МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

В.Л. КОПОРУЛІН, І.Л. ШИНКОВСЬКА,
І.П. ЗАЄЦЬ, Л.Ф. СУШКО

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина IV

**Друкується за Планом навчальної та методичної літератури,
затвердженим Вченою радою НМетАУ
Протокол № 1 від 27.01.2017**

Дніпро НМетАУ 2017

УДК 517(07)
Вища математика. Частина 4 (російською мовою): Навч. посібник / Укл.: В.Л. Копорулін, І.Л. Шинковська, І.П. Заєць, Л.Ф. Сушко. – Дніпро: НМетАУ, 2017. – 92 с.

Четверта частина навчального посібника є продовженням серії «Бібліотека іноземного студента» і містить матеріал по розділам: «Визначений інтеграл», «Невласні інтеграли» та «Застосування визначеного інтеграла до розв'язування деяких задач геометрії». Приводяться основні теоретичні відомості, ілюструється геометричний зміст введених понять. Викладення теоретичних положень супроводжується докладним рішенням майже 150 типових задач.

Посібник призначений для іноземних студентів спеціальності 136 – металургія та інших спеціальностей усіх форм навчання.

Іл. 24. Бібліогр.: 8 найм.

Друкується за авторською редакцією

Відповідальний за випуск В.Л. Копорулін, канд. техн. наук, доц.

Рецензенти: Т.С. Кагадій, д-р фіз.-мат. наук, проф. (НГУ)
А.В. Сясєв, канд. фіз.-мат. наук, доц. (ДНУ)

© Національна металургійна академія України, 2017
© Копорулін В.Л., Шинковська І.Л., Заєць І.П., Сушко Л.Ф., 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая часть учебного пособия посвящена изучению понятия определенного интеграла. Это понятие является крайне важным в высшей математике, так как к определенному интегралу сводятся интегралы других типов (кратные, криволинейные, поверхностные) и он находит широкое применение в фундаментальных и прикладных исследованиях. Исходя из этого, авторы ставят задачу: помочь студентам приобрести навыки вычисления определенного интеграла, уметь решать прикладные задачи с его использованием. Несобственные интегралы, как правило, не очень подробно изучаются в имеющейся литературе, поэтому подробное и доходчивое решение примеров по их вычислению и исследованию на сходимость, по мнению авторов, поможет студентам разобраться в этом материале. В пособии рассматривается одно из приложений определенного и несобственных интегралов – задачи геометрического содержания. При решении задач на вычисление площади плоской фигуры, длины дуги плоской кривой, нахождению объема тела вращения и площади поверхности вращения авторами уделяется большое внимание умению выполнить грамотный рисунок. Для закрепления материала и отработки навыков решения задач в конце каждого параграфа приводятся задачи для самостоятельного решения студентами.

Словарь математических терминов и словосочетаний на французском и английском языках традиционно приведен в конце пособия.

Авторы надеются, что данное пособие будет полезным для всех студентов, изучающих математику, в их самостоятельной работе по подготовке к практическим занятиям, модульному и экзаменационному контролю.

1. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Понятие определенного интеграла. Условия интегрируемости функций. Классы интегрируемых функций

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$ $(a < b)$. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n произвольных частей так, чтобы

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b\,.$$

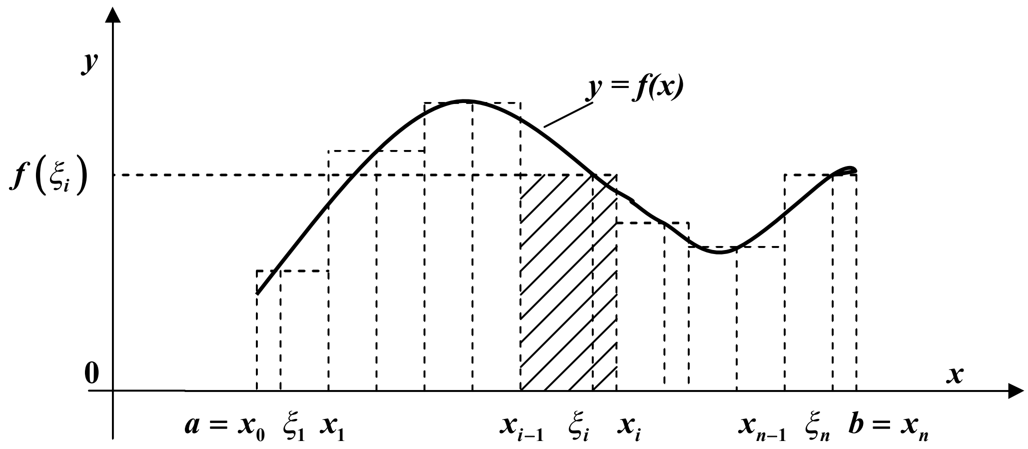


Рис. 1.1

Длины частичных отрезков обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 0,1,\ldots,n-1)$. Произвольным образом на каждом из частичных отрезков выберем точки $\xi_i \in [x_{i-1};x_i]$. Составим сумму $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$, которая называется ***интегральной суммой*** функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ (рис. 1.1.).

В силу произвольности разбиения отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки и выбора точек ξ_i для всякой функции $f(x)$ можно составить бесконечно много различных интегральных сумм σ_n. При этом все эти интегральные суммы имеют один и тот же предел при $\lambda = \max\Delta x_i \to 0$ $(0 \le i \le n-1)$. Этот предел называется ***определенным интегралом*** функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx\,.$$

Числа a и b называют соответственно ***нижним*** и ***верхним пределами*** интегрирования, функция $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией***,

$f(x)dx$ – ***подынтегральным выражением***, x – ***переменной интегрирования***. Отрезок $[a;b]$ принято называть ***отрезком*** или ***промежутком интегрирования***.

Функция $f(x)$, для которой на отрезке $[a;b]$ существует определенный интеграл, называется ***интегрируемой*** на этом отрезке.

Геометрический смысл определенного интеграла состоит в том, что определенный интеграл от неотрицательной, интегрируемой на $[a;b]$ функции $y=f(x)$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком этой функции, отрезками прямых $x=a$ и $x=b$ и осью абсцисс Ox (рис. 1.2).

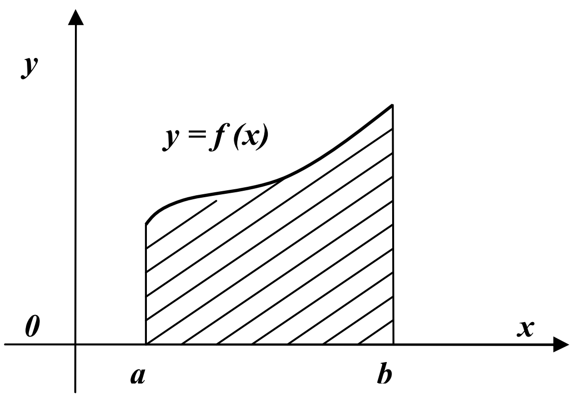


Рис. 1.2

Приведем следующие утверждения.

Теорема 1. Если функция $y=f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Значит, ограниченность функции на отрезке $[a;b]$ является ***необходимым условием*** существования определенного интеграла этой функции.

Теорема 2. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Стало быть, непрерывность функции на отрезке является ***достаточным условием*** существования определенного интеграла этой функции.

Теорема 3. Если функция $y=f(x)$ определена и монотонна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Теорема 4. Если функция $y=f(x)$ ограничена на $[a;b]$ и непрерывна во всех точках этого отрезка, за исключением конечного числа точек, где функция имеет разрыв первого рода (см. часть 2, п. 3.2), то эта функция интегрируема на отрезке $[a;b]$.

1.2. Свойства определенного интеграла

Рассмотрим наиболее важные свойства определенного интеграла.

1. Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

2. Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

3. Для любого постоянного числа C справедливо равенство:

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx.$$

4. При перестановке местами пределов интегрирования определенный интеграл меняет свой знак, то есть:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

5. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$, то функция $f(x) \pm g(x)$ также интегрируема на этом отрезке, причем

$$\int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

6. Если функция $f(x)$ интегрируема на наибольшем из отрезков $[a;b]$, $[a;c]$, $[c;b]$, то она интегрируема и на двух других, и для произвольного расположения точек a,b,c имеет место равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Приведем свойства, позволяющие делать оценку определенного интеграла.

7. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ $(a < b)$ и всюду на этом отрезке $f(x) \geq 0$, то

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0.$$

Аналогично имеем, что $\int_a^b f(x)dx \le 0$, если $f(x) \le 0$ на $[a;b]$.

8. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$ $(a<b)$ и всюду на этом отрезке $f(x) \ge g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx.$$

9. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ $(a<b)$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на этом отрезке, причем

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

10. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ и m и M – соответственно ее наименьшее и наибольшее значения на этом отрезке, то справедливо неравенство:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Это утверждение называется ***первой теоремой о среднем значении*** определенного интеграла.

11. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то существует точка $c \in [a;b]$ такая, что верно равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a).$$

Число $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ называется ***средним значением*** определенного интеграла, а утверждение носит название ***второй теоремы о среднем***.

12. Если функция $f(t)$ непрерывна на $[a;b]$, то производная определенного интеграла по переменному верхнему пределу равна

подынтегральной функции, у которой вместо переменной интегрирования подставлен верхний предел:

$$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x),\ x\in[a;b].$$

Это утверждение носит название ***теоремы Барроу***.

Как видим, интеграл с переменным верхним пределом является первообразной для функции $f(x)$.

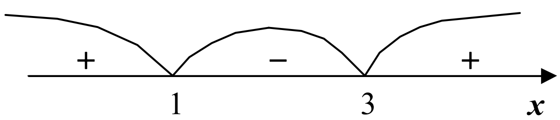
Пример 1.2.1. Определить знак интеграла, не вычисляя его:

а) $\int_{\pi/2}^{\pi} x\sin x dx$; б) $\int_1^2 (x^2-4x+3)dx$.

Решение

а) Известно, что для всех $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ имеет место неравенство: $\sin x\geq 0$. Тогда функция $f(x)=x\sin x\geq 0$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$. По свойству 7 получим, что $\int_{\pi/2}^{\pi} x\sin x dx\geq 0$.

б) Рассмотрим функцию $f(x)=x^2-4x+3$. Найдем промежутки знакопостоянства этой функции. Для этого определим нули функции: $x^2-4x+3=0\Rightarrow x_1=1,\ x_2=3$.



Как видим, на отрезке $[1;2]$ функция принимает отрицательные значения или ноль. На основании свойства 7 можно сделать вывод, что $\int_1^2 (x^2-4x+3)dx\leq 0$.

Пример 1.2.2. Выяснить (без вычислений), какой из интегралов больше:

а) $\int_1^{14} x^{10}dx$ или $\int_1^{14} x^7 dx$; б) $\int_{\pi/6}^{\pi/4}\cos^5 xdx$ или $\int_{\pi/6}^{\pi/4}\cos^3 xdx$.

Решение

а) Так как на отрезке $[1;14]$ верно, что $x^{10} \geq x^7$, то, в силу свойства 8, получим: $\int\limits_1^{14} x^{10}dx > \int\limits_1^{14} x^7 dx$.

б) На отрезке $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right]$справедливо неравенство: $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, тогда $cos^3 x > \cos^5 x$. Применяя свойство 8, получим, что $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \cos^3 xdx > \int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \cos^5 xdx$.

Пример 1.2.3. Не вычисляя, сравнить интегралы:

а) $\int\limits_3^7 \left(x^2+2\right)^{11} dx$ и $\int\limits_3^{10} \left(x^2+2\right)^{11} dx$; б) $\int\limits_{-11}^{15} x^5 e^{x^2} dx$ и $\int\limits_0^{15} x^5 e^{x^2} dx$.

Решение

а) Используя свойство 6, представим интеграл по большему промежутку интегрирования в виде суммы двух интегралов:

$$\int\limits_3^{10} \left(x^2+2\right)^{11} dx = \int\limits_3^7 \left(x^2+2\right)^{11} dx + \int\limits_7^{10} \left(x^2+2\right)^{11} dx.$$

Для любого x верно неравенство: $x^2+2>0$. Тогда $\left(x^2+2\right)^{11}>0$ и, по свойству 8, все три интеграла принимают только положительные значения. Значит, $\int\limits_3^{10} \left(x^2+2\right)^{11} dx > \int\limits_3^7 \left(x^2+2\right)^{11} dx$.

б) Поступим аналогично предыдущему примеру. $\int\limits_{-11}^{15} x^5 e^{x^2} dx = \int\limits_{-11}^{0} x^5 e^{x^2} dx + \int\limits_0^{15} x^5 e^{x^2} dx$. Функция $y = x^5 e^{x^2}$ на отрезке $[-11;0]$ принимает неположительные значения, а на отрезке $[0;15]$ – неотрицательные. По свойству 7 получим, что $\int\limits_{-11}^{0} x^5 e^{x^2} dx \leq 0$, $\int\limits_0^{15} x^5 e^{x^2} dx \geq 0$. Тогда по свойству 8: $\int\limits_{-11}^{15} x^5 e^{x^2} dx \leq \int\limits_0^{15} x^5 e^{x^2} dx$.

Пример 1.2.4. Оценить интегралы:

а) $\int\limits_0^5 \left(4x^2-3\right)dx$; б) $\int\limits_0^1 \sqrt{9+x^2}dx$; в) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{dx}{7-4cos^2 x}$; г) $\int\limits_{-1}^{4} \frac{dx}{8+x^4}$.

Решение

а) Подынтегральная функция $y=4x^2-3$ на отрезке $\left[0;5\right]$ непрерывна и возрастает. Значит, она ограничена на этом отрезке и принимает свое наименьшее значение в точке $x=0$, а наибольшее – в точке $x=5$. Найдем эти значения: $m=y(0)=-3$, $M=y(5)=97$, $b-a=5$. По свойству 10 получим:

$$-3\cdot 5\le\int\limits_0^5 \left(4x^2-3\right)dx\le 97\cdot 5 \quad \text{или} \quad -15\le\int\limits_0^5 \left(4x^2-3\right)dx\le 485.$$

б) Функция $y=\sqrt{9+x^2}$ монотонно возрастает на отрезке $\left[0;1\right]$. Заметим, что $9\le 9+x^2\le 10$ для $x\in\left[0;1\right]$. Тогда справедливо неравенство: $3\le\sqrt{9+x^2}\le\sqrt{10}$. Откуда заключаем, что $m=3$, $M=\sqrt{10}$, $b-a=1$. По свойству 10 сделаем оценку интеграла: $3\le\int\limits_0^1 \sqrt{9+x^2}dx\le\sqrt{10}$.

в) Известно, что для $x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$ верно неравенство: $0\le\cos x\le\frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда $0\le\cos^2 x\le\frac{3}{4}$, откуда $0\le 4\cos^2 x\le 3$, значит $4\le 7-4\cos^2 x\le 7$. Получили: $m=4$, $M=7$, $b-a=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$. Используя свойство 10, можем записать:

$$\frac{4\pi}{3}\le\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{dx}{7-4\cos^2 x}\le\frac{7\pi}{3}.$$

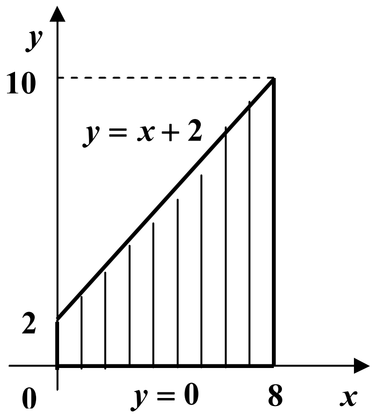
г) Подынтегральная функция $y=\frac{1}{8+x^4}$ не монотонна на отрезке $\left[-1;4\right]$. Найдем ее наименьшее и наибольшее значения на этом отрезке с помощью производной: $y'=-\frac{1}{\left(8+x^4\right)^2}\cdot 4x^3=-\frac{4x^3}{\left(8+x^4\right)^2}$. Функция имеет одну критическую точку $x=0\in\left[-1;4\right]$. Вычислим значения функции в критической точке и на концах отрезка: $y(0)=\frac{1}{8}$, $y(-1)=\frac{1}{9}$, $y(4)=\frac{1}{264}$. Таким образом, $m=\frac{1}{264}$, $M=\frac{1}{8}$, $b-a=5$. Оценка интеграла запишется так: $\frac{5}{264}\le\int\limits_{-1}^{4}\frac{dx}{8+x^4}\le\frac{5}{8}$.

Пример 1.2.5. Найти средние значения функций на заданных отрезках:

а) $f(x)=x+2$, $[0;8]$; б) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$, $[-2;2]$.

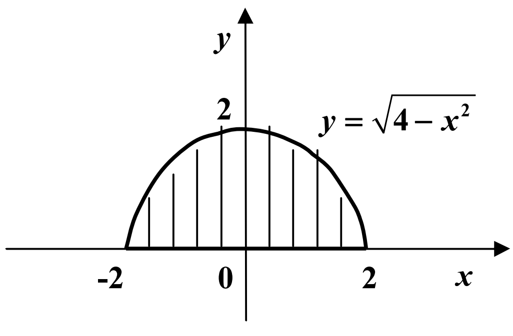
Решение

а) По свойству 11 среднее значение функции $f(x)=x+2$ на отрезке $[0;8]$ равно: $f(c)=\frac{1}{8-0}\cdot\int\limits_{0}^{8}(x+2)dx$. Для вычисления интеграла используем его геометрический смысл и найдем площадь фигуры, ограниченной прямыми $y=x+2$, $x=0$, $x=8$ и осью Ox:



Искомый интеграл численно равен площади трапеции с основаниями 2 и 10 единиц и высотой 8 единиц: $S=\frac{2+10}{2}\cdot 8=48$ (кв.ед.). Тогда находим среднее значение функции $f(c)=\frac{48}{4}=12$.

б) Среднее значение функции определяется так: $f(c)=\frac{1}{4}\int\limits_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx$, где интеграл $\int\limits_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx$ численно равен площади полукруга с центром в точке



$(0;0)$ и радиусом $R=2$. Вычислим эту площадь: $S=\frac{1}{2}\pi R^2=\frac{1}{2}\cdot 4\pi=2\pi$ (кв.ед.). Тогда $\int\limits_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx=2\pi$. Находим среднее значение функции $f(c)=\frac{1}{4}\cdot 2\pi=\frac{\pi}{2}$.

Задания для самостоятельной работы

1. Определить, не вычисляя, знак интеграла:

а) $\int\limits_{-1}^{2} x^3 dx$; б) $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$; в) $\int\limits_{0}^{\pi} x\cos x dx$.

2. Сравнить интегралы:

а) $\int\limits_{-3}^{1} \left(2x^2+3x+5\right)dx$ и $\int\limits_{-3}^{1} \left(x^2+x+8\right)dx$; б) $\int\limits_{1}^{2} e^{x^2} dx$ и $\int\limits_{1}^{2} e^{x} dx$;

в) $\int\limits_{1}^{7} \left(x-15\right)^{13} dx$ и $\int\limits_{1}^{3} \left(x-15\right)^{13} dx$; г) $\int\limits_{-16}^{-4} x^9 \sin^2 x dx$ и $\int\limits_{-16}^{4} x^9 \sin^2 x dx$.

3. Оценить интегралы:

а) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$; б) $\int\limits_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}\, x dx$;

в) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x}\, dx$; г) $\int\limits_{12}^{18} \frac{\cos^2 x\, dx}{1+x^8}$.

4. Найти средние значения функций на заданных отрезках:

а) $f\left(x\right)=x^2$, $\left[4;5\right]$; б) $f\left(x\right)=x^3+2x-1$, $\left[0;1\right]$;

в) $f\left(x\right)=\frac{1}{x^2+x}$, $\left[1;\frac{3}{2}\right]$; г) $f\left(x\right)=\sin^2 x$, $\left[0;\pi\right]$.

1.3. Методы вычисления определенного интеграла

1.3.1. Формула Ньютона-Лейбница

Пусть $F\left(x\right)$ – какая-либо первообразная для непрерывной функции $f\left(x\right)$, заданной на $\left[a;b\right]$. Тогда справедлива формула:

$$\int\limits_{a}^{b} f\left(x\right)dx = F\left(x\right)\Big|_{a}^{b} = F\left(b\right)-F\left(a\right).$$

Эта формула называется ***формулой Ньютона-Лейбница***. Она связывает определенный интеграл с первообразной ее подынтегральной функции и, тем самым, дает исключительно удобный способ вычисления определенного интеграла.

