рівняння відповідного однорідного диференціального рівняння має два рівних кореня $k_{1,2} = 5$. Отже, $\bar{y} = e^{5x}(C_1 + C_2x)$. Оскільки, права частина складається з суми двох різних функцій: $f_1(x) = (-100x + 30)e^{-5x}$, $f_2(x) = 4\cos 5x$, то кожній з них будуть відповідати частинні розв'язки y_1^* та y_2^*, а $y^* = y_1^* + y_2^*$.

$$y_1^* = e^{-5x}(Ax + B),$$

$$y_1^{*\prime} = -5e^{-5x}(Ax + B) + e^{-5x} \cdot A,$$

$$y_1^{*\prime\prime} = 25e^{-5x}(Ax + B) - 5e^{-5x} \cdot A - 5e^{-5x} \cdot A = 25e^{-5x}(Ax + B) - 10e^{-5x} \cdot A.$$

Маємо:

$$25e^{-5x}(Ax + B) - 10e^{-5x} - 10\left(-5e^{-5x}(Ax + B) + e^{-5x} \cdot A\right) + 25e^{-5x}(Ax + B) = (-100x + 30)e^{-5x}$$

Розділимо це рівняння на e^{-5x}:

$$25(Ax + B) - 10A + 50(Ax + B) - 10A + 25(Ax + B) = -100x + 30.$$

$$\begin{array}{l|l} x & 25A + 50A + 25A = -100 \quad \Rightarrow \quad A = -1. \\ x^0 & 25B - 10A + 50B - 10A + 25B = 30 \quad \Rightarrow \quad 100B - 20A = 30 \quad \Rightarrow \quad 10B = 3 + 2A \quad \Rightarrow \quad B = 0{,}1. \end{array}$$

Тобто, $y_1^* = e^{-5x}(-x+0{,}1)$.

Знайдемо y_2^*:

$y_2^* = C\cos 5x + D\sin 5x,$

$y_2^{*\prime} = -5C\sin 5x + 5D\cos 5x,$

$y_2^{*\prime\prime} = -25C\cos 5x - 25D\sin 5x.$

$$-25C\cos 5x - 25D\sin 5x - 10(-5C\sin 5x + 5D\cos 5x) + 25(C\cos 5x + D\sin 5x) = 4\cos 5x.$$

Прирівняємо коефіцієнти при $\cos 5x$ та $\sin 5x$:

$$\begin{array}{l|l} \cos 5x & -25C - 50D + 25C = 4, \quad \Rightarrow \quad D = 0{,}08, \\ \sin 5x & -25D + 50C + 25D = 0, \quad \Rightarrow \quad C = 0. \end{array}$$

Отже: $y_2^* = 0{,}08\sin 5x$.

Дістанемо загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$y = e^{5x}(C_1 + C_2 x) + e^{-5x}(-x+0{,}1) + 0{,}08\sin 5x$.

Використаємо початкові умови, щоб знайти C_1 та C_2, для цього треба знайти похідну від загального розв'язку:

$y' = 5e^{5x}(C_1 + C_2 x) + e^{5x}\cdot C_2 - 5e^{-5x}(-x+0{,}1) - e^{-5x} + 0{,}4\cos 5x$.

Тоді:

$$\begin{cases} -1{,}9 = C_1 + 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -2, \\ -1{,}1 = 5C_1 + C_2 - 0{,}5 - 1 + 0{,}4, \quad \Rightarrow \quad C_2 = 10. \end{cases}$$

Таким чином, розв'язок задачі Коші має вигляд:

$y = e^{5x}(10x - 2) + e^{-5x}(-x+0{,}1) + 0{,}08\sin 5x$.

Приклад 10. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_t' = -2x + y, \\ y_t' = -3x + 2y. \end{cases}$$

Розв'язання.

Систему лінійних однорідних диференціальних рівнянь першого порядку із сталими коефіцієнтами розв'яжемо зведенням її до одного диференціального рівняння другого порядку. Для цього перше рівняння системи продиференцюємо по t:

$$x_t'' = -2x_t' + y'.$$

Замість y' підставимо праву частину другого рівняння системи:

$$x'' = -2x' + (-3x + 2y).$$

З останнього виразу виключимо змінну y. Для цього використаємо перше рівняння системи:

$$y = x' + 2x.$$

Отже, маємо:

$x'' = -2x' - 3x + 2(x' + 2x)$, або

$x'' - x = 0, \Rightarrow \quad k^2 - 1 = 0, \quad \Rightarrow \quad k^2 = 1, \quad \Rightarrow \quad k = \pm 1 \quad \Rightarrow$

$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t},$

$x' = C_1 e^t - C_2 e^{-t}.$

Тоді,

$y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + 2(C_1 e^t + C_2 e^{-t})$.