Установленная выше связь определенного и неопределенного интегралов сводит, по сути дела, вычисление определенного интеграла к нахождению неопределенного интеграла и подстановке соответствующих пределов интегрирования. Следовательно, все изученные ранее методы нахождения интегралов могут быть применены к определенному интегралу. Рассмотрим применение формулы Ньютона-Лейбница на примерах.

Пример 1.3.1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$; б) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$; в) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{cos^2 x}$; г) $\int\limits_0^2 \left(x^3+3^x\right)dx$;

д) $\int\limits_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2-1}$; е) $\int\limits_2^3 \left(1+2x+3x^2\right)dx$; ж) $\int\limits_1^8 \frac{2+5\sqrt[3]{x}}{x^3}dx$.

Решение

а) Одной из первообразных функции $f(x)=\frac{1}{1+x}$ есть функция $F(x)=\ln|1+x|$. Вычислим ее значения при верхнем и нижнем пределах интегрирования: $F(1)=\ln|1+1|=\ln 2$, $F(0)=\ln|1+0|=\ln 1=0$. По формуле Ньютона-Лейбница значение интеграла I будет равно

$$I=\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}=F(1)-F(0)=\ln 2-0=\ln 2.$$

Решение обычно записывают следующим образом:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}=\ln|1+x|\,\Bigg|_0^1=\ln|1+1|-\ln|1+0|=\ln 2-\ln 1=\ln 2-0=\ln 2.$$

$$\text{б) }\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\ln|\,x+\sqrt{x^2+1}\,|\,\Bigg|_0^{\sqrt{3}}=\ln|\,\sqrt{3}+\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1}\,|-\ln|\,0+\sqrt{0^2+1}\,|=$$

$$=\ln\left(\sqrt{3}+2\right)-\ln 1=\ln\left(\sqrt{3}+2\right).$$

$$\text{в) }\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x\,\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/4}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=1-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{г) }\int\limits_0^2 \left(x^3+3^x\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{3^x}{\ln 3}\right)\Bigg|_0^2=\left(\frac{2^4}{4}+\frac{3^2}{\ln 3}\right)-\left(\frac{0^4}{4}+\frac{3^0}{\ln 3}\right)=4+\frac{8}{\ln 3}.$$

д) $\int\limits_{-3}^{-2}\frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_{-3}^{-2}=\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{-3}{-1}\right|-\ln\left|\frac{-4}{-2}\right|\right)=\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 2)=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

е) $\int\limits_{2}^{3}\left(1+2x+3x^2\right)dx=\left(x+2\cdot\frac{x^2}{2}+3\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_2^3=\left(x+x^2+x^3\right)\Bigg|_2^3=$

$=\left(3+3^2+3^3\right)-\left(2+2^2+2^3\right)=39-14=25$.

ж) $\int\limits_{1}^{8}\frac{2+5\sqrt[3]{x}}{x^3}dx=\int\limits_{1}^{8}\frac{2+5x^{1/3}}{x^3}dx=\int\limits_{1}^{8}\left(2x^{-3}+5x^{-8/3}\right)dx=\left(2\cdot\frac{x^{-2}}{-2}+5\cdot\frac{x^{-5/3}}{-5/3}\right)\Bigg|_1^8=$

$=\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{3}{\sqrt[3]{x^5}}\right)\Bigg|_1^8=\left(-\frac{1}{8^2}-\frac{3}{\sqrt[3]{8^5}}\right)-\left(-\frac{1}{1^2}-\frac{3}{\sqrt[3]{1^5}}\right)=-\frac{1}{64}-\frac{3}{32}+1+3=3\frac{57}{64}$.

Пример 1.3.2. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{2}^{5}\frac{dx}{2x-3}$; б) $\int\limits_{0}^{\pi/8}ctg\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx$; в) $\int\limits_{2}^{13}\frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$;

г) $\int\limits_{0}^{\pi}\left(2x+sin\frac{x}{3}\right)dx$; д) $\int\limits_{1}^{2}\left(e^{2x-2}-\frac{3}{(3x-1)^4}\right)dx$.

Решение

Для нахождения первообразных в данных примерах воспользуемся свойством неопределенного интеграла: $\int f(kx+b)dx=\frac{1}{k}F(kx+b)+C$, где k и b – постоянные (см. часть 3, п. 1.2).

а) $\int\limits_{2}^{5}\frac{dx}{2x-3}=\frac{1}{2}\ln|2x-3|\Bigg|_2^5=\frac{1}{2}(\ln 7-\ln 1)=\frac{1}{2}\ln 7$.

б) $\int\limits_{0}^{\pi/8}ctg\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx=\frac{1}{2}\ln\left|\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\Bigg|_0^{\pi/8}=\frac{1}{2}\left(\ln\sin\frac{\pi}{2}-\ln\sin\frac{\pi}{4}\right)=$

$=\frac{1}{2}\left(\ln 1-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{\sqrt{2}}=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}=\ln\sqrt[4]{2}$.

в) $\int\limits_{2}^{13}\frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}=\int\limits_{2}^{13}(3-x)^{-\frac{4}{5}}dx=-1\cdot\frac{(3-x)^{\frac{1}{5}}}{1/5}\Bigg|_2^{13}=-5\cdot\sqrt[5]{3-x}\Bigg|_2^{13}=$

$$=-5\left(\sqrt[5]{3-13}-\sqrt[5]{3-2}\right)=5\left(\sqrt[5]{10}+1\right).$$

$$\text{г)}\int_0^{\pi}\left(2x+\sin\frac{x}{3}\right)dx=2\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\pi}+3\left(-\cos\frac{x}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\left(\pi^2-0\right)-3\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos 0\right)=$$

$$=\pi^2-3\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)=\pi^2+\frac{3}{2}.$$

$$\text{д)}\int_1^{2}\left(e^{2x-2}-\frac{3}{\left(3x-1\right)^4}\right)dx=\frac{1}{2}e^{2x-2}\Bigg|_1^{2}-3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(3x-1\right)^{-3}}{-3}\Bigg|_1^{2}=$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x-2}\Bigg|_1^{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(3x-1\right)^3}\Bigg|_1^{2}=\frac{1}{2}\left(e^2-e^0\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5^3}-\frac{1}{2^3}\right)=\frac{1}{2}e^2-\frac{39}{1000}.$$

Пример 1.3.3. Вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int_2^5\frac{dx}{x^2+2x+10}$; б) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^2 x dx$; в) $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2}\frac{t^2+1}{t^2-1}dt$; г) $\displaystyle\int_{-2}^{-1}\frac{\left(x+1\right)dx}{x^3-x^2}$.

Решение

а) Для нахождения первообразной выделим в знаменателе дроби полный квадрат:

$$\int_2^5\frac{dx}{x^2+2x+10}=\int_2^5\frac{dx}{x^2+2x+1+9}=\int_2^5\frac{dx}{\left(x+1\right)^2+9}=\frac{1}{3}arctg\frac{x+1}{3}\Bigg|_2^5=$$

$$=\frac{1}{3}\left[arctg\frac{5+1}{3}-arctg\frac{2+1}{3}\right]=\frac{1}{3}\left(arctg2-arctg1\right)=\frac{1}{3}\left(arctg2-\frac{\pi}{4}\right).$$

б) Первообразную можно найти, используя формулу понижения степени: $\cos^2 x=\frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right)$. Тогда будем иметь:

$$\int_0^{\pi/2}\cos^2 x dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(1+\cos 2x\right)dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\cdot\pi}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(0+\frac{1}{2}\sin\left(2\cdot 0\right)\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi-\frac{1}{2}\sin 0\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

в) Подынтегральное выражение представляет собой неправильную алгебраическую дробь. Выделим в этой дроби целую часть и проинтегрируем полученную сумму:

$$\int_{-1/2}^{1/2}\frac{t^2+1}{t^2-1}dt=\int_{-1/2}^{1/2}\frac{t^2-1+2}{t^2-1}dt=\int_{-1/2}^{1/2}\left(1+\frac{2}{t^2-1}\right)dt=t\Big|_{-1/2}^{1/2}+2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{-1/2}^{1/2}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ln\left|\frac{-1/2}{3/2}\right|-\ln\left|\frac{-3/2}{1/2}\right|=1+\ln\frac{1}{3}-\ln 3=1+\ln\frac{1}{9}=1-\ln 9.$$

г) Заметим, что подынтегральная функция представляет собой правильную дробь $\frac{x+1}{x^3-x^2}$. Для нахождения первообразной разложим эту дробь на сумму элементарных дробей, а именно:

$$\frac{x+1}{x^3-x^2}=\frac{x+1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-1}.$$

Избавившись от знаменателя, получим:

$$x+1=A(x-1)+Bx(x-1)+Cx^2.$$

Используя тождественное равенство многочленов в левой и правой частях, придем к системе уравнений, из которой найдем неизвестные коэффициенты A, B и C:

$$\begin{array}{r|l} x=0 & 1=-A \quad\Rightarrow\quad A=-1, \\ x=1 & 2=C\Rightarrow C=2, \\ x^2 & 0=B+C\Rightarrow B=-2. \end{array}$$

Получим следующее представление дроби: $\frac{x+1}{x^3-x^2}=\frac{-1}{x^2}+\frac{-2}{x}+\frac{2}{x-1}$.

Для вычисления исходного интеграла остается почленно проинтегрировать полученную сумму:

$$\int_{-2}^{-1}\frac{(x+1)dx}{x^3-x^2}=\int_{-2}^{-1}\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+\frac{2}{x-1}\right)dx=\left(\frac{1}{x}-2\ln|x|+2\ln|x-1|\right)\Bigg|_{-2}^{-1}=$$

$$=\left[\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)^2\right]\Bigg|_{-2}^{-1}=\left[-\frac{1}{1}+\ln\left(\frac{-1-1}{-1}\right)^2\right]-\left[-\frac{1}{2}+\ln\left(\frac{-2-1}{-2}\right)^2\right]=$$

$$=(-1+\ln 4)-\left(-\frac{1}{2}+\ln\frac{9}{4}\right)=-\frac{1}{2}+\ln 4-\ln\frac{9}{4}=-\frac{1}{2}+\ln\frac{16}{9}.$$

<u>Замечание 1.</u> Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[-a;a]$ и является четной на этом отрезке, т.е. $f(-x)=f(x)$, то справедливо тождество: $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$.

<u>Замечание 2.</u> Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[-a;a]$ и является нечетной на этом отрезке, т.е. $f(-x)=-f(x)$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Пример 1.3.4. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} x\cos 3x dx$; б) $\int\limits_{-3}^{3}\left(x^4-2\right)dx$.

Решение

а) Подынтегральная функция $f(x)=x\cos 3x$ является нечетной, так как $f(-x)=-x\cdot\cos(-3x)=-x\cos 3x=-f(x)$. Тогда на симметричном отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ интеграл равен нулю: $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} x\cos 3x dx = 0$.

б) Функция $f(x)=x^4-2$ четна на отрезке $[-3;3]$, так как $f(-x)=(-x)^4-2=x^4-2=f(x)$. Будем иметь:

$$\int\limits_{-3}^{3}\left(x^4-2\right)dx = 2\int\limits_{0}^{3}\left(x^4-2\right)dx = 2\left(\frac{x^5}{5}-2x\right)\Bigg|_0^3 = 2\left(\frac{243}{5}-6\right)=\frac{426}{5}=85{,}2.$$

<u>Замечание 3.</u> Формулу Ньютона-Лейбница можно применять только в случае, когда подынтегральная функция на заданном отрезке интегрирования непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода. Если же на отрезке интегрирования она имеет хотя бы одну точку разрыва второго рода (см. часть 2, п.3.2), то формулу применять нельзя.

Пример 1.3. 5. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$.

Решение

Применяя формулу Ньютона-Лейбница, получим результат: $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=-1-1=-2$, который противоречит свойству 7, согласно которому определенный интеграл от неотрицательной на всем промежутке интегрирования функции $y=\frac{1}{x^2}$ не может быть отрицательным (см.п.1.2). Дело в том, что наша подынтегральная функция в точке $x=0\in[-1;1]$ имеет разрыв второго рода, поэтому формула Ньютона-Лейбница не применима.

Задания для самостоятельной работы

Вычислить интегралы:

1. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$. 2. $\int\limits_{2}^{6}\sqrt{x-2}dx$. 3. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/6}\frac{dx}{\sin^2 x}$. 4. $\int\limits_{2}^{6}\frac{dx}{x^2-25}$.

5. $\int\limits_{0}^{2}3^x dx$. 6. $\int\limits_{0}^{3\sqrt{3}/2}\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$. 7. $\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{4+3x}$. 8. $\int\limits_{2}^{4}\frac{dx}{(2x-3)^2}$.

9. $\int\limits_{2}^{2}\frac{dx}{5^{2x-3}}$. 10. $\int\limits_{1}^{5}\frac{x^2dx}{1+x^2}$. 11. $\int\limits_{1}^{e}\frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx$. 12. $\int\limits_{\pi/18}^{\pi/9}\frac{dx}{\sin 6x}$.

13. $\int\limits_{0}^{\pi/6}\mathrm{tg}\frac{3x}{2}dx$. 14. $\int\limits_{0}^{\pi/6}\sin^2 2xdx$. 15 $\int\limits_{0}^{\pi/6}\sin 2x\cos 8xdx$.

16. $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$. 17. $\int\limits_{0}^{1/2}\frac{x^3dx}{x^2-3x+2}$. 18. $\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3}x^3\,\mathrm{ctg}^4\frac{x}{5}dx$.

1.3.2. Замена переменной в определенном интеграле

Пусть $f(x)$ – непрерывная на $[a;b]$ функция, а $x=\varphi(t)$ – непрерывно дифференцируемая на $[\alpha;\beta]$ функция такая, что переменная $x=\varphi(t)$

принимает все свои значения от a до b, причем $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$. Тогда справедлива формула замены переменной:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt \qquad (1.1)$$

Таким образом, для вычисления определенного интеграла нужно ввести замену $x=\varphi(t)$ и найти новые пределы интегрирования $\alpha=\varphi^{-1}(a)$, $\beta=\varphi^{-1}(b)$.

Иногда удобнее использовать так называемую «обратную» подстановку $\psi(x)=t$. При этом функция $\psi(x)$ должна быть непрерывно дифференцируемой и строго монотонной на отрезке $[a;b]$. Тогда существует функция $x=\varphi(t)$, обратная функции $t=\psi(x)$. В этом случае имеем:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f\left(\psi^{-1}(t)\right)\cdot\left(\psi^{-1}(t)\right)'dt \qquad (1.2)$$

Новые пределы интегрирования находят так: $\alpha=\psi(a),\beta=\psi(b)$.

Обратим внимание на то, что в отличие от замены переменной в неопределенном интеграле, замена переменной в определенном интеграле не требует возврата к первоначальной переменной.

Пример 1.3.6. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; б) $\int\limits_{\pi^3/27}^{\pi^3}\frac{\sin\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}}$; в) $\int\limits_0^1\frac{1+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+x}dx$.

Решение

Сделаем замену переменной и применим формулу (1.1):

а) $\int\limits_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\left|\begin{matrix}x=t^2,\sqrt{x}=t, & x=0\Rightarrow t=0\\ dx=2t\,dt, & x=4\Rightarrow t=2\end{matrix}\right|=\int\limits_0^2\frac{2tdt}{1+t}=2\int\limits_0^2\frac{(t+1)-1}{1+t}dt=$

$=2\int\limits_0^2\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=2\left(t-\ln|1+t|\right)\Big|_0^2=2(2-\ln 3)-2(0-\ln 1)=4-2\ln 3$.

б) $\int\limits_{\pi^3/27}^{\pi^3}\frac{\sin\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}}=\left|\begin{matrix}x=t^3, dx=3t^2dt, & x=\pi^3/27\Rightarrow t=\pi/3\\ \sqrt[3]{x}=t,\sqrt[3]{x^2}=t^2, & x=\pi^3\Rightarrow t=\pi\end{matrix}\right|=\int\limits_{\pi/3}^{\pi}\frac{\sin t\cdot 3t^2dt}{t^2}=$

$$= 3\int\limits_{\pi/3}^{\pi} \sin t dt = -3\cos t\Bigg|_{\pi/3}^{\pi} = -3\left(\cos\pi - \cos\frac{\pi}{3}\right) = -3\left(-1-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}.$$

в) $\int\limits_0^1 \frac{1+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+x}dx = \left|\begin{matrix} x = t^4,\ dx = 4t^3dt, & x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ \sqrt{x} = t^2,\ \sqrt[4]{x} = t, & x = 1 \Rightarrow t = 1 \end{matrix}\right| = \int\limits_0^1 \frac{1+t}{t^2+t^4}\cdot 4t^3dt =$

$$= 4\int\limits_0^1 \frac{(1+t)t}{1+t^2}dt = 4\int\limits_0^1 \frac{t+t^2}{1+t^2}dt = 4\int\limits_0^1 \frac{(1+t^2)+t-1}{1+t^2}dt = 4\int\limits_0^1 \left(1+\frac{t}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= 4\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right| - \operatorname{arctg} t\right)\Bigg|_0^1 = 4\left(1+\frac{1}{2}\ln 2 - arc\operatorname{tg}1\right) - 4\left(0+\frac{1}{2}\ln 1 - arc\operatorname{tg}0\right) =$$

$$= 4 + 2\ln 2 - \pi.$$

Пример 1.3.7. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$; б) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\cdot\cos^2 x dx$; в) $\int\limits_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$; г) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{1+5\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}dx$;

д) $\int\limits_0^{\sin 0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\left(3+2\arcsin x\right)^3}$; е) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{1+x^4}$; ж) $\int\limits_1^2 \frac{3^x dx}{4-9^x}$.

Решение

Введем замену переменной согласно формуле (1.2):

а) $\int\limits_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx = \left|\begin{matrix} 1+\ln x = t, & x = 1 \Rightarrow t = 1 \\ \frac{dx}{x} = dt, & x = e \Rightarrow t = 2 \end{matrix}\right| = \int\limits_1^2 tdt = \frac{t^2}{2}\Bigg|_1^2 = \frac{1}{2}\left(2^2-1^2\right) = \frac{3}{2}.$

б) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\cdot\cos^2 x\, dx = \left|\begin{matrix} \cos x = t, & x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ -\sin xdx = dt, & x = \pi/2 \Rightarrow t = 0 \\ \sin xdx = -dt & \end{matrix}\right| = -\int\limits_1^0 t^2dt.$

Используем свойство 4 определенного интеграла (см. п. 1.2) и изменим пределы интегрирования: $-\int\limits_1^0 t^2dt = \int\limits_0^1 t^2dt = \frac{t^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$

в) $\int\limits_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2} = \left|\begin{matrix} \frac{1}{x} = t, & x = 1 \Rightarrow t = 1 \\ \frac{dx}{x^2} = -dt, & x = 2 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \end{matrix}\right| = -\int\limits_1^{1/2} e^t dt = \int\limits_{1/2}^1 e^t dt = e^t\Bigg|_{1/2}^1 = e - \sqrt{e}.$

$$\text{г) } \int_0^{\pi/4} \frac{1+5\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}dx = \left| \begin{array}{ll} 1+5\operatorname{tg}x = t, & x=0 \Rightarrow t=1, \\ \dfrac{5dx}{\cos^2 x} = dt, & x=\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow t=6 \\ \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{5}dt, & \end{array} \right| = \frac{1}{5}\int_1^6 tdt = \frac{1}{5}\cdot\frac{t^2}{2}\Bigg|_1^6 =$$

$$= \frac{1}{10}\left[6^2 - 1^2\right] = \frac{1}{10}\cdot 35 = 3{,}5.$$

$$\text{д) } \int_0^{\sin 0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\left(3+2\arcsin x\right)^3} = \left| \begin{array}{ll} 3+2\arcsin x = t, & x=0 \Rightarrow t=3 \\ \dfrac{2dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt, & x=\sin 0{,}5 \Rightarrow t=4 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int_3^4 \frac{dt}{t^3} == \frac{1}{2}\int_3^4 t^{-3}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-2}}{-2}\Bigg|_3^4 = -\frac{1}{4t^2}\Bigg|_3^4 = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{3^2}\right) = \frac{7}{576}.$$

$$\text{е) } \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^4} = \int_0^1 \frac{xdx}{1+\left(x^2\right)^2} = \left| \begin{array}{ll} x^2 = t, & x=0 \Rightarrow t=0 \\ 2xdx = dt, & x=1 \Rightarrow t=1 \\ xdx = {}^1\!/_2\, dt & \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \frac{1}{2}arc\operatorname{tg}t\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\left(arc\operatorname{tg}1 - arc\operatorname{tg}0\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{8}.$$

$$\text{ж) } \int_1^2 \frac{3^x dx}{4-9^x} = \int_1^2 \frac{3^x dx}{4-\left(3^x\right)^2} = \left| \begin{array}{ll} 3^x = t, & x=1 \Rightarrow t=3 \\ 3^x \ln 3dx = dt, & x=2 \Rightarrow t=9 \\ 3^x dx = \dfrac{1}{\ln 3}dt & \end{array} \right| = \frac{1}{\ln 3}\int_3^9 \frac{dt}{4-t^2} =$$

$$= \frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{t+2}{t-2}\right|\Bigg|_3^9 = \frac{1}{4\ln 3}\left(\ln\frac{11}{7} - \ln\frac{5}{1}\right) = \frac{1}{4\ln 3}\cdot\ln\frac{11}{35} = \frac{1}{4}\log_3\frac{11}{35}.$$

Пример 1.3.8. Вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$; б) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^3 x}$.

Решение

Имеем интегралы от тригонометрических функций (см. часть 3, п. 2.6).

$$\text{а) } \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+2\sin^2 x} = \left| \begin{matrix} \operatorname{tg} x = t, \quad x = arc\operatorname{tg} t, & x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}, & x = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(1+\dfrac{2t^2}{1+t^2}\right)} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2+2t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{3t^2+1} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dt}{t^2+\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} arc\operatorname{tg}\frac{t}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} arc\operatorname{tg}\sqrt{3}t \Bigg|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(arc\operatorname{tg}\sqrt{3} - arc\operatorname{tg} 0\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

$$\text{б) } \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^3 x} = \left| \begin{matrix} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t, \ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, & x = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow t = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ x = 2\operatorname{arctg} t, \ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}, & x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \end{matrix} \right| = \int_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{\left(\dfrac{2t}{1+t^2}\right)^3} =$$

$$= 2\int_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{\left(1+t^2\right)^3 dt}{8t^3\left(1+t^2\right)} = \frac{1}{4}\int_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{\left(1+t^2\right)^2 dt}{t^3} = \frac{1}{4}\int_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{1+2t^2+t^4}{t^3} dt = \frac{1}{4}\int_{1/\sqrt{3}}^{1} \left(t^{-3}+2t^{-1}+t\right) dt =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{t^{-2}}{-2} + 2\ln|t| + \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} = \left(-\frac{1}{8t^2} + \frac{1}{2}\ln|t| + \frac{1}{8}t^2\right)\Bigg|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} = \left(-\frac{1}{8\cdot 1^2} + \frac{1}{2}\ln|1| + \frac{1}{8}\cdot 1^2\right) -$$

$$-\left(-\frac{1}{8\cdot\left(1/\sqrt{3}\right)^2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right| + \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \ln\sqrt[4]{3} - \frac{1}{24} = \frac{1}{3} + \ln\sqrt[4]{3}.$$

Пример 1.3.9. Вычислить интегралы:

а) $\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$; б) $\int_2^{11/2} \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x-3}}$; в) $\int_0^1 x^2\sqrt{4-x^2}dx$; г) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+3}}$.

Решение

Необходимо вычислить интегралы от иррациональных функций (см. часть 3, п. 2.7)

$$\text{а)} \int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx = \left| \begin{matrix} x-1 = t^2, \ t = \sqrt{x-1}, & x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ x = t^2+1, \ dx = 2tdt, & x = 5 \Rightarrow t = 2 \end{matrix} \right| = \int_0^2 \frac{t\cdot 2tdt}{t^2+1} =$$

$$=2\int_0^2\frac{t^2dt}{t^2+1}=2\int_0^2\frac{\left(t^2+1\right)-1}{t^2+1}dt=2\int_0^2\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=2\left(t-arctgt\right)\Bigg|_0^2=2\Big[\left(2-arctg2\right)-$$

$$-\left(0-arctg0\right)\Big]=4-2arctg2.$$

б) $$\int_2^{11/2}\frac{xdx}{\sqrt[3]{2x-3}}=\left|\begin{matrix}2x-3=t^3,\ t=\sqrt[3]{2x-3}, & x=2\Rightarrow t=1\\ x=\frac{1}{2}\left(t^3+3\right),\ dx=\frac{3}{2}t^2dt, & x=\frac{11}{2}\Rightarrow t=2\end{matrix}\right|=\frac{3}{4}\int_1^2\frac{\left(t^3+3\right)t^2dt}{t}=$$

$$=\frac{3}{4}\int_1^2\left(t^4+3t\right)dt=\frac{3}{4}\left(\frac{t^5}{5}+3\cdot\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=\frac{3}{4}\left(\frac{2^5}{5}+\frac{3\cdot2^2}{2}\right)-\frac{3}{4}\left(\frac{1^5}{5}+\frac{3\cdot1^5}{2}\right)=\frac{321}{40}=8{,}025.$$

в) $$\int_0^1x^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\left|\begin{matrix}x=2\sin t,\ dx=2\cos tdt, & x=0\Rightarrow t=0\\ t=\arcsin\frac{x}{2}, & x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}\end{matrix}\right|=$$

$$=\int_0^{\pi/6}\left(2\sin t\right)^2\cdot\sqrt{4-\left(2\sin t\right)^2}\cdot2\cos tdt=16\int_0^{\pi/6}\sin^2t\sqrt{1-\sin^2t}\cos tdt=$$

$$=16\int_0^{\pi/6}\sin^2t\,\cos^2t\,dt=16\int_0^{\pi/6}\left(\sin t\cos t\right)^2dt=16\int_0^{\pi/6}\frac{1}{4}\sin^22tdt=4\int_0^{\pi/6}\frac{1}{2}\left(1-\cos4t\right)dt=$$

$$=2\left(t-\frac{1}{4}\sin4t\right)\Bigg|_0^{\pi/6}=2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{6}\right)-2\left(0-\frac{1}{4}\sin0\right)=2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

г) $$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+3}}=\left|\begin{matrix}x=\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,t,\ dx=\frac{\sqrt{3}dt}{\cos^2t}, & x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}\\ t=\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}, & x=\sqrt{3}\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}\end{matrix}\right|=$$

$$=\sqrt{3}\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{\frac{dt}{\cos^2t}}{\left(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,t\right)^2\sqrt{\left(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,t\right)^2+3}}=\sqrt{3}\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{dt}{\cos^2t\cdot3\,\mathrm{tg}^2t\sqrt{3\,\mathrm{tg}^2t+3}}=$$

$$=\frac{1}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{dt}{\cos^2t\cdot\mathrm{tg}^2t\sqrt{\mathrm{tg}^2t+1}}=\frac{1}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{dt}{\sin^2t\sqrt{\frac{1}{\cos^2t}}}=\frac{1}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{\cos tdt}{\sin^2t}=\frac{1}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{d\left(\sin t\right)}{\sin^2t}=$$

$$=-\frac{1}{3\sin t}\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/4}=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sin\pi/4}-\frac{1}{\sin\pi/6}\right)=-\frac{1}{3}\left(\sqrt{2}-2\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{3}.$$

Задания для самостоятельной работы

Вычислить интегралы:

1. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+2}$.
2. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arcctg}^3 x}{1+x^2}dx$.
3. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.
4. $\int\limits_1^2 \frac{x^4 dx}{16+x^{10}}$.
5. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^3 x \sin 2x dx$.
6. $\int\limits_1^4 \frac{\sin(\log_4 x)}{x}dx$.
7. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$.
8. $\int\limits_0^2 x\sqrt{4-x^2}dx$.
9. $\int\limits_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$.
10. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^4 x}$.
11. $\int\limits_0^{\pi/3} \frac{\sin x dx}{1-3\cos x}$.
12. $\int\limits_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$.
13. $\int\limits_0^{\pi/4} \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx$.
14. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$.
15. $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$.
16. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$.
17. $\int\limits_1^5 \frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}}$.
18. $\int\limits_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{x+3}}$.

1.3.3. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a;b]$, то справедлива ***формула интегрирования по частям*** в определенном интеграле:

$$\int\limits_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du. \qquad (1.3)$$

Заметим, что схема использования этой формулы совпадает с вычислением неопределенных интегралов этим же методом (см. часть 3, п. 2.3)

Пример 1.3.10. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^2 xe^{\frac{x}{4}}dx$; б) $\int\limits_0^{\pi} x\cos 3x dx$; в) $\int\limits_{-1}^0 (2x-3)\cdot 4^x dx$.

Решение

а) Разобьем подынтегральное выражение на два множителя, выбрав $u=x$, $dv=e^{\frac{x}{4}}dx$. Найдем $du=(x)'dx=dx$, $v=\int e^{\frac{x}{4}}dx=4e^{\frac{x}{4}}$. Используем формулу (1.3) интегрирования по частям:

$$\int_0^2 xe^{\frac{x}{4}}dx=\left(x\cdot 4e^{\frac{x}{4}}\right)\Bigg|_0^2-4\int_0^2 e^{\frac{x}{4}}dx=4\left(2e^{\frac{1}{2}}-0\right)-16e^{\frac{x}{4}}\Bigg|_0^2=8\sqrt{e}-16\left(e^{\frac{1}{2}}-e^0\right)=16-8\sqrt{e}.$$

$$\text{б)}\int_0^{\pi} x\cos 3x dx=\begin{vmatrix} u=x, & du=dx \\ dv=\cos 3x, & v=\dfrac{1}{3}\sin 3x\end{vmatrix}=\left(x\cdot\frac{1}{3}\sin 3x\right)\Bigg|_0^{\pi}-\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\sin 3x dx=$$

$$=\left(\pi\cdot\frac{1}{3}\sin 3\pi-0\right)+\frac{1}{9}\cos 3x\Bigg|_0^{\pi}=\frac{1}{9}(\cos 3\pi-\cos 0)=\frac{1}{9}(-1-1)=-\frac{2}{9}.$$

$$\text{в)}\int_{-1}^{0}(2x-3)\cdot 4^x dx=\begin{vmatrix} u=2x-3, & du=2dx \\ dv=4^x dx, & v=\dfrac{4^x}{\ln 4}\end{vmatrix}=\left[(2x-3)\cdot\frac{4^x}{\ln 4}\right]\Bigg|_{-1}^{0}-\frac{2}{\ln 4}\int_{-1}^{0}4^x dx=$$

$$=\frac{1}{\ln 4}(2x-3)\cdot 4^x\Bigg|_{-1}^{0}-\frac{2}{\ln^2 4}\cdot 4^x\Bigg|_{-1}^{0}=\frac{1}{\ln 4}(0-3)\cdot 4^0-\frac{1}{\ln 4}(-2-3)\cdot 4^{-1}-$$

$$-\frac{2}{\ln^2 4}\left(4^0-4^{-1}\right)=-\frac{3}{\ln 4}+\frac{5}{4\ln 4}-\frac{2}{\ln^2 4}\cdot\frac{3}{4}=-\frac{7}{\ln 4}-\frac{3}{2\ln^2 4}.$$

Пример 1.3.11. Вычислить интегралы:

а) $\int_1^{e^3} x^5\ln x dx$; б) $\int_{1/4}^{1/2}\arccos 2x dx$; в) $\int_0^3 x\,\mathrm{arctg}\, x dx$.

Решение

$$\text{а)}\int_1^{e^3} x^5\ln x dx=\begin{vmatrix} u=\ln x, & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=x^5dx, & v=\dfrac{x^6}{6}\end{vmatrix}=\left(\frac{x^6}{6}\cdot\ln x\right)\Bigg|_1^{e^3}-\int_1^{e^3}\frac{x^6}{6}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{1}{6}x^6\ln x\Bigg|_1^{e^3}-$$

$$-\frac{1}{6}\int_1^{e^3}x^5dx=\frac{1}{6}\left(e^{18}\cdot\ln e^3-1\cdot\ln 1\right)-\frac{1}{6}\cdot\frac{x^6}{6}\Bigg|_1^{e^3}=\frac{1}{6}e^{18}\cdot 3-\frac{1}{36}\left(e^{18}-1\right)=\frac{17}{36}e^{18}+\frac{1}{36}.$$

$$\text{б)} \int\limits_{1/4}^{1/2} \arccos 2x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \arccos 2x, & du = -\dfrac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}}dx \\ dv = dx, & v = x \end{matrix} \right| = \left(x \arccos 2x\right)\Big|_{1/4}^{1/2} -$$

$$-\int\limits_{1/4}^{1/2} x \cdot \frac{-2dx}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \frac{1}{2}\arccos 1 - \frac{1}{4}\arccos\frac{1}{2} + 2\int\limits_{1/4}^{1/2} \frac{xdx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{3} +$$

$$+2\left(-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}\right)\Bigg|_{1/4}^{1/2} = -\frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-4\cdot\frac{1}{4}} - \sqrt{1-4\cdot\frac{1}{16}}\right) = -\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{в)} \int\limits_0^3 x \operatorname{arctg} x dx = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x, & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx, & v = {x^2}/{2} \end{matrix} \right| = \left(\operatorname{arctg} x \cdot \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 - \frac{1}{2}\int\limits_0^3 \frac{x^2 dx}{1+x^2} =$$

$$= \left(\operatorname{arctg} 3 \cdot \frac{9}{2} - \operatorname{arctg} 0 \cdot 0\right) - \frac{1}{2}\int\limits_0^3 \frac{\left(1+x^2\right)-1}{1+x^2}dx = \frac{9}{2}\operatorname{arctg} 3 - \frac{1}{2}\int\limits_0^3 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{9}{2}\operatorname{arctg} 3 - \frac{1}{2}\left(x - \operatorname{arctg} x\right)\Bigg|_0^3 = \frac{9}{2}\operatorname{arctg} 3 - \frac{1}{2}\left[\left(3 - \operatorname{arctg} 3\right) - 0\right] = \frac{9}{2}\operatorname{arctg} 3 - \frac{3}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 3 = 5\operatorname{arctg} 3 - \frac{3}{2}.$$

Пример 1.3.12. Вычислить интегралы:

$$\text{а)} \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{xdx}{\cos^2 x}; \qquad \text{б)} \int\limits_{-1}^{1} x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx; \qquad \text{в)} \int\limits_0^{\pi/2} e^x \cos x dx.$$

Решение

$$\text{а)} \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{xdx}{\cos^2 x} = \left| \begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x}, & v = \operatorname{tg} x \end{matrix} \right| = \left(x \cdot \operatorname{tg} x\right)\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} - \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{tg} x dx =$$

$$= \left(\frac{\pi}{3}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right) + \ln\left|\cos x\right|\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \left(\frac{\pi}{3}\cdot\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \left(\ln\cos\frac{\pi}{3} - \ln\cos\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \frac{5\sqrt{3}\pi}{18} + \ln\frac{1}{2} - \ln\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}\pi}{18} + \ln\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}\pi}{18} - \ln\sqrt{3}.$$

б) $\int\limits_{-1}^{1} x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx = \begin{vmatrix} u = x^2, & du = 2xdx \\ dv = e^{-\frac{x}{2}} dx, & v = -2e^{-\frac{x}{2}} \end{vmatrix} = \left(-2x^2 e^{-\frac{x}{2}}\right)\Bigg|_{-1}^{1} + 4\int\limits_{-1}^{1} x e^{-\frac{x}{2}} dx$.

Первое слагаемое можно вычислять, а ко второму применим метод интегрирования по частям еще раз:

$$\left(-2x^2 e^{-\frac{x}{2}}\right)\Bigg|_{-1}^{1} + 4\int\limits_{-1}^{1} x e^{-\frac{x}{2}} dx = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = e^{-\frac{x}{2}} dx, & v = -2e^{-\frac{x}{2}} \end{vmatrix} = \left(-2e^{-\frac{1}{2}} + 2e^{\frac{1}{2}}\right) +$$

$$+4\left[\left(-2xe^{-\frac{x}{2}}\right)\Bigg|_{-1}^{1} + 2\int\limits_{-1}^{1} e^{-\frac{x}{2}} dx\right] = \left(-\frac{2}{\sqrt{e}} + 2\sqrt{e}\right) + 4\left[\left(-2e^{-\frac{1}{2}} - 2e^{\frac{1}{2}}\right) - \left(4e^{-\frac{x}{2}}\right)\Bigg|_{-1}^{1}\right] =$$

$$= \left(-\frac{2}{\sqrt{e}} + 2\sqrt{e}\right) - \left(\frac{8}{\sqrt{e}} + 8\sqrt{e}\right) - 16\left(e^{-\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{e}} + 2\sqrt{e} - \frac{8}{\sqrt{e}} - 8\sqrt{e} - \frac{16}{\sqrt{e}} +$$

$$+16\sqrt{e} = 10\sqrt{e} - \frac{26}{\sqrt{e}}.$$

в) $\int\limits_{0}^{\pi/2} e^x \cos x dx = \begin{vmatrix} u = e^x, & du = e^x dx \\ dv = \cos x dx, & v = \sin x \end{vmatrix} = \left(e^x \sin x\right)\Bigg|_{0}^{\pi/2} - \int\limits_{0}^{\pi/2} e^x \sin x dx$.

Полученный интеграл проинтегрируем по частям еще раз:

$$\left(e^x \sin x\right)\Bigg|_{0}^{\pi/2} - \int\limits_{0}^{\pi/2} e^x \sin x dx = \begin{vmatrix} u = e^x, & du = e^x dx \\ dv = \sin x dx, & v = -\cos x \end{vmatrix} = \left(e^{\pi/2} \sin\frac{\pi}{2} - e^0 \cdot \sin 0\right) -$$

$$-\left[-e^x \cos x\Bigg|_{0}^{\pi/2} + \int\limits_{0}^{\pi/2} e^x \cos x dx\right] = \left(e^{\pi/2} + e^{\pi/2}\cos\frac{\pi}{2} - e^0 \cos 0\right) - \int\limits_{0}^{\pi/2} e^x \cos x dx =$$

$$= e^{\pi/2} - 1 - \int\limits_{0}^{\pi/2} e^x \cos x dx.$$

После двукратного интегрирования мы пришли к исходному интегралу. Для удобства введем обозначение: $\int\limits_{0}^{\pi/2} e^x \cos x dx = I$. Тогда $I = e^{\pi/2} - 1 - I$, откуда

$$2I = e^{\pi/2} - 1 \Rightarrow I = \frac{1}{2}\left(e^{\pi/2} - 1\right).$$

Таким образом, исходный интеграл равен $\int\limits_{0}^{\pi/2} e^x \cos x dx = \frac{1}{2}\left(e^{\pi/2} - 1\right)$.

Задания для самостоятельной работы

Вычислить интегралы:

1. $\int\limits_{0}^{0,5} xe^{-2x}dx$. 2. $\int\limits_{0}^{\pi/2} (x+1)\sin 4x dx$. 3. $\int\limits_{0}^{1} 5^{-4x}(2-x)dx$. 4. $\int\limits_{1}^{e^2} \ln x dx$.

5. $\int\limits_{0}^{\pi} x\sin\frac{x}{2}dx$. 6. $\int\limits_{-3}^{0} x\cos\frac{\pi x}{3}dx$. 7. $\int\limits_{0}^{1,5} \arcsin\frac{x}{3}dx$.

8. $\int\limits_{1}^{16} \sqrt{x}\log_2 x dx$. 9. $\int\limits_{0}^{1/3} \mathrm{arctg}\, 3x dx$. 10. $\int\limits_{0}^{\pi/4} x^2\cos 2x dx$.

11. $\int\limits_{0}^{e-1} \ln(x+1)dx$. 12. $\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln x dx}{x^2}$. 13. $\int\limits_{0}^{\pi/2} e^x\cos x dx$.

1.4. Приближенные вычисления интегралов

Как известно, если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$ на отрезке $[a;b]$, то определенный интеграл вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница.

Отыскание первообразной для подынтегральной функции не всегда является простым, а также не для всякой непрерывной функции существует первообразная, которая выражается через элементарные функции. В этих случаях формула Ньютона-Лейбница неприменима. Тогда используют приближенные формулы, которые позволяют вычислить определенный интеграл с любой степенью точности.

Наиболее распространенными приближенными методами вычисления определенных интегралов являются: метод прямоугольников, метод трапеций и метод парабол (метод Симпсона). Основная идея этих методов заключается в замене подынтегральной функции $f(x)$ функцией более простой природы – многочленом нулевой, первой и второй степени соответственно, совпадающим с $f(x)$ в некоторых точках.