Отже, загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \\ y = 3C_1 e^t + C_2 e^{-t}. \end{cases}$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти загальні частинні розв'язки задач:

1) $y'' - 2y' + y = x - 4$;
2) $y'' - 3y' + 2y = 4e^x$;
3) $y'' - 4y' + 13y = 40\cos 3x$;
4) $y'' - 3y' = x^2 - 1$;
5) $y'' + 4y = \sin 2x + \cos 7x$;
6) $y'' + y = x \sin 2x$;
7) $y'' - 6y' + 9y = 3e^{3x}$;
8) $y'' + 16y = 2x^2 - x + 1 + \cos 2x$;
9) $y'' + y' - 12y = (16x + 22)e^{4x}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 5$;
10) $y'' - 2y' + 37y = 36e^x \cos 6x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6$;

11) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + y. \end{cases}$

9. Метод варіації довільних сталих.

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами:

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

де $f(x)$ – будь-яка функція.

Розв'язок цього рівняння буде мати вигляд:

$$y = C_1(x)\, y_1 + C_2(x)\, y_2,$$

де y_1, y_2 – частинні розв'язки відповідного диференціального однорідного рівняння, які знаходимо за таблицею 1, $C_1(x)$, $C_2(x)$ – функції, які є розв'язком системи рівнянь :

$$\begin{cases} C_1'(x)\, y_1 + C_2'(x)\, y_2 = 0, \\ C_1'(x)\, y_1' + C_2'(x)\, y_2' = f(x). \end{cases}$$

Приклад 1. Розв'язати рівняння:

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

Розв'язання.

Знайдемо розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y'' + y = 0, \;\Rightarrow\; k^2 + 1 = 0, \;\Rightarrow\; k^2 = -1, \;\Rightarrow\; k = \pm i, \;\Rightarrow$$
$$\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$
$$y_1 = \cos x, \qquad y_2 = \sin x,$$
$$y_1' = -\sin x, \qquad y_2' = \cos x.$$

Загальний розв'язок початкового рівняння буде мати той же вигляд, що і загальний розв'язок однорідного рівняння, але C_1 та C_2 – не довільні сталі, а деякі функції, які знайдемо із системи рівнянь:

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2'(x) \sin x = 0, \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$$\Delta_{C_1'} = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -tgx; \qquad \Delta_{C_2'} = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1.$$

Тоді $C_1' = \dfrac{\Delta_{C_1'}}{\Delta} = -tgx; \qquad C_2' = \dfrac{\Delta_{C_2'}}{\Delta} = 1.$

Дістанемо функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$:

$C_1(x) = \int -tgx\,dx = ln|\cos x| + C_1^*,$

$C_2(x) = \int dx = x + C_2^*.$

Отже, загальний розв'язок рівняння отримаємо у вигляді:

$y = \left(ln|\cos x| + C_1^*\right)\cos x + \left(x + C_2^*\right)\sin x.$

Приклад 2. Розв'язати рівняння:

$$y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{1 + e^{3x}}.$$

Розв'язання.

Частинні розв'язки відповідного однорідного рівняння $y'' + 5y' + 6y = 0$ з характеристичним рівнянням $k^2 + 5k + 6 = 0 \quad (k_1 = -3; \ k_2 = -2)$ мають вигляд $y_1 = e^{-3x}; \quad y_2 = e^{-2x}$.

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння отримаємо у вигляді $y = C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)e^{-3x}$, де невідомі функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$ задовольняють системі алгебраїчних лінійних рівнянь відносно $C_1(x)$ та $C_2(x)$:

$$\begin{cases} C_1' e^{-3x} + C_2' e^{-2x} = 0, \\ -3C_1' e^{-3x} - 2C_2' e^{-2x} = \dfrac{1}{1 + e^{3x}}. \end{cases}$$

Цю систему розв’яжемо за формулами Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-3x} & e^{-2x} \\ -3e^{-3x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -2e^{-5x} + 3e^{-5x} = e^{-5x}.,$$

$$\Delta C_1' = \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ \frac{1}{1+e^{3x}} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -\frac{e^{-2x}}{1+e^{3x}},$$

$$\Delta C_2' = \begin{vmatrix} e^{-3x} & 0 \\ -3e^{-3x} & \frac{1}{1+e^{3x}} \end{vmatrix} = \frac{e^{-3x}}{1+e^{3x}}.$$

Отже, $C_1' = \dfrac{\Delta C_1'}{\Delta} = -\dfrac{e^{3x}}{1+e^{3x}}$; $\quad C_2' = \dfrac{\Delta C_2'}{\Delta} = \dfrac{e^{2x}}{1+e^{3x}}$.