1.4.1. Формула прямоугольников

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$ и требуется вычислить интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n равных частей с шагом разбиения $h=\dfrac{b-a}{n}$ с помощью точек $a=x_0,x_1,x_2,\ldots x_{i-1},x_i,\ldots,x_n=b$, где $x_i=a+ih \quad (i=0,1,2,...,n)$. Обозначим $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ – длину каждого из частичных отрезков. Построим прямоугольники с основаниями Δx_i и высотами $y_i=f(x_i)$. Тогда интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ вычисляется как сумма площадей n прямоугольников, вписанных в нашу криволинейную трапецию, по одной из следующих формул:

$$\int\limits_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}\left(y_0+y_1+y_2+...+y_{n-1}\right) \tag{1.4}$$

или

$$\int\limits_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}\left(y_1+y_2+...+y_{n-1}+y_n\right). \tag{1.5}$$

Замечание. Формула (1.4) используется для левых прямоугольников (вычисления с недостатком), а формула (1.5) – для правых прямоугольников (вычисления с избытком) (см. рис. 1.3 и 1.4 соответственно). Отличие состоит в высотах прямоугольников, которые равны значениям функции $f(x)$ в левых (правых) граничных точках частичных отрезков соответственно.

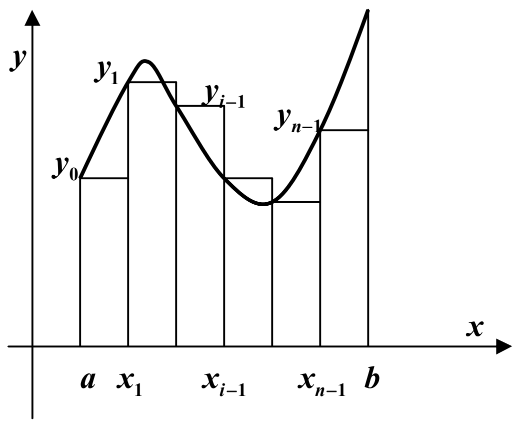


Рис. 1.3

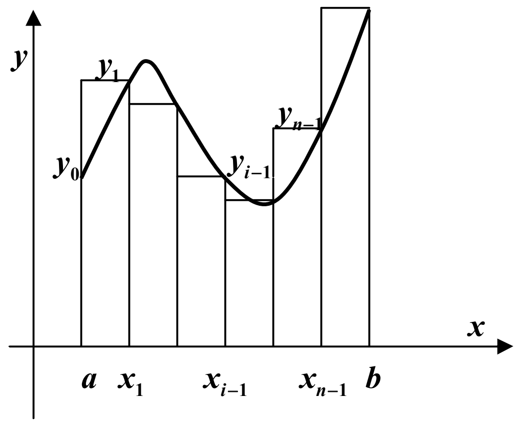


Рис. 1.4

Оценка абсолютной погрешности метода прямоугольников проводится по формулам:

$$\left|\delta_n\right| \le \max_{x\in[a;b]}\left|f'(x)\right| \cdot \frac{(b-a)^2}{2n}, \tag{1.6}$$

или

$$\left|\delta_n\right| \le \max_{x\in[a;b]}\left|f''(x)\right| \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^2}, \tag{1.7}$$

при условии, что функция $y = f(x)$ имеет на отрезке $[a;b]$ непрерывные производные соответствующего порядка.

Заметим, что формулы (1.6) и (1.7) позволяют не только оценить абсолютную погрешность при заданном n, но и подбирать n таким, чтобы интеграл был вычислен с требуемой точностью ε.

Во многих случаях нахождение наибольшего значения модуля производной подынтегральной функции является довольно трудоемким. В таких случаях для оценки абсолютной погрешности можно использовать следующий алгоритм:

1) берем произвольное значение n и вычисляем приближенное значение интеграла I_1;

2) удваиваем количество отрезков разбиения, снова считаем приближенное значение интеграла I_2 и находим абсолютное значение разности двух приближений $\left|I_2 - I_1\right|$.

Продолжаем удвоение отрезков разбиения до тех пор, пока абсолютное значение разности не достигнет требуемой точности, то есть $\left|I_k - I_{k-1}\right| < \varepsilon$.

Пример 1.4.1. Вычислить методом прямоугольников определенный интеграл $\int_0^2 \left(x^4 + 2\right)dx$, разбив отрезок интегрирования на 10 частей. Оценить точность вычислений.

Решение

Разобьем отрезок $[0;2]$ на 10 равных частичных отрезков с шагом $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{10} = 0,2$. Найдем точки разбиения $x_i = a + ih$ $(i = 0,1,...10)$

отрезка интегрирования и значения $y_i = f(x_i)$ подынтегральной функции $f(x) = x^4 + 2$ в этих точках:

если $i = 0$, то $x_0 = 0 + 0 \cdot 0,2 = 0$ и $y_0 = f(x_0) = f(0) = 0^4 + 2 = 2$;

если $i = 1$, то $x_1 = 0 + 1 \cdot 0,2 = 0,2$ и $y_1 = f(x_1) = 0,2^4 + 2 = 2,0016$;

если $i = 2$, то $x_2 = 0 + 2 \cdot 0,2 = 0,4$ и $y_2 = f(x_2) = 0,4^4 + 2 = 2,0256$ и т.д.

Результаты вычислений удобно представить в виде таблицы:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
y_i	2,0000	2,0016	2,0256	2,1296	2,4096	3,0000

i	6	7	8	9	10
x_i	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
y_i	4,0736	5,8416	8,5536	12,4976	18,0000

Подставим данные в формулу (1.4):

$$\int_0^2 (x^4 + 2)dx \approx 0,2 \cdot (2 + 2,0016 + 2,0256 + 2,1296 + 2,4096 + 3 + 4,0736 +$$

$$+5,8416 + 8,5536 + 12,4976) = 8,90656.$$

Теперь вычислим интеграл по формуле (1.5):

$$\int_0^2 (x^4 + 2)dx \approx 0,2 \cdot (2,0016 + 2,0256 + 2,1296 + 2,4096 + 3 + 4,0736 +$$

$$+5,8416 + 8,5536 + 12,4976 + 18) = 12,10656.$$

В данном примере не составляет трудности вычислить интеграл по формуле Ньютона-Лейбница: $\int_0^2 (x^4 + 2)dx = \left(\frac{x^5}{5} + 2x\right)\Big|_0^2 = \frac{32}{5} + 4 = 10,4$.

Как видим, значения определенного интеграла, полученные с помощью формул прямоугольников достаточно далеки от его точного значения. Вычислим абсолютную погрешность этого метода по формуле (1.7). Для этого найдем производные подынтегральной функции: $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$. На отрезке $[0;2]$ функция второй производной монотонно возрастает и принимает неотрицательные значения, поэтому свое максимальное значение достигает в точке с абсциссой $x = 2$: $\max\limits_{x\in[0;2]}\left|f''(x)\right| = f''(2) = 12\cdot 2^2 = 48$.

Таким образом, абсолютная погрешность составляет:

$$\left|\delta_n\right| \le 48\cdot\frac{(2-0)^2}{12\cdot 100} = 0{,}16.$$

Пример 1.4.2. Вычислить методом прямоугольников определенный интеграл $\int\limits_1^2\left(-0{,}03x^3 + 0{,}26x - 0{,}26\right)dx$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}01$.

Решение

Найдем количество n точек разбиения отрезка $[1;2]$ из условия $\left|\delta_n\right| < \varepsilon$. Используя оценку (1.6), будем иметь: $\max\limits_{x\in[a;b]}\left|f'(x)\right|\cdot\dfrac{(b-a)^2}{2n} < 0{,}01$. Найденное значение n обеспечит приближение исходного интеграла с заданной точностью.

Итак, $f(x) = -0{,}03x^3 + 0{,}26x - 0{,}26$, тогда $f'(x) = -0{,}09x^2 + 0{,}26x$.

Графиком функции $f'(x)$ является парабола с вершиной в точке $(0;0{,}26)$, ветви которой направлены вниз. На отрезке $[1;2]$ эта функция монотонно убывает. Поэтому для нахождения наибольшего значения модуля производной достаточно вычислить абсолютные значения производной на концах отрезка и выбрать из них наибольшее. А именно: $\left|f'(1)\right| = \left|-0{,}09\cdot 1^2 + 0{,}26\right| = 0{,}17$; $\left|f'(2)\right| = \left|-0{,}09\cdot 2^2 + 0{,}26\right| = 0{,}1$.

Следовательно, $\max\limits_{x\in[1;2]}\left|f'(x)\right| = 0{,}17$.

Тогда $0{,}17\cdot\dfrac{(2-1)^2}{2\cdot n} \le 0{,}01$, откуда $\dfrac{1}{n} \ge \dfrac{0{,}01\cdot 2}{0{,}17} \Rightarrow n \ge 8{,}5$.

С учетом того, что n принимает только натуральные значения, можно положить $n = 9,\ 10, 11,\ldots$. Для удобства вычислений выберем $n = 10$. Далее поступим так же, как и в предыдущем примере.

Найдем шаг разбиения $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{2-1}{10} = 0{,}1$ и точки разбиения этого отрезка $x_i = a + ih$ $(i = 0,1,2,\ldots 10)$. Вычислим значения подынтегральной функции в полученных точках $y_i = f\left(x_i\right)$. Результаты вычислений представим в виде таблицы:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
y_i	-0,03000	-0,01393	0,00016	0,01209	0,02168	0,02875

i	6	7	8	9	10
x_i	1,6	1,7	1,8	1,9	2
y_i	0,03312	0,03461	0,03304	0,02823	0,02000

По формуле (1.4) левых прямоугольников получим:

$$\int_1^2 \left(-0,03x^3 + 0,26x - 0,26\right)dx \approx h\sum_{i=0}^{9} f\left(x_i\right) = 0,1\left(-0,03 - 0,01393 + 0,00016 + \right.$$
$$\left. +0,01209 + 0,02168 + 0,02875 + 0,03312 + 0,03461 + 0,03304 + 0,02823\right) = 0,014775.$$

Теперь вычислим интеграл по формуле (1.5) правых прямоугольников:

$$\int_1^2 \left(-0,03x^3 + 0,26x - 0,26\right)dx \approx h\sum_{i=1}^{10} f\left(x_i\right) = 0,1\left(-0,01393 + 0,00016 + 0,01209 + \right.$$
$$\left. +0,02168 + 0,02875 + 0,03312 + 0,03461 + 0,03304 + 0,02823 + 0,02\right) = 0,019775.$$

Так как подынтегральная функция имеет первообразную, найдем точное значение интеграла, воспользовавшись формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int_1^2 \left(-0,03x^3 + 0,26x - 0,26\right)dx = \left.\left(-0,03 \cdot \frac{x^4}{4} + 0,26 \cdot \frac{x^2}{2} - 0,26x\right)\right|_1^2 = 0,0175.$$

Очевидно, что значения исходного интеграла, полученные приближенным методом, соответствуют заданной точности.

1.4.2. Формула трапеций

Для приближенного вычисления определенного интеграла используем тот же алгоритм, что и в предыдущем пункте.

Разобьем отрезок $[a;b]$ на n равных частей с шагом разбиения $h = \dfrac{b-a}{n}$ с помощью точек $a = x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n = b$, где $x_i = a + ih$ $\left(i = 0,1,2,...,n\right)$. Строим прямоугольные трапеции с основаниями $y_i = f\left(x_i\right)$, $y_{i+1} = f\left(x_{i+1}\right)$ и высотой h (рис.1.5). Тогда интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ может быть вычислен как сумма площадей n трапеций по следующей формуле:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\cdot\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+...+y_{n-1}\right) \qquad (1.8)$$

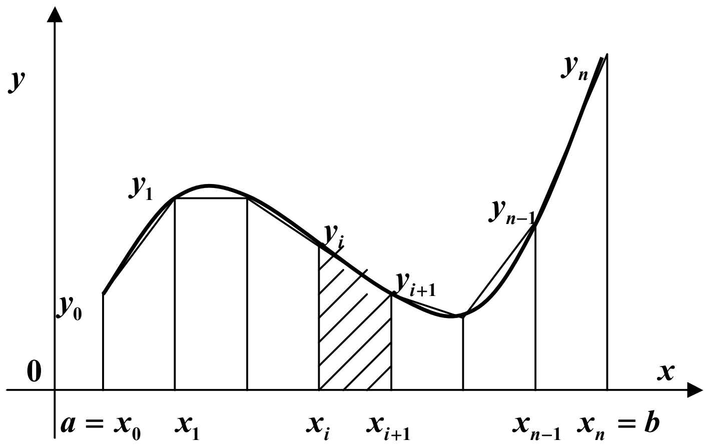


Рис. 1.5

Оценку абсолютной погрешности $|\delta_n|$ метода трапеций проводят по формуле (1.7), при условии, что функция $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную $f''(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Пример 1.4.3. Вычислить методом трапеций определенный интеграл $\int\limits_0^2 (x^4+2)dx$, разбив отрезок интегрирования на 10 частей. Оценить точность вычислений.

Решение

Все расчеты, необходимые для вычисления интеграла, произведены в примере 1.4.1. Воспользуемся формулой (1.8):

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\cdot\left(\frac{y_0+y_{10}}{2}+y_1+y_2+y_3+...+y_8+y_9\right).$$

Подставив данные, получим:

$$\int\limits_0^2 (x^4+2)dx \approx 0,2\cdot\left(\frac{2+18}{2}+2,0016+2,0256+2,1296+2,4096+3+4,0736+\right.$$
$$\left.+5,8416+8,5536+12,4976\right)=10,50656.$$

Напомним, что точное значение интеграла равно **10,4**. Полученный результат показывает, что формула трапеций дает достаточно хорошее приближение нашего интеграла к своему точному значению. Оценка абсолютной погрешности этого метода совпадает с оценкой, полученной в методе прямоугольников: $\left|\delta_n\right| \le 0{,}16$.

Пример 1.4.4. Вычислить приближенно по формуле трапеций с точностью $\varepsilon = 0{,}01$ интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{2+x}$.

Решение

Количество точек разбиения отрезка интегрирования $[0;1]$ найдем из условия $\left|\delta_n\right| < \varepsilon$. Учитывая оценку (1.7), получим: $\max\limits_{x\in[a;b]}\left|f''(x)\right| \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^2} < 0{,}01$.

Продифференцируем подынтегральную функцию $f(x) = \frac{1}{2+x}$: $f'(x) = -\frac{1}{(2+x)^2}$, $f''(x) = \frac{2}{(2+x)^3}$. Функция $f''(x)$ монотонно убывает на отрезке $[0;1]$ и может принимать свое наибольшее значение только на концах этого отрезка. Вычислим эти значения: $f''(0) = \frac{1}{4}$, $f''(1) = \frac{2}{27}$. Очевидно, что $\max\limits_{x\in[0;1]}\left|f''(x)\right| = \frac{1}{4}$. Тогда $\frac{1}{4} \cdot \frac{(1-0)^3}{12n^2} \le 0{,}001$, откуда $\frac{1}{n^2} \le \frac{48}{1000}$. Значит, $n \ge 4{,}5$.

Выберем $n = 5$. Это позволит нам достичь требуемой точности при минимальном количестве расчетов. Разобьем интервал интегрирования на 5 равных промежутков с шагом $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = 0{,}2$ и вычислим значения подынтегральной функции в точках разбиения $y_i = f(x_i)$. По результатам вычислений составим таблицу:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y_i	0,5	0,4545	0,4167	0,3846	0,3710	0,3333

Подставляя в формулу (1.8), получим:

$$\int_0^1 \frac{dx}{2+x} \approx 0,2 \cdot \left(\frac{0,5+0,3333}{2} + 0,4545 + 0,4167 + 0,3846 + 0,371 \right) \approx$$
$$\approx 0,2 \cdot 2,0296 \approx 0,4059.$$

Для контроля вычислим этот интеграл по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_0^1 \frac{dx}{2+x} = \ln|2+x| \Big|_0^1 = \ln 3 - \ln 2 \approx 1,0986 - 0,6931 = 0,4055.$$

Как видим, полученное приближенное значение исходного интеграла удовлетворяет заданной точности.

1.4.3. Формула парабол (формула Симпсона)

Для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ разобьем отрезок интегрирования $[a;b]$ на четное число равных частей ($n = 2m$) при помощи точек $a = x_0, x_2, x_4, \ldots, x_{2n} = b$ с шагом $h = \frac{b-a}{n}$. Пусть точки x_{2i-1} являются серединами отрезков $[x_{2i-2}; x_{2i}]$. Тогда все значения x_i определяются равенством $x_i = a + ih,$, $i = 0,1,2,...,2n$.

В этом случае определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ равен сумме площадей фигур, которые представляют собой криволинейные трапеции, лежащие под параболами, проходящими через три точки графика функции $y = f(x)$ с абсциссами $x_{2i-2}, x_{2i-1}, x_{2i}$ (рис. 1. 6).

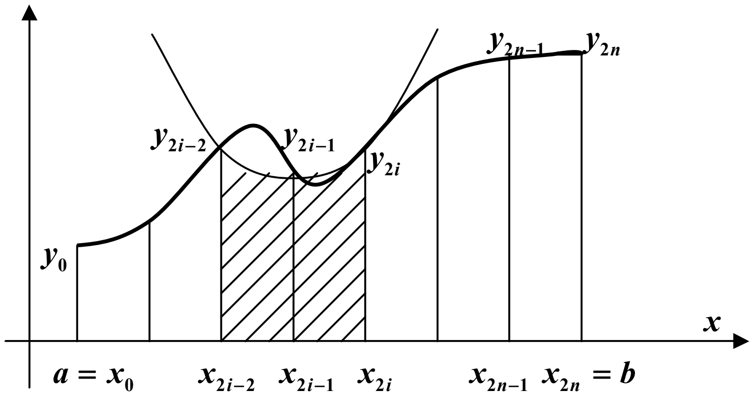


Рис. 1.6

Таким образом, справедлива формула:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[y_0 + y_{2n} + 4\left(y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + ... + y_{2n-2}\right)\right], \qquad (1.9)$$

где $y_i = f(x_i)$.

Абсолютная погрешность метода Симпсона оценивается так:

$$|\delta_n| \le \max_{x\in[a;b]}\left|f^{(4)}(x)\right| \cdot \frac{(b-a)^5}{180n^4}, \qquad (1.10)$$

где $f^{(4)}(x)$ – непрерывная на $[a;b]$ четвертая производная функции $f(x)$.

Пример 1.4.5. Вычислить методом Симпсона определенный интеграл $\int_0^2 \left(x^4 + 2\right)dx$, разбив отрезок интегрирования на 10 частей. Оценить точность вычислений.

Решение

Подставляя имеющиеся данные (см. пример 1.4.1) в формулу (1.9), получим:

$$\int_0^2 \left(x^4 + 2\right)dx \approx \frac{0,2}{3}\cdot\left[2 + 18 + 4\cdot\left(2,0016 + 2,1296 + 3 + 5,8416 + 12,4976\right) + \right.$$

$$\left. +2\cdot\left(2,0256 + 2,4096 + 4,0736 + 8,5536\right)\right] = 10,4004.$$

Как видим, применение формулы Симпсона дает превосходный результат. Полученное значение максимально близко к точному значению, равному **10,4**.

Для оценки абсолютной погрешности продифференцируем функцию $f(x)$: $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, $f'''(x) = 24x$, $f^{(4)}(x) = 24$. Очевидно, что $\max_{x\in[0;2]}\left|f^{(4)}(x)\right| = 24$.

Тогда по формуле (1.10) находим: $|\delta_n| \le 24\cdot\frac{(2-0)^5}{180\cdot 10^4} = 0,00426$.

Пример 1.4.6. Вычислить приближенно по формуле Симпсона интеграл $\int_{1,2}^{2} \sqrt{1 - 2x^2 - 3x}\, dx$, обеспечив точность $\varepsilon = 0,001$.

Решение

Мы не знаем, на сколько частей следует разбить отрезок интегрирования, чтобы достичь требуемой точности. Но, в отличие от примера 1.4.2, определить число $\boldsymbol{n}$ из формулы для оценки абсолютной погрешности (1.10) довольно сложно (необходимо исследовать $f^{(4)}(x)$ от непростой подынтегральной функции). Поэтому воспользуемся алгоритмом удвоения отрезков, изложенном в п.1.4.1.

1) Начнем с $\mathbf{2n=2}$. Определим шаг разбиения $\boldsymbol{h=\frac{b-a}{2n}=\frac{2-1{,}2}{2}=0{,}4}$.

Заполним расчетную таблицу, учитывая, что $\boldsymbol{y_i=f(x_i)}$, $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{1-2x^2-3x}}$:

i	0	1	2
x_i	1,2	1,6	2,0
y_i	1,466970	1,422674	1

Тогда по формуле (1.9) будем иметь:

$$\int_{1,2}^{2}\sqrt{1-2x^2-3x}\,dx\approx\frac{h}{3}\left[y_0+y_2+4y_1\right]=\frac{0{,}4}{3}\cdot\left[1{,}46697+1+4\cdot1{,}422674\right]\approx$$
$$\approx1{,}087689.$$

Первичный результат получен, обозначим его $\boldsymbol{I_1\approx1{,}087689}$.

2) Увеличим количество частичных отрезков до $\mathbf{2n=4}$. Шаг разбиения в этом случае: $\boldsymbol{h=\frac{2-1{,}2}{4}=0{,}2}$. Расчетная таблица выглядит так:

i	0	1	2	3	4
x_i	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
y_i	1,466970	1,475127	1,422674	1,283745	1

Используем формулу Симпсона:

$$\int_{1,2}^{2}\sqrt{1-2x^2-3x}\,dx\approx\frac{h}{3}\left[y_0+y_4+4\left(y_1+y_3\right)+2y_2\right]=$$

$$=\frac{0{,}2}{3}\cdot\left[1{,}46697+1+4\cdot\left(1{,}475127+1{,}283745\right)+2\cdot1{,}422674\right]\approx1{,}089854.$$

Итак, $\boldsymbol{I_2=1{,}089854}$.

Найдем абсолютное значение разности между приближениями: $\left|I_2 - I_1\right| = \left|1,089854 - 1,087689\right| = 0,002115$. Это значение больше требуемой точности $\varepsilon = 0,001$, поэтому необходимо еще раз удвоить количество отрезков.

3) Положим $2n = 8$. Шаг разбиения будет равен $h = \dfrac{2 - 1.2}{8} = 0,1$. Снова заполним таблицу:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
y_i	1,466970	1,477498	1,475127	1,457738	1,422674	1,366382

i	6	7	8
x_i	1,8	1,9	2,0
y_i	1,283745	1,166619	1

Формула Симпсона приобретает вид:

$$\int_{1,2}^{2} \sqrt{1 - 2x^2 - 3x}\,dx \approx \frac{h}{3}\Big[y_0 + y_8 + 4\big(y_1 + y_3 + y_5 + y_7\big) + 2\big(y_2 + y_4 + y_6\big)\Big] =$$

$$= \frac{0,1}{3} \cdot \Big[1,46697 + 1 + 4 \cdot \big(1,477498 + 1,457738 + 1,366382 + 1,166619\big) +$$

$$+2 \cdot \big(1,475127 + 1,422674 + 1,283745\big)\Big] = 1,090100.$$

Имеем: $I_3 = 1,090100$.

Оценим погрешность: $\left|I_3 - I_2\right| = \left|1,090100 - 1,089854\right| = 0,000247 < 0,001$. этот результат нас устраивает. Осталось взять наиболее точное значение $I_3 = 1,090100$ и округлить его до третьего знака после запятой.

Получим, что $\int\limits_{1,2}^{2} \sqrt{1 - 2x^2 - 3x}\,dx = 1,090$.

На примере вычисления одного и того же интеграла методом прямоугольников, трапеций и Симпсона (см. примеры 1.4.1, 1.4.3 и 1.4.5) приходим к следующему выводу: сравнивая полученные приближенные значения данного интеграла с его точным значением, видим преимущества метода Симпсона перед двумя другими методами. Добиться повышения точности результатов можно увеличением количества отрезков разбиения. Для облегчения вычислительных операций целесообразно использовать компьютерные математические пакеты, например, MATHCAD.

Задания для самостоятельной работы

Используя формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона (при $n = 8$), вычислить приближенно интегралы:

1. Вычислить приближенно интеграл $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$, используя формулы левых и правых прямоугольников. Оценить погрешность вычислений.

2. Вычислить приближенно интеграл $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$, используя формулу трапеций. Оценить погрешность вычислений.

3. Вычислить приближенно интеграл $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx$ с помощью формулы Симпсона. Оценить погрешность вычислений.

4. Вычислить с точностью до 0,001 интеграл $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}$, используя формулы: а) прямоугольников; б) трапеций; в) Симпсона.

5. Найти с точностью до 0,0001 значение числа π, используя интеграл $\pi = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$, вычисленный по формуле Симпсона.

2. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

До сих пор мы рассматривали определенные интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$ при выполнении двух условий:

1) промежуток $[a;b]$ конечен;

2) подынтегральная функция $f(x)$ ограничена на $[a;b]$.

Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то определенный интеграл не существует. Тем не менее, такие интегралы широко используются и называются ***несобственными***.

2.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами (первого рода)

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;+\infty)$ и интегрируема на любом конечном отрезке $[a;A]$, где $A > a$. Тогда интеграл $\int\limits_a^A f(x)dx$ является функцией переменного верхнего предела.

<u>**Определение 1.**</u> Несобственным интегралом функции $f(x)$ по промежутку $[a;+\infty)$ называют предел $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$ и записывают

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx. \tag{2.1}$$

При этом, если существует конечный предел в правой части формулы, то говорят, что несобственный интеграл ***сходится***. Если же указанный предел бесконечен или не существует, то говорят, что несобственный интеграл ***расходится***.

Пусть теперь функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке $(-\infty;b]$ и интегрируема на любом конечном отрезке $[B;b]$, где $B < b$. Тогда интеграл $\int\limits_B^b f(x)dx$ является функцией переменного нижнего предела.

<u>**Определение 2.**</u> Несобственным интегралом функции $f(x)$ по промежутку $(-\infty;b]$ называют предел $\lim\limits_{B\to-\infty}\int\limits_B^b f(x)dx$ и записывают

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{B\to-\infty}\int\limits_B^b f(x)dx. \tag{2.2}$$

Сходимость (расходимость) этого интеграла определяют так же, как и в первом случае.

Аналогично определяется несобственный интеграл на промежутке $(-\infty;+\infty)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{B\to-\infty\\ A\to+\infty}}\int\limits_B^A f(x)dx = \lim_{B\to-\infty}\int\limits_B^c f(x)dx + \lim_{A\to+\infty}\int\limits_c^A f(x)dx, \tag{2.3}$$

где c – произвольное действительное число.

В этом случае, если оба предела в правой части формулы (1.3) конечны, то несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называется ***сходящимся***, а если хотя бы один из пределов бесконечен или не существует, то несобственный интеграл называется ***расходящимся***.

<u>Замечание.</u> Рассмотренные выше интегралы с бесконечными пределами во всех трех случаях называют ***несобственными интегралами первого рода***.

С геометрической точки зрения сходящийся несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ от неотрицательной на интервале $[a;\infty)$ функции $f(x)$ численно равен площади криволинейной трапеции с бесконечным основанием (рис.2.1).

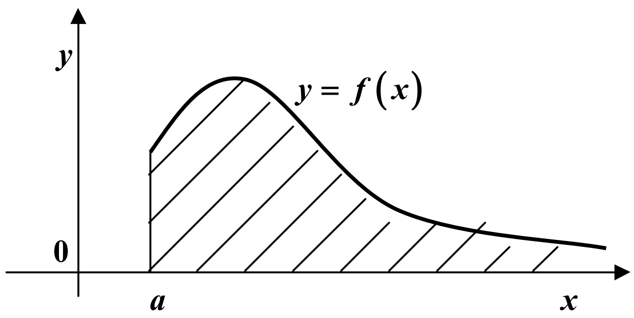


Рис. 2.1

Если интеграл расходится, говорить о площади этой трапеции нельзя. Аналогично определяется геометрический смысл несобственных интегралов $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Пример 2.1. Вычислить интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_{1}^{+\infty} e^{-x}dx$; б) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x}$; в) $\int\limits_{0}^{+\infty} \cos x\,dx$; г) $\int\limits_{-\infty}^{-5} \frac{dx}{(3x-1)^2}$;

д) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; е) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\ln x\,dx}{x}$; ж) $\int\limits_{2}^{+\infty} x\cdot 3^{-x}dx$.

Решение

а) Имеем несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом. Применим формулу (2.1):

$$\int\limits_{1}^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{1}^{A} e^{-x}dx = \lim_{A\to+\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_{1}^{A} = \lim_{A\to+\infty}\left[-e^{-A}-\left(-e^{-1}\right)\right] =$$

$$= -\lim_{A\to+\infty} e^{-A} + \lim_{A\to+\infty} e^{-1} = \left\{e^{-A} = \frac{1}{e^{A}} \to 0 \text{ при } A\to\infty\right\} = 0 + e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Предел конечен, интеграл сходится и равен $\frac{1}{e}$.

б) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_1^{A} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{A\to+\infty} \ln|x| \Big|_1^A = \lim\limits_{A\to+\infty} \left(\ln|A| - \ln 1\right) = \lim\limits_{A\to+\infty} \ln|A| = +\infty$.

в) $\int\limits_0^{+\infty} \cos x\,dx = \lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_0^{A} \cos x\,dx = \lim\limits_{A\to+\infty} \sin x \Big|_0^A = \lim\limits_{A\to+\infty} \left(\sin A - \sin 0\right) = \lim\limits_{A\to+\infty} \sin A$.

Этот предел не существует, поэтому интеграл расходится.

г) Задан несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом. Используем формулу (2.2):

$$\int\limits_{-\infty}^{-5} \frac{dx}{(3x-1)^2} = \lim_{B\to-\infty} \int\limits_{B}^{-5} \frac{dx}{(3x-1)^2} = -\frac{1}{3} \lim_{B\to-\infty} \frac{1}{(3x-1)}\Bigg|_B^{-5} =$$

$$= -\frac{1}{3} \lim_{B\to-\infty} \frac{1}{\left(3\cdot(-5)-1\right)} + \frac{1}{3} \lim_{B\to-\infty} \frac{1}{3B-1} = \frac{1}{3} \lim_{B\to-\infty} \frac{1}{16} + \frac{1}{3} \lim_{B\to-\infty} \frac{1}{3B-1} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{3B-1} \to 0 \text{ при } B\to-\infty \right\} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{13}\cdot 0 = \frac{1}{48}.$$

Интеграл сходится и равен $\frac{1}{48}$.

д) В данном интеграле оба предела бесконечны. Разобьем его на сумму двух интегралов согласно формуле (2.3):

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{B\to-\infty \\ A\to+\infty}} \int\limits_{B}^{A} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{B\to-\infty} \int\limits_{B}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{0}^{A} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{B\to-\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_B^0 +$$

$$+ \lim_{A\to+\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^A = \lim_{B\to-\infty} \left(\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} B\right) + \lim_{A\to+\infty} \left(\operatorname{arctg} A - \operatorname{arctg} 0\right) = -\lim_{B\to-\infty} \operatorname{arctg} B +$$

$$+ \lim_{A\to+\infty} \operatorname{arctg} A = \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{arctg} B \to -\frac{\pi}{2} \text{ при } B\to-\infty \\ &\operatorname{arctg} A \to \frac{\pi}{2} \text{ при } A\to+\infty \end{aligned} \right\} = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Как видим, оба предела конечны, значит, интеграл сходится и равен π.

е) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\ln x\,dx}{x} = \lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_2^{A} \frac{\ln x\,dx}{x}$.

Вычислим отдельно неопределенный интеграл:

$$\int \frac{\ln x\,dx}{x} = \left| \begin{matrix} \ln x = t, \\ \dfrac{dx}{x} = dt \end{matrix} \right| = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2}\ln^2 x + C.$$

Тогда получим:

$$\lim_{A\to+\infty} \int_2^A \frac{\ln x\,dx}{x} = \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\ln^2 x \right)\Bigg|_2^A = \frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}\left(\ln^2 A - \ln^2 2\right) = \frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}\ln^2 A - \frac{1}{2}\ln^2 2 =$$

$$= \left\{ \ln^2 A \to \infty \text{ при } A \to \infty \right\} = \infty - \frac{1}{2}\ln^2 2 = \infty.$$

Один из пределов бесконечен, поэтому интеграл расходится.

ж) $\displaystyle\int_2^{+\infty} x \cdot 3^{-x}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_2^A x \cdot 3^{-x}\,dx.$

Для вычисления полученного интеграла применим формулу интегрирования по частям (1.3):

$$\int_2^A x \cdot 3^{-x}\,dx = \left| \begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = 3^{-x}, & v = -\dfrac{3^{-x}}{\ln 3} \end{matrix} \right| = \left(-x \cdot \frac{3^{-x}}{\ln 3} \right)\Bigg|_2^A + \frac{1}{\ln 3} \cdot \int_2^A 3^{-x}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\ln 3}\left(A \cdot 3^{-A} - 2 \cdot 3^{-2}\right) - \frac{1}{\ln^2 3} \cdot 3^{-x}\Bigg|_2^A = -\frac{1}{\ln 3}\left(A \cdot 3^{-A} - 2 \cdot 3^{-2}\right) - \frac{1}{\ln^2 3} \cdot \left(3^{-A} - 3^{-2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\ln 3} \cdot \left(\frac{A}{3^A} - \frac{2}{3^2} \right) - \frac{1}{\ln^2 3} \cdot \left(\frac{1}{3^A} - \frac{1}{3^2} \right) = -\frac{1}{\ln 3} \cdot \left(\frac{A}{3^A} - \frac{2}{9} \right) - \frac{1}{\ln^2 3} \cdot \left(\frac{1}{3^A} - \frac{1}{9} \right).$$

Тогда $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_2^A x \cdot 3^{-x}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\left[-\frac{1}{\ln 3} \cdot \left(\frac{A}{3^A} - \frac{2}{9} \right) - \frac{1}{\ln^2 3} \cdot \left(\frac{1}{3^A} - \frac{1}{9} \right) \right] =$

$\displaystyle= -\frac{1}{\ln 3}\lim_{A\to+\infty}\frac{A}{3^A} + \frac{2}{9\ln 3} - \frac{1}{\ln^2 3}\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{3^A} + \frac{1}{9\ln^2 3} = \frac{2\ln 3 + 1}{9\ln^2 3}$, где $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{3^A} = 0$, а предел $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\frac{A}{3^A} = \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{3^A \ln 3} = 0$ вычислен по правилу Лопиталя.

Наш предел конечен, интеграл сходится и равен $\dfrac{2\ln 3 + 1}{9\ln^2 3}$.

Пример 2.2. Исследовать на сходимость интеграл $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$.

Решение

Рассмотрим все возможные случаи.

1) Пусть $\alpha > 1$, тогда

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A x^{-\alpha}dx=\lim_{A\to+\infty}\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_a^A=\frac{1}{-\alpha+1}\cdot\lim_{A\to+\infty}\left(A^{-\alpha+1}-a^{-\alpha+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{A^{\alpha-1}}-\frac{1}{a^{\alpha-1}}\right)=\frac{1}{(\alpha-1)\cdot a^{\alpha-1}},$$ так как $\alpha-1>0$, $\frac{1}{A^{\alpha-1}}\to 0$ при $A\to+\infty$.

Мы получили, что наш интеграл сходится.

2) $0<\alpha<1$, тогда

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A x^{-\alpha}dx=\lim_{A\to+\infty}\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_a^A=\frac{1}{-\alpha+1}\cdot\lim_{A\to+\infty}\left(A^{-\alpha+1}-a^{-\alpha+1}\right)=$$

$=\frac{1}{1-\alpha}\cdot\lim_{A\to+\infty}\left(A^{1-\alpha}-a^{1-\alpha}\right)=\infty$, так как $1-\alpha>0$, $A^{1-\alpha}\to+\infty$ при $A\to+\infty$.

Таким образом, наш интеграл расходится.

3) $\alpha=1$, тогда

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A\frac{dx}{x}=\lim_{A\to+\infty}\ln|x|\Big|_a^A=\lim_{A\to+\infty}\left(\ln A-\ln a\right)=\infty,$$ так как $\ln A\to+\infty$ при $A\to+\infty$.

Следовательно, интеграл тоже расходится.

Вывод: $$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\begin{cases}\frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}, \text{ сходится при } \alpha>1,\\ \text{расходится при } \alpha\le 1.\end{cases}$$

Пример 2.3. Исследовать на сходимость интегралы: а) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$; б) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Решение

а) В примере 2.2 мы получили, что при $\alpha>1$ несобственный интеграл сходится к $\frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}$. В нашем случае $\alpha=3>1, a=2$ и, следовательно, $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$ сходится к числу равному $\frac{1}{(3-1)\cdot 2^{3-1}}=\frac{1}{8}$. То есть $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^3}=\frac{1}{8}$.

б) Снова воспользуемся результатом, полученным в примере 2.2 для $\alpha=\frac{1}{2}<1$. В этом случае наш интеграл будет расходиться.

Следует отметить, что иногда вопрос о сходимости (расходимости) несобственного интеграла можно решить, не вычисляя сам интеграл. При этом используют следующие признаки сходимости несобственных интегралов с бесконечными пределами.

1. <u>*Признак сравнения.*</u>

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на промежутке $[a;+\infty)$, интегрируемы на отрезке $[a;A]$ $(A \geq a)$ и $0 \leq f(x) \leq g(x)$ для всех $x \geq a$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$.

2. <u>*Предельный признак сравнения.*</u>

Пусть на промежутке $[a;+\infty)$ определены две функции $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, интегрируемые на любом конечном промежутке $[a;b]$. Тогда если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = k$, $0 < k < +\infty$, то интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

<u>Замечание 1.</u> а) Если $k = 0$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

б) Если $k = +\infty$, то из расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

<u>Замечание 2.</u> При исследовании на сходимость интегралов первого рода обычно для сравнения используют интеграл $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ (см. пример 2.2).

3. *Признак абсолютной сходимости.*

Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$. В этом случае интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется ***абсолютно сходящимся***. Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, а интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ расходится, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ***сходится условно***.

Пример 2.4. Исследовать на сходимость интегралы:

а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$; б) $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$; в) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\left(1+3^x\right)}$; г) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$;

д) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{x^3+1}$; е) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-1}}$; ж) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 4x\,dx}{x^8}$; з) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 3x\,dx}{x^2+2x+3}$.

Решение

а) Для исследования интеграла на сходимость применим признак сравнения. Подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{1+x^3}$ при $x\ge 1$ удовлетворяет неравенству: $0\le \frac{1}{1+x^3}<\frac{1}{x^3}$ $\left(g(x)=\frac{1}{x^3}\right)$. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ сходится (см. пример 2.3), значит, несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ тоже сходится.

б) В примере 2.1 мы показали, что несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x}dx$ сходится. При $1\le x<\infty$ имеет место неравенство: $e^{-x^2}\le e^{-x}$. Следовательно, по признаку сравнения несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ тоже сходится.

в) Для подынтегральной функции при $x\ge 1$ справедливо неравенство:

$0<\frac{1}{x^2\left(1+3^x\right)}<\frac{1}{x^2}$. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ – сходится (см. пример 2.2). По признаку сравнения $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2\left(1+3^x\right)}$ тоже будет сходящимся.

г) Нетрудно заметить, что $\frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}}>\frac{1}{x^{2/3}}$ при $x\geq 1$. Рассмотрим интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{2/3}}$ – он расходится $(\alpha<1)$. В нашем примере $f(x)=\frac{1}{x^{2/3}}, g(x)=\frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}}$. Тогда по признаку сравнения делаем вывод, что $\int\limits_1^{+\infty}\frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ будет расходиться.

д) Подынтегральная функция $f(x)=\frac{x}{x^3+1}$ при $x\to+\infty$ сравнима с функцией $g(x)=\frac{1}{x^2+1}$. Найдем предел отношения этих функций:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^3+1}:\frac{1}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(x^2+1\right)}{x^3+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}=1\neq 0.$$

Следовательно, интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{xdx}{x^3+1}$ ведет себя так же, как интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}$. Нетрудно установить, что $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}$ сходится (см. пример 2.1). Значит, сходится и несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{xdx}{x^3+1}$.

е) Для функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ подберем функцию $g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{x^{2/3}}$ и вычислим предел их отношения:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}:\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}=1\neq 0.$$

Предел конечен, значит, интегралы $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ и $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ ведут себя одинаково.

Но $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{2/3}}$ расходится $(\alpha<1)$. Тогда интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ тоже расходится.

ж) Для подынтегральной функции справедлива оценка: $\left|\frac{\cos 4x}{x^8}\right|\le\frac{1}{x^8}$, так как $|\cos 4x|\le 1$ для любого x. Несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^8}$ сходится $(\alpha>1)$, следовательно, по признаку сравнения сходится и несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\left|\frac{\cos 4x}{x^8}\right|dx$. Теперь, используя признак абсолютной сходимости, делаем вывод, что исходный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\cos 4x\,dx}{x^8}$ сходится абсолютно.