Проінтегруємо останні два рівняння:

$$C_1 = \int -\frac{e^{3x}dx}{1+e^{3x}} = \left| \begin{matrix} t = 1+e^{3x} \\ dt = 3e^{3x}dx \end{matrix} \right| = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{3} ln|t| + C_1^* = -\frac{1}{3} ln\left|1+e^{3x}\right| + C_1^*.$$

$$C_2 = \int \frac{e^{2x}dx}{1+e^{3x}} = \left| \begin{matrix} e^x = t \\ dt = e^x dx \end{matrix} \right| = \int \frac{tdt}{1+t^3}.$$

Маємо під знаком інтеграла правильний раціональний дріб, який розкладемо на простіші:

$$\frac{t}{t^3+1} = \frac{t}{(t+1)\left(t^2-t+1\right)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1} = \frac{A\left(t^2-t+1\right)+(Bt+C)(t+1)}{(t-1)\left(t^2-t+1\right)}.$$

Звідки, дістанемо :

$$t = A\left(t^2-t+1\right) + Bt(t+1) + C(t+1).$$

$$\begin{array}{r|l} t=-1 & \qquad -1 = 3A, \;\Rightarrow\; A = -1/3, \\ t^2 & \qquad 0 = A+B, \;\Rightarrow\; B = 1/3, \\ t & 1 = -A+B+C, \;\Rightarrow\; C = 1+A-B = 1-1/3-1/3 = 1/3. \end{array}$$

Отже, $C_2 = \displaystyle\int\left(\frac{-1/3}{t+1} + \frac{1/3\,t+1/3}{t^2-t+1}\right) dt = 1/3\left[\int \frac{-dt}{t+1} + \int \frac{(t+1)dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right]$.

Обчислимо окремо

$$\int \frac{t+1}{(t-1/2)^2+\frac{3}{4}}\,dt = \left| \begin{array}{l} t-1/2=z \\ t=z+1/2 \\ dz=dt \end{array} \right| = \int \frac{z+1/2+1}{z^2+3/4}\,dz = \int \frac{z\,dz}{z^2+\frac{3}{4}} + \frac{3}{2}\int \frac{dz}{z^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} z^2+\frac{3}{4}=w \\ dw=2z\,dz \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dw}{w} + \frac{3}{2}\int \frac{dt}{z^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\ln|w| + \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot arctg\,\frac{2z}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|(t-1/2)^2+\frac{3}{4}\right| + \sqrt{3}\,arctg\,\frac{2(t-1/2)}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\ln\left|t^2-t+1\right| + \sqrt{3}\,arctg\,\frac{2(t-1/2)}{\sqrt{3}}.$$

$$C_2 = -\frac{1}{3}\ln\left|e^x+1\right| + \frac{1}{6}\ln\left|e^{2x}-e^x+1\right| + \frac{\sqrt{3}}{3}arctg\frac{2e^x-1}{\sqrt{3}} + C_1^*.$$

Загальний розв’язок лінійного неоднорідного рівняння дістанемо у вигляді

$$y = \left(-\frac{1}{3}\ln\left|1+e^{3x}\right| + C_1^*\right)e^{-2x} + \left(-\frac{1}{3}\ln\left|e^x+1\right| + \frac{1}{6}\ln\left|e^{2x}-e^x+1\right| + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{3}}{3}arctg\frac{2e^x-1}{\sqrt{3}} + C_1^*\right)e^{-3x}.$$

Приклад 3. Розв’язати рівняння:

$$y''+y' = \frac{e^x}{e^x+1}.$$

Розв’язання.

Характеристичне рівняння $k^2+k=0$ відповідного однорідного диференціального рівняння має корені $k_1=0;\ k_2=-1$, тому частинні розв’язки однорідного рівняння $y_1=1;\ \ y_2=e^{-x},\ \Rightarrow\ y_1'=0;\ \ y_2'=-e^{-x}$.

Загальний розв’язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді $y=C_1(x)+C_2(x)e^{-x}$. Для знаходження невідомих функцій $C_1(x)$ та $C_2(x)$ складемо систему:

$$\begin{cases} C_1' + C_2' e^{-x} = 0, \\ -C_2' e^{-x} = \dfrac{e^x}{e^x+1}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = -C_2' e^{-x}, \\ C_2' = \dfrac{e^{2x}}{e^x+1}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = \dfrac{-e^x}{e^x+1}, \\ C_2' = \dfrac{e^{2x}}{e^x+1}. \end{cases}$$