з) Заметим, что верно неравенство: $\left|\frac{\sin 3x}{x^2+2x+3}\right|\le\frac{1}{x^2+2x+3}$ при $x\ge 0$, так как $|\sin 3x|\le 1$ для любого x. Исследуем на сходимость интеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+3}=\lim_{A\to+\infty}\int\limits_{0}^{A}\frac{dx}{x^2+2x+3}=\lim_{A\to+\infty}\int\limits_{0}^{A}\frac{dx}{(x+1)^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{A\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}\bigg|_{0}^{A}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{A\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{A+1}{\sqrt{2}}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Предел конечен, значит, интеграл сходится. Следовательно, сходится интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty}\left|\frac{\sin 3x}{x^2+2x+3}\right|dx$. Получаем, что интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin 3x\,dx}{x^2+2x+3}$ сходится абсолютно.

Задания для самостоятельной работы

Вычислить интегралы или установить их расходимость:

1. $\int\limits_{0}^{+\infty}\cos x\,dx$. 2. $\int\limits_{-\infty}^{\pi/2}\sin x\,dx$. 3. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x\,dx}{x^2+3}$. 4. $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1}$.

5. $\int\limits_{-\infty}^{-1}e^{7-2x}dx$. 6. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+17}$. 7. $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x-5}$. 8. $\int\limits_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

9. $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$. 10. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}^2 x\,dx}{x^2+1}$. 11. $\int\limits_{0}^{+\infty} x\cos x\,dx$. 12. $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^{x}dx$.

Исследовать на сходимость интегралы:

13. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{x^3+1}$. 14. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin xdx}{x^2}$. 15. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)e^x}$.

16. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}}$. 17. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos 2x\,dx}{x^2+4}$. 18. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{5+\sin x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

19. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^4-1}}$. 20. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$. 21. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+\cos^2 x}$.

2.2. Несобственные интегралы от неограниченных функций (второго рода)

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную на конечном промежутке $[a;b)$, интегрируемую на любом промежутке $[a;b-\varepsilon]$, где $0<\varepsilon<b-a$, а, следовательно, ограниченную на этом промежутке, но неограниченную на промежутке $[a;b)$. Это означает, что функция $f(x)$ неограничена в окрестности $(b-\varepsilon;b)$ точки b. Точку b называют ***особой точкой*** функции (рис. 2.2).

Определение 1. Несобственным интегралом второго рода функции $f(x)$ на промежутке $[a;b)$ называют предел $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$ и обозначают

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx . \tag{2.4}$$

Если предел конечен, то интеграл называется ***сходящимся***. Если же предел бесконечен или не существует, то интеграл называется ***расходящимся***.

Рассмотрим теперь функцию $f(x)$, определенную на конечном промежутке $(a;b]$, интегрируемую на любом отрезке $[a+\varepsilon;\, b], \varepsilon>0$, но неограниченную в окрестности точки a, т.е. точка a является ***особой точкой*** функции $f(x)$ (рис. 2.3).

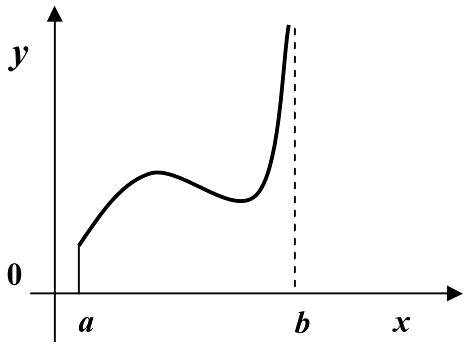


Рис. 2.2

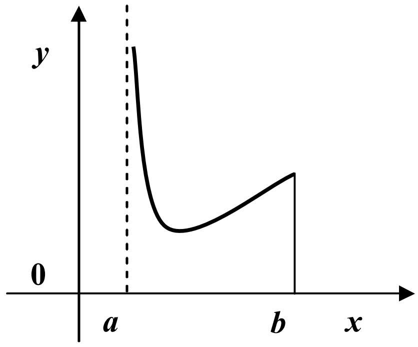


Рис. 2.3

Определение 2. Несобственным интегралом второго рода функции $f(x)$ на промежутке $(a;b]$ называют предел $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ и обозначают:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \ . \qquad (2.5)$$

Сходимость (расходимость) интеграла в этом случае определяется так же, как и для интеграла (2.4).

Другие возможные случаи расположения особых точек могут быть сведены к уже рассмотренным.

Пусть, например, функция $f(x)$ неограничена в окрестности точки $x = c$, которая находится между точками a и b $(a < c < b)$. В других частях отрезка $[a;b]$ функция $f(x)$ интегрируема. Точка c является ***особой точкой*** функции (рис. 2.4). Тогда данный интеграл представляют в виде суммы двух несобственных интегралов $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{a}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{b} f(x)dx$, каждый из которых был определен ранее.

Таким образом:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{a}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx . \qquad (2.6)$$

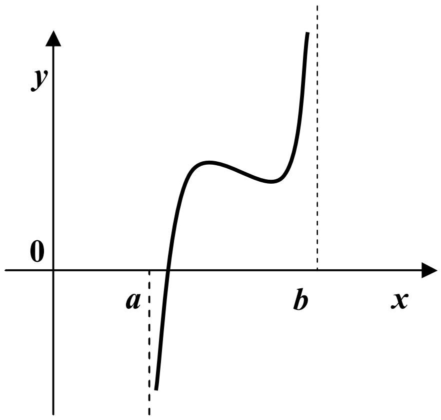


Рис. 2.4

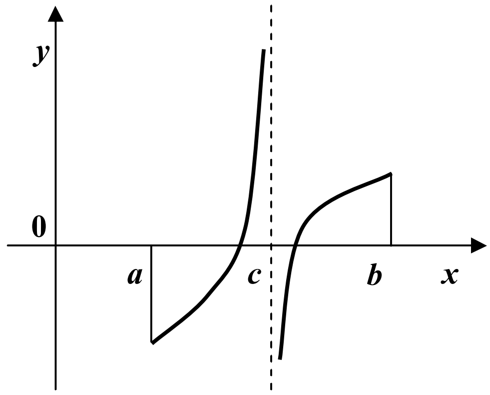


Рис. 2.5

Если особыми точками функции $f(x)$ являются обе точки a и b (рис. 2.5), и других особых точек между ними нет, то в этом случае полагают: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, где c – произвольная точка интервала $(a;b)$.

Учитывая определения 1 и 2, получим:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^c f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_c^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad (2.7)$$

При этом если оба предела в формулах (2.6) и (2.7) существуют и конечны, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ ***сходится***. Если же хотя бы один из пределов бесконечен или не существует, то говорят, что несобственный интеграл ***расходится***.

Геометрический смысл несобственного интеграла второго рода аналогичен геометрическому смыслу несобственного интеграла первого рода, а именно: сходящийся интеграл от неотрицательной функции численно равен площади бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной графиком этой функции и прямыми $x=a$ и $x=b$. В этом случае бесконечность трапеции обусловлена неограниченностью подынтегральной функции (рис. 2.6).

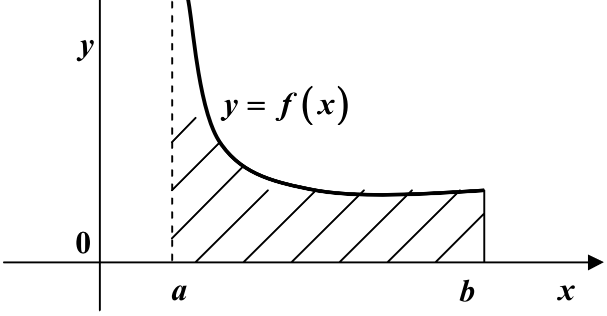


Рис. 2.6

Пример 2.2.1. Вычислить интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$; б) $\int\limits_{-6}^{-2} \frac{dx}{x+2}$; в) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}$;

г) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; д) $\int\limits_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$; е) $\int\limits_0^1 \ln x dx$.

Решение

а) Подынтегральная функция непрерывна на промежутке $(0;1]$. В точке $x=0$ функция имеет бесконечный разрыв. Итак, это несобственный интеграл второго рода. По формуле (2.5) будем иметь:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\lim_{\varepsilon\to+0}\sqrt{x}\,\Big|_{\varepsilon}^{1} = 2\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\sqrt{1}-\sqrt{\varepsilon}\right) = 2\lim_{\varepsilon\to+0}1 - 2\lim_{\varepsilon\to+0}\sqrt{\varepsilon} =$$

$$= 2\cdot 1 - 2\cdot 0 = 2.$$

Предел конечен, следовательно, несобственный интеграл сходится и равен 2.

б) Подынтегральная функция непрерывна на промежутке $[-6;-2)$.В точке $x=-2$ функция имеет бесконечный разрыв. Применим формулу (2.4):

$$\int\limits_{-6}^{-2} \frac{dx}{x+2} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-6}^{-2-\varepsilon} \frac{dx}{x+2} = \lim_{\varepsilon\to+0}\ln|x+2|\Big|_{-6}^{-2-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln|-2-\varepsilon+2| - \ln|-6+2|\right) =$$

$= \lim\limits_{\varepsilon\to+0}(\ln\varepsilon - \ln 4) = -\infty$, так как $\ln\varepsilon \to -\infty$ при $\varepsilon\to+0$.

Предел бесконечен, интеграл расходится.

в) Подынтегральная функция непрерывна на отрезке $[0;3]$ всюду, за исключением точки $x = 2\in[0;3]$, в которой терпит бесконечный разрыв. В этом случае интеграл вычислим по формуле (2.6):

$$\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2} = \int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-2)^2} + \int\limits_2^3 \frac{dx}{(x-2)^2} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{(x-2)^2} + \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{2+\varepsilon}^3 \frac{dx}{(x-2)^2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\frac{1}{x-2}\right)\Bigg|_0^{2-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\frac{1}{x-2}\right)\Bigg|_{2+\varepsilon}^{3} = -\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{2-\varepsilon-2} - \frac{1}{0-2}\right) -$$

$$-\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{3-2} - \frac{1}{2+\varepsilon-2}\right) = -\lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{2}\right) - \lim_{\varepsilon\to+0}\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{2}\right) +$$

$+\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) = \infty+\infty$ (при $\varepsilon\to+0$ $\frac{1}{\varepsilon}\to\infty$).

Как видим, оба предела бесконечны, наш интеграл расходится.

г) Подынтегральная функция непрерывна на промежутке $\left(-1;1\right)$. В точках $x=-1$ и $x=1$ функция имеет бесконечные разрывы. Применим формулу (2.7):

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-1+\varepsilon}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{0}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\arcsin x\right)\Big|_{-1+\varepsilon}^{0}+\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\arcsin x\right)\Big|_{0}^{1-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\arcsin 0-\arcsin\left(-1+\varepsilon\right)\right]+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\arcsin\left(1-\varepsilon\right)-\arcsin 0\right]=\left(\arcsin 0+\arcsin 1\right)+\left(\arcsin 1-\arcsin 0\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}.$$

Оба предела конечны, несобственный интеграл сходится и равен π.

д) Очевидно, что подынтегральная функция имеет особую точку $x=0$. По формуле (2.5) запишем: $\int_{0}^{1}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{0+\varepsilon}^{1}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$.

Вычислим интеграл отдельно: $\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx=\left|\begin{matrix}1/x=t\\ -dt/x^2=dt\end{matrix}\right|=-\int e^t dt=-e^t+C=$

$=-e^{\frac{1}{x}}+C$.

Тогда $\lim_{\varepsilon\to+0}\left(-e^{\frac{1}{x}}\right)\Bigg|_{\varepsilon}^{1}=-\lim_{\varepsilon\to+0}\left(e^1-e^{\frac{1}{\varepsilon}}\right)=-e+\lim_{\varepsilon\to+0}e^{\frac{1}{\varepsilon}}=\infty$, ($e^{\frac{1}{\varepsilon}}\to+\infty$ при $\varepsilon\to+0$).

Следовательно, наш интеграл расходится.

е) Для функции $f\left(x\right)=\ln x$ точка $x=0$ является особой, тогда $\int_{0}^{1}\ln x dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{0+\varepsilon}^{1}\ln x dx$.

Вычислим интеграл, применяя метод интегрирования по частям:

$$\int_{\varepsilon}^{1}\ln x dx=\left|\begin{matrix}u=\ln x\Rightarrow du=\dfrac{dx}{x}\\ dv=dx\Rightarrow v=x\end{matrix}\right|=x\cdot\ln x\Big|_{\varepsilon}^{1}-\int_{\varepsilon}^{1}x\cdot\frac{dx}{x}=1\cdot\ln 1-\varepsilon\ln\varepsilon-\int_{\varepsilon}^{1}dx=$$

$$=0-\varepsilon\ln\varepsilon-x\Big|_{\varepsilon}^{1}=-\varepsilon\ln\varepsilon-1+\varepsilon.$$

Возвращаясь к пределу, получим: $\lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\varepsilon\ln\varepsilon-1+\varepsilon\right)=-1-\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\ln\varepsilon=$

$$= -1 - \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\ln \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = -1 - \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1/\varepsilon}{-1/\varepsilon^2} = -1 + \lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon = -1 + 0 = -1.$$

(при вычислении предела использовали правило Лопиталя).

Как видим, предел конечный, интеграл сходится и равен -1.

Сформулированные в п. 2.1 признаки сходимости несобственных интегралов первого рода остаются справедливыми и для несобственных интегралов второго рода. Заметим, что при исследовании на сходимость интегралов с помощью признаков сравнения часто используют интегралы $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ и $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$, в случаях, когда особыми точками подынтегральной функции являются точки $x = a$ и $x = b$ соответственно. Эти интегралы ведут себя так:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} - \begin{cases} \text{сходится, если} \quad 0 < \alpha < 1, \\ \text{расходится, если} \quad \alpha \geq 1. \end{cases}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} - \begin{cases} \text{сходится, если} \quad 0 < \alpha < 1, \\ \text{расходится, если} \quad \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Пример 2.2.2. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

а) $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$; б) $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$; в) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cos^2 \frac{1}{x} dx$;

г) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + 2x^3}$; д) $\int_0^1 \frac{dx}{\sin x}$; е) $\int_0^2 \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Решение

а) Подынтегральная функция на промежутке интегрирования имеет особую точку $x = 2$. Для функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ выберем для сравнения функцию $g(x) = \frac{1}{(x-2)^{1/2}}$, интеграл от которой $\int_2^3 \frac{dx}{(x-2)^{1/2}}$ сходится $\left(\alpha = \frac{1}{2} < 1 \right)$. Для любого $x \in [2;3]$ верно неравенство:

$\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}=\frac{1}{\sqrt{(x-2)\cdot(x+2)}}<\frac{1}{(x-2)^{1/2}}$. Тогда, по признаку сравнения, из сходимости интеграла $\int\limits_2^3\frac{dx}{(x-2)^{1/2}}$ следует сходимость интеграла $\int\limits_2^3\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$.

б) Особой точкой подынтегральной функции $f(x)=\frac{1}{\ln x}$ является точка $x=0$. Рассмотрим функцию $g(x)=\frac{1}{x-1}$, для которой интеграл $\int\limits_1^2\frac{dx}{x-1}$ расходится $(\alpha=1)$. Для любого $x\in[1;2]$ верно неравенство: $\frac{1}{\ln x}>\frac{1}{x-1}$. Тогда, в силу признака сравнения, из расходимости интеграла $\int\limits_1^2\frac{dx}{x-1}$ следует расходимость интеграла $\int\limits_1^2\frac{dx}{\ln x}$.

в) Подынтегральная функция в точке $x=0$ имеет бесконечный разрыв. Примем во внимание, что $0\le\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\cos^2\frac{1}{x}\le\frac{1}{\sqrt{x}}$, а интеграл $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится $\left(\alpha=\frac{1}{2}<1\right)$. Применяя признак сравнения, получим, что сходится и интеграл $\int\limits_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\cos^2\frac{1}{x}dx$.

г) Подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв в точке $x=0$. Очевидно, что при $x\ge 0$ $\frac{1}{\sqrt[3]{x}+2x^3}\le\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Интеграл $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ сходится $\left(\alpha=\frac{1}{3}<1\right)$. Из признака сравнения следует, что тогда сходится и интеграл $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2x^3}$.

д) Как видим, $x=0$ – особая точка подынтегральной функции. Рассмотрим для сравнения функцию $g(x)=\frac{1}{x}$ и найдем предел отношения функций $f(x)$ и $g(x)$: $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x}{\sin x}=1$. Предел конечен, значит, интегралы от этих функций имеют одинаковый характер сходимости. Интеграл $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{x}$ расходится, так как $\alpha=1$, следовательно, расходится и интеграл $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{\sin x}$.

е) Подынтегральная функция имеет особую точку $x=0$. Исследуем интеграл на абсолютную сходимость. Для всех $x\in[0;2]$ имеет место неравенство: $\left|\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{x^2}}\right|\le\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. Интеграл $\int\limits_0^2\dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ сходится $\left(\alpha=\dfrac{2}{3}<1\right)$, тогда, в силу признака сравнения, сходится интеграл $\int\limits_0^2\left|\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{x^2}}\right|dx$. Можем сделать вывод, что интеграл $\int\limits_0^2\dfrac{\cos x dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ сходится абсолютно.

Задания для самостоятельной работы

Вычислить интегралы или установить их расходимость:

1. $\int\limits_{-1}^1\dfrac{dx}{x^4}$. 2. $\int\limits_{-3}^2\dfrac{dx}{(x+3)^2}$. 3. $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{x-1}}$.

4. $\int\limits_0^1\dfrac{x^3+1}{\sqrt{x}}dx$. 5. $\int\limits_0^2\dfrac{dx}{x^2-4x+3}$. 6. $\int\limits_0^{1/2}\dfrac{dx}{1-4x+4x^2}$.

7. $\int\limits_{-\pi/2}^0\dfrac{\operatorname{tg} x dx}{\cos^2 x}$. 8. $\int\limits_{-1}^0\dfrac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$. 9. $\int\limits_0^1 x\cdot\ln x dx$.

Исследовать на сходимость интегралы:

10. $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{\sin x}$. 11. $\int\limits_0^3\dfrac{dx}{2x^2+x^4}$. 12. $\int\limits_1^2\dfrac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$.

13. $\int\limits_0^1\dfrac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^2}}$. 14. $\int\limits_0^1\dfrac{\sin dx}{\sqrt{x^3}}$. 15. $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

3. ПРИМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

3.1. Вычисление площадей плоских фигур

Вычисление площадей плоских фигур основано на геометрическом смысле определенного интеграла. Пусть $f(x)$ – положительная непрерывная функция, заданная на отрезке $[a;b]$. Тогда определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=f(x)$ и прямыми $x=a,\ x=b,\ y=0$ (рис. 3.1):

$$S=\int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{3.1}$$

В случае, когда $f(x)<0$ на $[a;b]$ (рис.3.2) применяют формулу:

$$S=\int\limits_a^b\left[-f(x)\right]dx=-\int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{3.2}$$

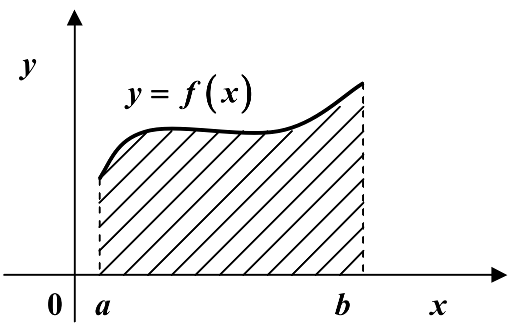


Рис. 3.1

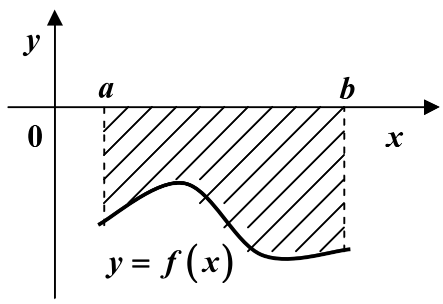


Рис. 3.2

Если функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ конечное число раз меняет знак (рис. 3.3), то используют формулу

$$S=\int\limits_a^b\left|f(x)\right|dx. \tag{3.3}$$

Площадь фигуры, ограниченной линиями $y=f_1(x)$ та $y=f_2(x)$ и прямыми $x=a,\quad x=b$ при условии, что $f_2(x)\geq f_1(x)$ (рис. 3.4) находят по формуле

$$S=\int\limits_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx. \tag{3.4}$$

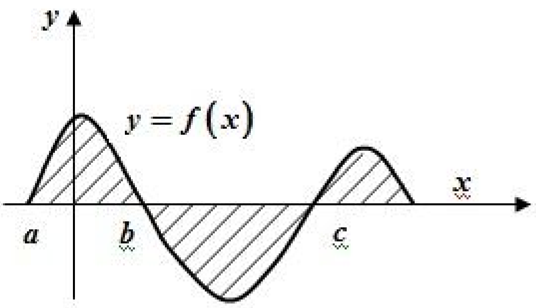


Рис. 3.3

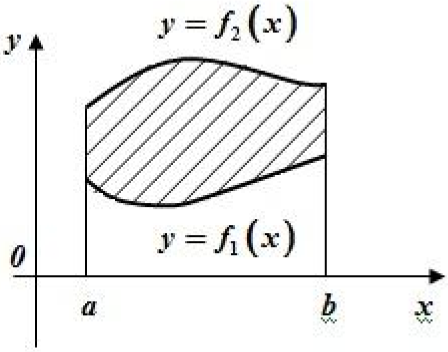


Рис. 3.4

Пусть теперь криволинейная трапеция ограничена кривой $\boldsymbol{x = \psi(y)}$ $\boldsymbol{(\psi(y) > 0)}$ и прямыми $\boldsymbol{y = c, y = d, x = 0}$ (рис. 3.5). Тогда площадь этой трапеции равна

$$\boldsymbol{S = \int_c^d \psi(y)\,dy}. \tag{3.5}$$

В случае, когда фигура ограничена кривыми $\boldsymbol{x = \psi_1(y)}$ и $\boldsymbol{x = \psi_2(y)}$ (рис. 3.6), ее площадь находят по формуле

$$\boldsymbol{S = \int_c^d \left[\psi_2(y) - \psi_1(y)\right] dy}. \tag{3.6}$$

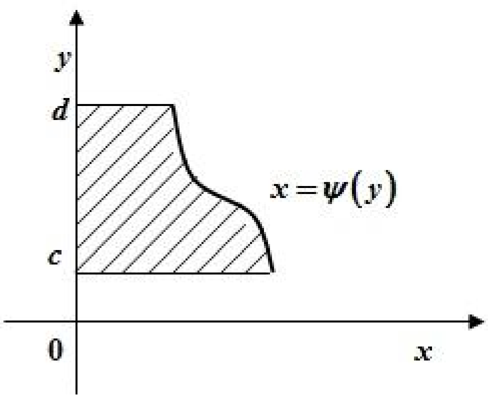


Рис. 3.5

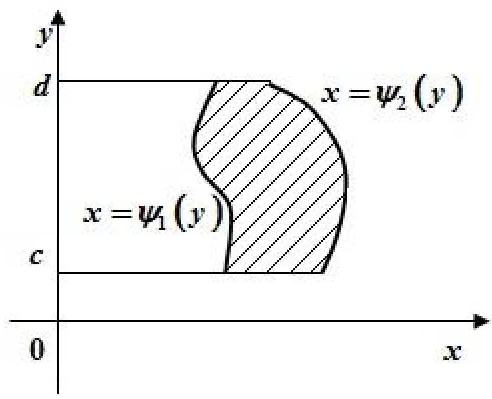


Рис. 3.6

Если кривая задана ***параметрическими уравнениями*** $\boldsymbol{x = x(t),\ \ y = y(t),\quad t_1 < t < t_2}$, где $\boldsymbol{x(t),\ y(t)}$ – непрерывные функции, которые имеют непрерывные производные на отрезке $[t_1;t_2]$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми $x=a,\quad x=b$ и отрезком $[a;b]$ оси Ox, определяется по формуле

$$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot x'(t)\,dt, \tag{3.7}$$

где t_1 и t_2 – значения параметра t, при которых $x(t_1)=a,\quad x(t_2)=b$.

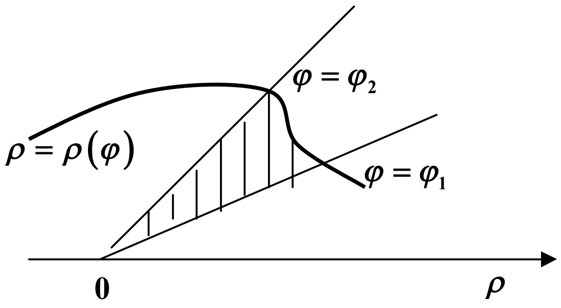


Рис. 3.7

В ***полярной системе координат*** площадь криволинейного сектора, ограниченного непрерывной кривой $\rho=\rho(\varphi),\quad \varphi\in[\varphi_1;\varphi_2]$, и соответствующими отрезками лучей $\varphi=\varphi_1,\quad \varphi=\varphi_2$ (рис. 3.7), равна

$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi)\,d\varphi. \tag{3.8}$$

Отметим, что площадь всякой плоской фигуры всегда может быть составлена из площадей криволинейных трапеций (сегментов).

Пример 3.1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=3x+1,\ x=0,\ x=2,\ y=0$; б) $y=3^x,\ y=0,\ x=1,\ x=2$;

в) $y=x^3,\ x=-1,\ x=0,\ y=0$; г) $y=\sin x,\ x=-\frac{\pi}{4},\ x=\frac{7\pi}{6},\ y=0$;

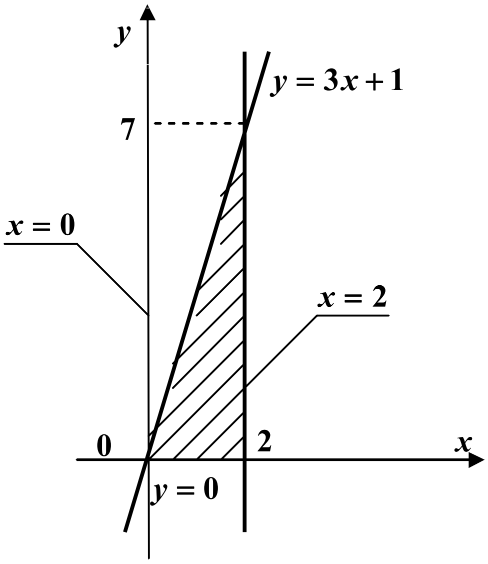
д) $y=x,\quad y=2x,\quad x=3$; е) $y=\sqrt{x-1},\ x-y+1=0,\ x=1,\ x=5$;

ж) $y=x^2,\ y=4$; з) $y=\frac{4}{x},\ x+y-5=0$;

и) $y=x^2,\ y=\frac{1}{x^2},\ x=2,\ y=0$.

Решение

а) Построим данные линии и определим фигуру, площадь которой требуется найти.

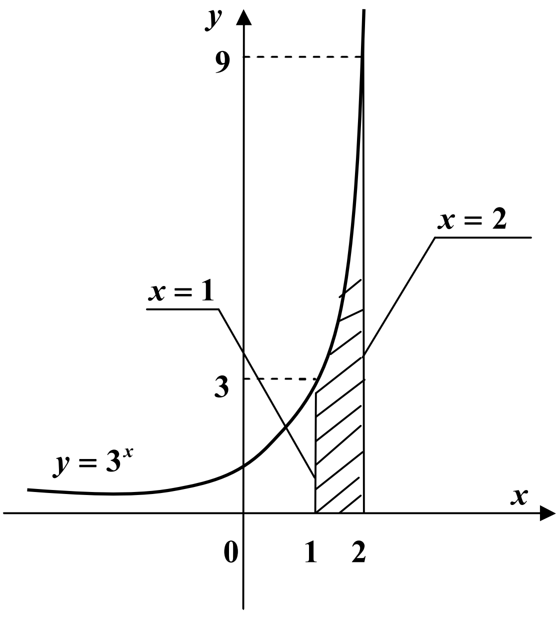


Для вычисления площади используем формулу (3.1):

$$S=\int_0^2 (3x+1)dx=\left(\frac{3x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot 2^2+2=8 \text{ (кв. ед.).}$$

б) Изобразим фигуру, ограниченную данными линиями.

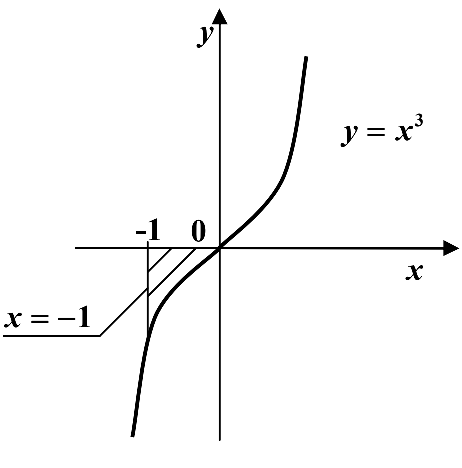


Тогда по формуле (3.1) площадь этой фигуры равна: $S=\int_1^2 3^x dx=$

$$=\frac{3^x}{\ln 3}\Bigg|_1^2=\frac{1}{\ln 3}\left(3^2-3^1\right)=$$

$$=\frac{6}{\ln 3} \text{ (кв. ед.).}$$

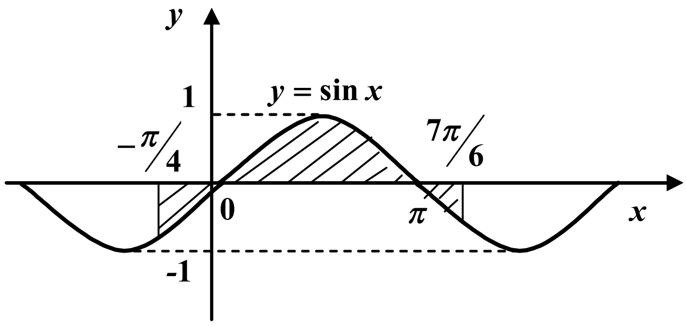
в) Фигура ограничена кубической параболой $y=x^3$, прямой $x=-1$ и осью Ox. На отрезке $[-1;0]$ функция $y=x^3$ принимает отрицательные значения, поэтому для вычисления площади фигуры следует воспользоваться формулой (3.2):



$$S=-\int_{-1}^0 x^3dx=-\frac{x^4}{4}\Bigg|_{-1}^0=-\frac{1}{4}\left(0-(-1)^4\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\text{(кв.ед.).}$$

г) Построим синусоиду и прямые $x=-\frac{\pi}{4}$ и $x=\frac{7\pi}{6}$. Как видим, на



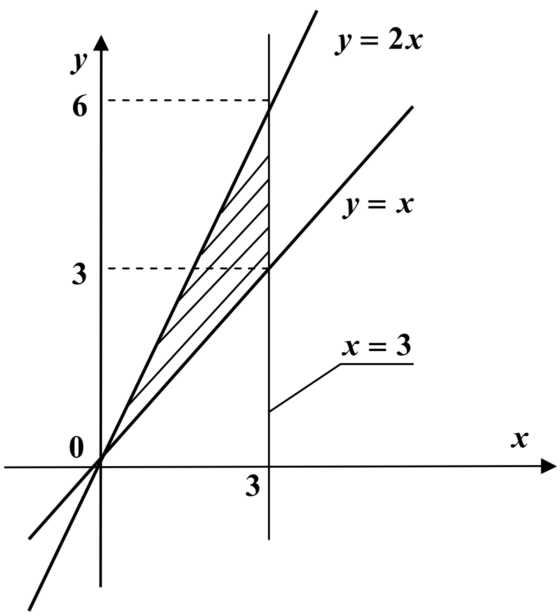
отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{6}\right]$ функция $y=\sin x$ дважды меняет знак (в точках $x=0$ и $x=\pi$). Для вычисления площади используем формулу (3.3):

$$S=\int_{-\pi/4}^{7\pi/6}|\sin x|dx=-\int_{-\pi/4}^{0}\sin xdx+\int_{0}^{\pi}\sin xdx-\int_{\pi}^{7\pi/6}\sin xdx=\cos x\Big|_{-\pi/4}^{0}-$$

$$-\cos x\Big|_{0}^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{7\pi/6}=\left(\cos 0-\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)-\left(\cos\pi-\cos 0\right)+\left(\cos\frac{7\pi}{6}-\cos\pi\right)=$$

$$=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(-1-1\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\left(8-\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$$ (кв.ед.).

д) Построим данные прямые.

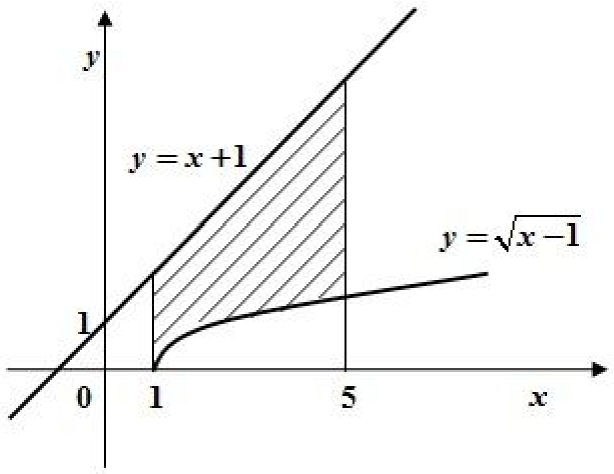


На отрезке $[0;3]$ фигура ограничена сверху прямой $y=2x$, снизу прямой $y=x$. Тогда ее площадь найдем по формуле (3.4):

$$S=\int_{0}^{3}\left(2x-x\right)dx=\int_{0}^{3}xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{3}=\frac{3^2-0}{2}=$$

$$=\frac{9}{2}$$ (кв. ед.).

е) На отрезке $[1;5]$ фигура ограничена сверху прямой $y=x+1$, снизу – верхней веткой параболы $y^2=x-1$, то есть графиком функции $y=\sqrt{x-1}$. Площадь этой фигуры вычислим по формуле (3.4):



$$S=\int_1^5\left(x+1-\sqrt{x-1}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+x-\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{3/2}\right)\Bigg|_1^5=$$

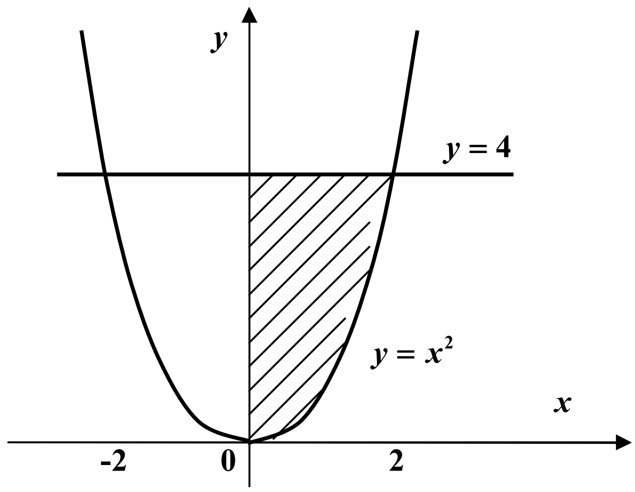
$$=\left(\frac{5^2}{2}+5-\frac{2}{3}\sqrt{(5-1)^3}\right)-$$

$$-\left(\frac{1^2}{2}+1-\frac{2}{3}\sqrt{(1-1)^3}\right)=$$

$$=\left(\frac{25}{2}+5-\frac{16}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{32}{3}\text{ (кв.ед.).}$$

ж) Фигура ограничена параболой $y=x^2$ и прямой $y=4$.

Чтобы найти пределы интегрирования, найдем абсциссы точек пересечения графиков этих функций:



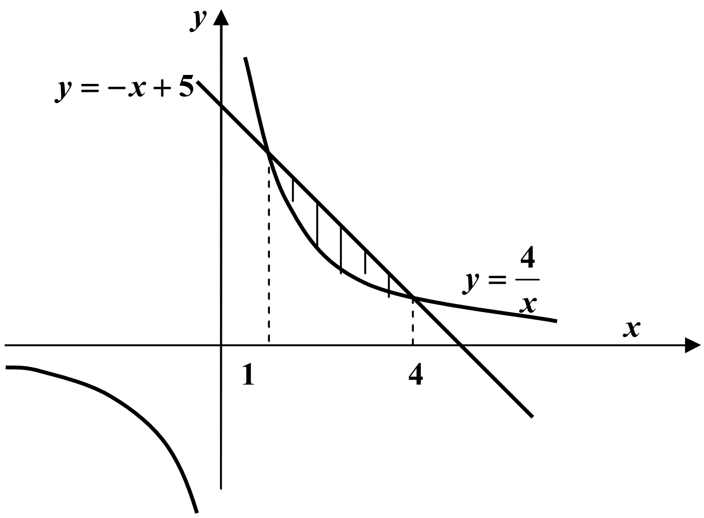
$\begin{cases} y=x^2 \\ y=4 \end{cases}$, откуда $x^2=4$, $x=\pm 2.$

Фигура симметрична относительно оси Oy. Вычислим площадь ее правой половины и удвоим полученный результат. Будем иметь:

$$S=2\cdot\int_0^2\left(4-x^2\right)dx=2\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=2\left(4\cdot 2-\frac{2^3}{3}\right)-2\left(4\cdot 0-\frac{0^3}{3}\right)=\frac{32}{3}\text{ (кв. ед.).}$$

з) Фигура ограничена гиперболой $y=\dfrac{4}{x}$ и прямой $x+y-5=0$.

Построим эти линии и найдем абсциссы их точек пересечения, решив систему уравнений: $\begin{cases} y=\dfrac{4}{x} \\ y=-x+5 \end{cases}$. Тогда $\dfrac{4}{x}=-x+5$ или $x^2-5x+4=0\Rightarrow x_1=1,\ x_2=4$.



Значит, $S=\int\limits_1^4\left(-x+5-\frac{4}{x}\right)dx=$

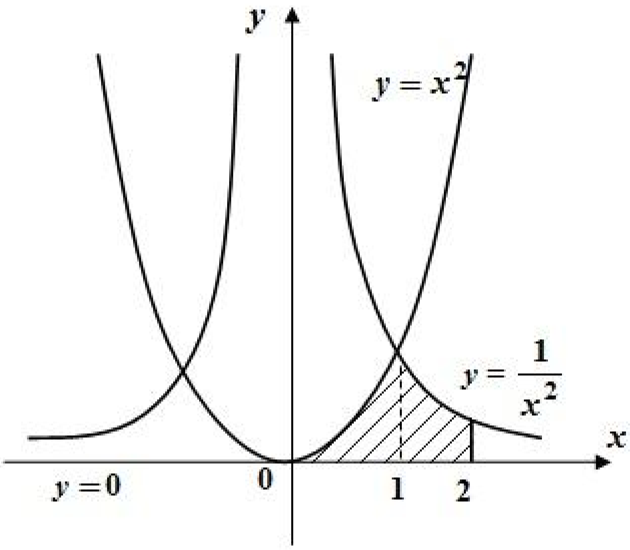
$=\left(-\frac{x^2}{2}+5x-4\ln|x|\right)\Bigg|_1^4=$

$=\left(-\frac{4^2}{2}+5\cdot 4-4\ln 4\right)-$

$-\left(-\frac{1^2}{2}+5\cdot 1-4\ln 1\right)=12-4\ln 4+$

$+\frac{1}{2}-5=7{,}5-4\ln 4$ (кв. ед.).

и) Сделаем чертеж и найдем точки пересечения графиков:



$\begin{cases} y=x^2 \\ y=\dfrac{1}{x^2} \end{cases}$, тогда $x^2=\frac{1}{x^2}$,

$x^4=1$, откуда $x=\pm 1$.

Как видим, фигура расположена в I четверти, поэтому выберем $x=1$. Заметим, что на отрезке $[0;2]$ наша фигура ограничена сверху разными линиями: для $0\le x\le 1$ – кривой $y=x^2$, а для $1\le x\le 2$ – кривой $y=\frac{1}{x^2}$. Поэтому площадь всей фигуры найдем как сумму двух площадей, каждую из которых вычислим по формуле (3.1): $S=S_1+S_2$,

где $S_1=\int\limits_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}$ (кв. ед.), $S_2=\int\limits_1^2\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Bigg|_1^2=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$ (кв. ед.).

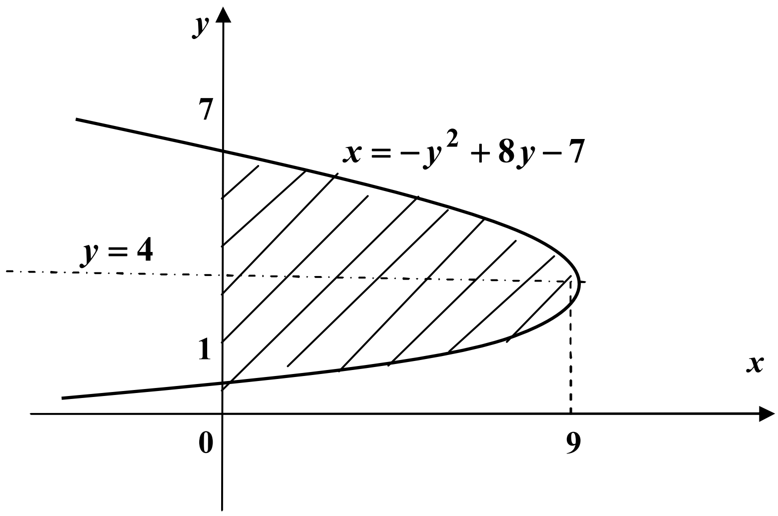
Получим: $S=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$ (кв. ед.).