Проінтегруємо кожне з отриманих рівнянь:

$$C_1 = -\int \frac{e^x dx}{e^x+1} = \left| \begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{t+1} = -ln|t+1| + C_1^* = -ln\left|e^x+1\right| + C_1^*$$

$$C_2 = \int \frac{e^{2x}}{e^x+1} = \left| \begin{array}{l} e^x + 1 = t \\ e^x = t-1 \\ dt = e^x dx \end{array} \right| = \int \frac{t-1}{t} dt = \int \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt = t - ln|t| + C_2^* =$$

$$= e^x + 1 - ln\left|e^x+1\right| + C_2^* .$$

Дістанемо загальний розв’язок початкового рівняння:

$$y = -ln\left|e^x+1\right| + C_1^* + \left(e^x + 1 - ln\left|e^x+1\right| + C_2^*\right) e^{-x} .$$

Приклад 4. Розв’язати задачу Коші:

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}, \qquad y(0) = 2; \qquad y'(0) = 4 .$$

Розв’язання.

Частинні розв’язки відповідного однорідного рівняння $y'' - 2y' + y = 0$ мають вигляд $y_1 = e^x;$ $y_2 = x e^x$. Загальний розв’язок початкового рівняння дістанемо у вигляді $y = C_1(x) e^x + C_2(x) x e^x$, де невідомі функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$ задовольняють системі алгебраїчних лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} C_1' e^x + C_2' x e^x = 0, \\ C_1' e^x + C_2' \left(e^x + x e^x\right) = \dfrac{e^x}{x^2+1}, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} C_1' + C_2' x = 0, \\ C_1' + C_2' (1+x) = \dfrac{1}{x^2+1}. \end{cases}$$

Звідки,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & 1+x \end{vmatrix} = 1 + x - x = 1;$$

$$\Delta C_1' = \begin{vmatrix} 0 & x \\ \dfrac{1}{1+x^2} & 1+x \end{vmatrix} = -\frac{x}{1+x^2}; \qquad \Delta C_2' = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \dfrac{1}{1+x^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{1+x^2} \quad \Rightarrow$$

$$C_1' = \frac{\Delta C_1'}{\Delta} = -\frac{x}{1+x^2}; \qquad C_2' = \frac{\Delta C_2'}{\Delta} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Знаходимо

$$C_1 = \int -\frac{x\,dx}{1+x^2} = -\frac{1}{2} ln\left|1+x^2\right| + C_1^*, \qquad C_2 = \int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C_2^*.$$

Отже, загальний розв’язок неоднорідного рівняння має вигляд :

$$y = \left(-\frac{1}{2} ln\left|1+x^2\right| + C_1^*\right)e^x + \left(arctgx + C_2^*\right)xe^x,$$

$$y' = \left(-\frac{1}{2} ln\left|1+x^2\right| + C_1^*\right)e^x - \frac{x}{1+x^2}e^x + \left(arctgx + C_2^*\right)xe^x + \left(arctg + C_2^x\right)e^x +$$

$$+\frac{x}{1+x^2}e^x = \left(-\frac{1}{2} ln\left|1+x^2\right| + C_1^*\right)e^x + \left(arctgx + C_2^*\right)\cdot e^x(1+x).$$

Використаємо початкові умови:

$$\begin{cases} 2 = C_1^*, \\ 4 = C_1^* + C_2^*, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1^* = 2, \\ C_2^* = 2. \end{cases}$$

Розв’язок задачі Коші має вигляд:

$$y = \left(-\frac{1}{2} ln\left|1+x^2\right| + 2\right)e^x + \left(arctgx + 2\right)xe^x.$$

Завдання для самостійного розв’язування

Знайти загальні розв’язки наступних диференціальних рівнянь.

1) $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{cos\,2x}}$.

2) $y'' + 25y = \dfrac{cos^2 5x}{sin^3 5x}$.

3) $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{x^4}$.

4) $y'' + 16y = \dfrac{1}{cos^3 4x}$.

5) $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{9x^2 + 6x + 2}{x^3}$.

Література

1. Вища математика: основні означення, приклади і задачі: У двох книгах/ За редакцією Г.Л.Кулініча та І.П.Васильченка.- К.: Либідь, 1994.

2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.- К.: Вища школа, 1993.

3. Богомолов М.В. Практичні заняття з математики.- К.: Вища школа, 1979.

4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1.- М.:Наука, 1976.

5. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа.- М.: Наука, 1975.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Кадильникова Тетяна Михайлівна
Щербина Ірина Володимирівна
Хорошманенко Павло Григорович

ВИЩА МАТЕМАТИКА
В ПРИКЛАДАХ ТА ЗАДАЧАХ

Частина IV

Навчальний посібник

Тем. план 2010, поз. 252

Підписано до друку 27.10.2010.Формат 60х84 $_{1/16}$ Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид.арк.5,65. Умов.друк арк.5,58. Тираж 100 пр. Замовлення № .

Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпропетровськ – 5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно- видавничий відділ НМетАУ