Пример 3.2. Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями:

а) $x = -y^2 + 8y - 7, \quad x = 0$; б) $y = x - 1, \; y = -1, \; y = \ln x$.

Решение

а) Фигура ограничена параболой $x = -y^2 + 8y - 7$ и осью Oy. Для построения параболы приведем ее уравнение к каноническому виду: $x = -\left(y^2 - 8y + 16\right) + 16 - 7,$ тогда $x - 9 = -(y - 4)^2$.



Парабола симметрична относительно прямой $y = 4$ и имеет вершину в точке $(9;4)$.

Точки пересечения с осью Oy: $\begin{cases} x = -y^2 + 8y - 7 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow$

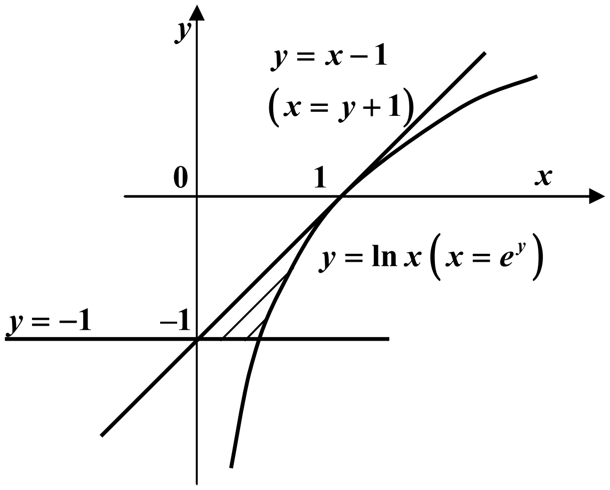
$y^2 - 8y + 7 = 0 \Rightarrow y_1 = 1, y_2 = 7$.

Вычислим площадь с применением формулы (3.5):

$$S = \int_1^7 \left(-y^2 + 8y - 7\right) dy = \left(-\frac{y^3}{3} + 8 \cdot \frac{y^2}{2} - 7y\right)\Bigg|_1^7 = \left(-\frac{7^3}{3} + 4 \cdot 7^2 - 7 \cdot 7\right) -$$

$$-\left(-\frac{1^3}{3} + 4 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1\right) = -\frac{343}{3} + 196 - 49 + \frac{1}{3} + 3 = 36 \text{ (кв. ед.)}.$$

б) Построим данные линии. Как видим, на отрезке $x \in [0;1]$ фигура снизу ограничена двумя разными линиями и для вычисления площади по формуле (3.4) ее необходимо разбить на части. Вычисление площади с помощью формулы (3.6) будет более простым. Для этого запишем уравнения линий в виде: $x = e^y$ и $x = y + 1$ и найдем ординаты точек их пересечения, решив систему уравнений:



$\begin{cases} x = e^y \\ x = y + 1 \end{cases}$, откуда $e^y = y + 1$.

Очевидно, что $y = 0$ является решением уравнения. Тогда вычислим площадь фигуры, ограниченной справа линией $x = e^y$, а слева – прямой $x = y + 1$. При этом y изменяется от **-1** до **0**. Получим:

$$S = \int_{-1}^{0} \left(e^y - y - 1\right) dy = \left(e^y - \frac{y^2}{2} - y\right)\Bigg|_{-1}^{0} = \left(e^0 - \frac{0^2}{2} - 0\right) - \left(e^{-1} - \frac{(-1)^2}{2} - (-1)\right) =$$

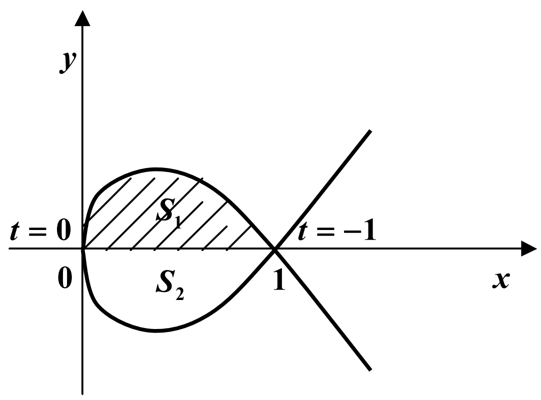
$$= \frac{e - 2}{2e} \text{ (кв.ед.).}$$

Пример 3.3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией:

а) $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t\left(t^2 - 1\right); \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t. \end{cases}$

Решение

а) Линия задана параметрическими уравнениями и определяет кривую, называемую ***петлей***. Площадь этой фигуры состоит из двух симметричных относительно оси Ox частей, поэтому $S_1 = S_2$. Верхней части петли соответствует изменение параметра t от **0** до **–1**. Вычислим площадь S_1, используя формулу (3.7), где $x' = 2t$:

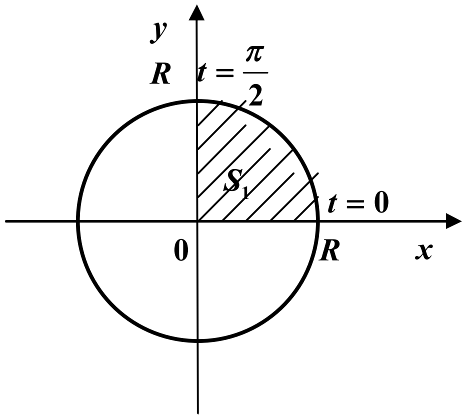


$$S_1 = \int_{0}^{-1} t\left(t^2 - 1\right) \cdot 2t dt = 2\int_{0}^{-1} \left(t^4 - t^2\right) dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{-1} = 2\left(\frac{(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^3}{3}\right) - 0 = \frac{4}{15}.$$

Тогда искомая площадь равна $S = 2S_1 = \dfrac{8}{15}$ (кв.ед.).

б) Уравнения $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ описывают ***окружность*** с центром в точке $(0;0)$ и радиусом R. Найдем площадь S_1 четверти круга, ограниченного этой окружностью, которая расположена в первой четверти. Чтобы воспользоваться формулой (3.7), найдем $x' = -R\sin x$. Параметр t при этом изменяется от $\dfrac{\pi}{2}$ до **0**.



Тогда $S_1 = \frac{S}{4} = \int_{\pi/2}^{0} R\sin t \cdot \left(-R\sin t\right)dt =$

$$= -R^2 \int_{\pi/2}^{0} \sin^2 t dt = R^2 \int_{0}^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(1-\cos 2t\right)dt =$$

$$= \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin 2\cdot\frac{\pi}{2}\right) - \frac{R^2}{2}\left(0 - \frac{1}{2}\sin 2\cdot 0\right) = \frac{\pi R^2}{4}.$$

Тогда $S = \pi R^2$.

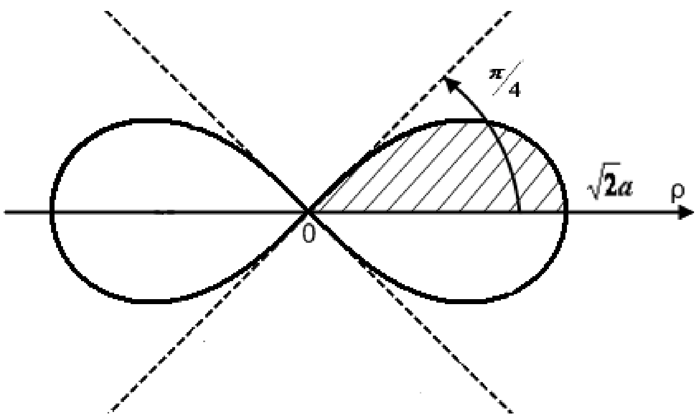
Пример 3.4. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$; б) $\rho = a\sin 3\varphi$.

Решение

а) Уравнение $\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ определяет ***лемнискату Бернулли***.

Проследим, как изменяется угол φ, когда радиус-вектор точки на кривой описывает четверть искомой площади.



При $\rho_1 = a\sqrt{2}$ получим: $2a^2\cos 2\varphi = 2a^2$, значит $\cos 2\varphi = 1$, откуда $\varphi_1 = 0$.

При $\rho_2 = 0$: $2a^2\cos 2\varphi = 0$, $\cos 2\varphi = 0$, откуда $\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$.

Таким образом, на четверти площади полярный угол изменяется в пределах от 0 до $\frac{\pi}{4}$. Тогда по формуле (3.8):

$$\frac{S}{4} = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/4} 2a^2\cos 2\varphi \, d\varphi = a^2 \cdot \frac{1}{2}\sin 2\varphi \Bigg|_{0}^{\pi/4} = \frac{a^2}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = \frac{a^2}{2}.$$

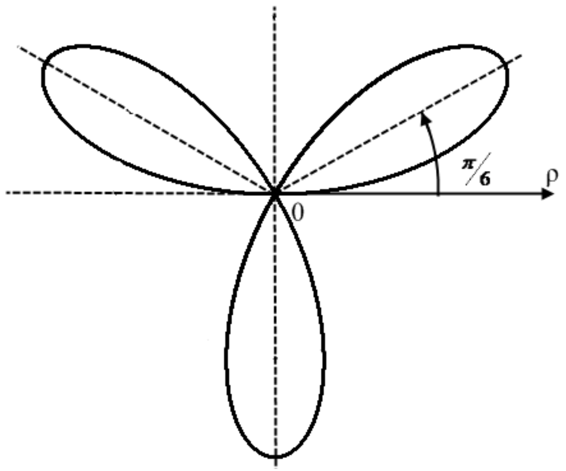
Вся площадь $S = 4\cdot\frac{a^2}{2} = 2a^2$ (кв. ед.).

Замечание. Кривые, заданные уравнениями $\rho = a\sin k\varphi$ (или $\rho = a\cos k\varphi$), где a и k – постоянные величины, называются ***розами***. Если k – четное число, то кривая имеет $2k$ лепестков, если k – нечетное число, то кривая имеет k лепестков. Чтобы найти площадь одного лепестка, определим, как изменяется полярный угол φ, когда радиус-вектор описывает эту площадь:

при $\rho = 0$ получим, что $a\sin k\varphi = 0$, $\sin k\varphi = 0$, значит $k\varphi = \pi n$, откуда $\varphi = \dfrac{\pi n}{k}$, $n \in Z$. Полагая $n = 0$, находим $\varphi = 0$, а для $n = 1$ определяем $\varphi = \dfrac{\pi}{k}$.

Установили, что угол φ изменяется от 0 до $\dfrac{\pi}{k}$.

б) Линия $\rho = a\sin 3\varphi$ определяет трехлепестковую розу. Описывая площадь одного лепестка, радиус-вектор пробегает угол от 0 до $\dfrac{\pi}{3}$.



Тогда $S = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/3} a^2 \sin^2 3\varphi \, d\varphi =$

$$= \frac{1}{2}a^2 \int\limits_0^{\pi/3} \frac{1 - \cos 6\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{4}a^2 \left(\varphi - \frac{1}{6}\sin 6\varphi \right)\Bigg|_0^{\pi/3} = \frac{1}{4}a^2 \left[\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{6}\sin 2\pi \right) - 0 \right] =$$

$$= \frac{1}{4}a^2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi a^2}{12} \text{ (кв. ед.).}$$

Задания для самостоятельной работы

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

1. $y = 3x - x^2$, $y = 0$;
2. $y = \sqrt{x - 1}$, $y = x + 1$, $x = 1$, $x = 3$;
3. $y = -x^2 + 4$, $y + x - 2 = 0$;
4. $y = \cos x$, $y = \sin x$, $x = 0$;
5. $xy = 4$, $y = 3x + 1$, $y = 1$;
6. $y^2 + 8x = 16$, $y^2 - 24x = 48$;
7. $\begin{cases} x = 3\cos t - \cos 3t \\ y = 3\sin t - \sin 3t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$;
8. $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 1$;
9. $\rho = 2 + \cos\varphi, 0 \le \varphi \le 2\pi$;
10. $\rho = 4\sin 2\varphi$.

3.2. Вычисление длины дуги плоской кривой

Длиной дуги плоской кривой называют величину $L=\int\limits_a^b dl$, где dl – дифференциал дуги, определяемый в зависимости от способа задания кривой.

Пусть кривая задана уравнением $y=f(x)$, $x\in[a;b]$, причем $f(x)$ непрерывна вместе со своей производной на $[a;b]$. Тогда длина дуги кривой определяется формулой

$$L=\int\limits_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx. \tag{3.9}$$

В случае, когда кривая задается уравнением $x=\varphi(y),\ y\in[c;d]$ длина дуги кривой вычисляется так:

$$L=\int\limits_c^d\sqrt{1+\left[\varphi'(y)\right]^2}\,dy. \tag{3.10}$$

Когда кривая задается параметрическими уравнениями $x=x(t),\ y=y(t),\ t_1\le t\le t_2$, длина дуги равна

$$L=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}\,dt. \tag{3.11}$$

Если же гладкая кривая задана в полярных координатах уравнением $\rho=\rho(\varphi),\ \varphi_1\le\varphi\le\varphi_2$, то

$$L=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2(\varphi)+\left[\rho'(\varphi)\right]^2}\,d\varphi. \tag{3.12}$$

Пример 3.5. Найти длины дуг кривых:

а) $y^2=x^3$ от точки $x=0$ до $x=1$ ($y\ge 0$);

б) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ от точки $x_1=0$ до $x_2=1$;

в) $x=-\ln\cos y$ от точки $y=0$ до $y=\dfrac{\pi}{3}$.

Решение

а) Из условия находим, что $y=x^{\frac{3}{2}}$, тогда $y'=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$.

Для нахождения длины дуги по формуле (3.9) вычислим dL: $dL=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx$. Тогда

$$L=\int_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\cdot\frac{\left(1+{}^9\!/_4\,x\right)^{3/2}}{{}^3\!/_2}\Bigg|_0^1=\frac{8}{27}\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^3}\,\Bigg|_0^1=\frac{8}{27}\left(\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}\cdot 1\right)^3}-\sqrt{1^3}\right)=$$

$$=\frac{8}{27}\left(\frac{\sqrt{2197}}{8}-1\right)=\frac{\sqrt{2197}-8}{27}\text{ (ед.).}$$

б) Уравнение определяет ***цепную линию***. Для нахождения дифференциала дуги кривой найдем $y'=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)$ и вычислим

$$1+y'^2=1+\frac{1}{4}\left(e^x-e^{-x}\right)^2=1+\frac{1}{4}\left(e^{2x}-2e^x\cdot e^{-x}+e^{-2x}\right)=1+\frac{1}{4}\left(e^{2x}-2+e^{-2x}\right)=$$

$$=1+\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-2x}=\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-2x}=\frac{1}{4}\left(e^{2x}+2+e^{-2x}\right)=\frac{1}{4}\left(e^x+e^{-x}\right)^2.$$

Тогда $dL=\sqrt{1+y'^2}dx=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)dx$. По формуле (3.9) получим:

$$L=\int_0^1\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)dx=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\left(e-e^{-1}\right)-\frac{1}{2}\left(e^0-e^0\right)=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)\text{ (ед.).}$$

в) Используем формулу (3.10) и найдем:

$$x'=-\frac{1}{\cos y}\cdot\left(-\sin y\right)=\operatorname{tg}y;\quad dL=\sqrt{1+x'^2}dy=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2y}\,dy=\sqrt{\frac{1}{\cos^2y}}dy=\frac{dy}{\cos y}.$$

Тогда $L=\int_0^{\pi/3}\frac{dy}{\cos y}=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\Bigg|_0^{\pi/3}=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right|=$

$$=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}\right|-\ln 1=\ln\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}\text{ (ед.).}$$

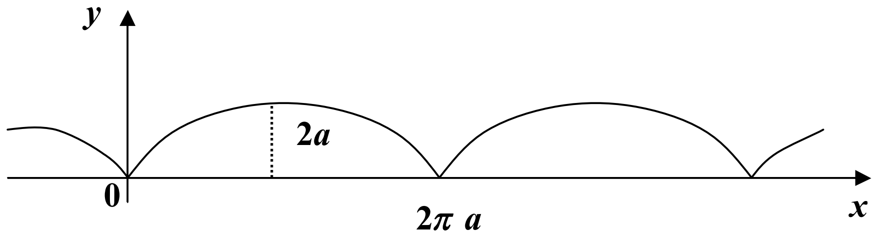
Пример 3.6. Найти длину

а) одной арки циклоиды $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$;

б) дуги кривой $x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t$ от $t=0$ до $t=\ln\pi$.

Решение

а) ***Циклоида*** описывается точкой окружности радиуса a, которая катится без скольжения вдоль некоторой прямой. При этом для одной ее арки параметр t будет изменяться от 0 до 2π.



Для вычисления длины арки циклоиды используем формулу (3.11). Найдем $x'(t)=a(1-\cos t)$, $\quad y'(t)=a\sin t$, тогда

$$dL=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=\sqrt{a^2\left(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t\right)}\,dt=$$

$$=\sqrt{a^2(2-2\cos t)}\,dt=\sqrt{2a^2(1-\cos t)}\,dt=\sqrt{2a^2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=2a\sin\frac{t}{2}dt.$$

Значит, $L=\int\limits_0^{2\pi}2a\sin\frac{t}{2}dt=-2a\cdot 2\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=-4a(\cos\pi-\cos 0)=8a$ (ед.).

Получили, что длина одной арки циклоиды в восемь раз больше, чем радиус окружности, который ее образует.

б) Определим $x'(t)=e^t\cos t+e^t\cdot(-\sin t)=e^t(\cos t-\sin t)$,

$$y'(t)=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\sin t+\cos t).$$

Тогда $dL=\sqrt{\left[e^t(\cos t-\sin t)\right]^2+\left[e^t(\sin t+\cos t)\right]^2}\,dt=$

$$=\sqrt{e^{2t}\left(\cos^2 t-2\cos t\sin t+\sin^2 t+\sin^2 t+2\sin t\cos t+\cos^2 t\right)}\,dt=$$

$$=e^t\sqrt{1+1}dt=\sqrt{2}e^t dt.$$

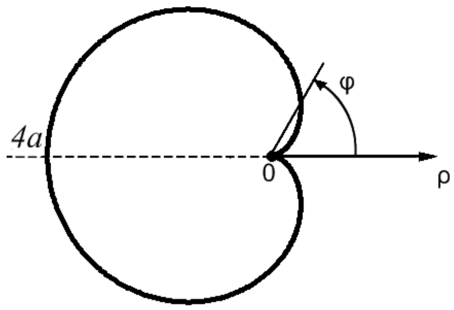
Получили, что $L=\int\limits_0^{\ln\pi}\sqrt{2}e^t dt=\sqrt{2}e^t\Big|_0^{\ln\pi}=\sqrt{2}\left(e^{\ln\pi}-e^0\right)=\sqrt{2}(\pi-1)$ (ед.).

Пример 3.7. Найти длину

а) линии $\rho=2a(1-\cos\varphi)$; $\quad$ б) дуги кривой $\rho=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

Решение

а) Кривая $\rho = 2a(1-\cos\varphi)$ называется ***кардиоидой***.



Для использования формулы (3.12) вычислим $\rho'(\varphi)$ и $dL = \sqrt{\rho^2(\varphi) + \left[\rho'(\varphi)\right]^2}\, d\varphi$.

Имеем: $\rho'(\varphi) = 2a\sin\varphi$, $\rho'^2 = 4a^2\sin^2\varphi$, тогда

$$dL = \sqrt{4a^2(1-\cos\varphi)^2 + 4a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \sqrt{4a^2\left(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)}\, d\varphi = 2a\sqrt{2-2\cos\varphi}\, d\varphi = 2a\sqrt{2(1-\cos\varphi)}\, d\varphi =$$

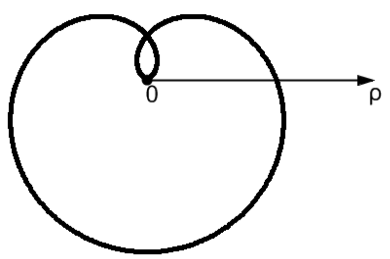
$$= 2a\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = 4a\sin\frac{\varphi}{2} d\varphi.$$

В то время, когда точка на кардиоиде пробегает всю кривую, ее полярный радиус изменяется от 0 до 2π.

Тогда $L = \int\limits_0^{2\pi} 4a\sin\frac{\varphi}{2} d\varphi = -4a\cdot 2\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{2\pi} = -8a(\cos 2\pi - \cos 0) = 16a$ (ед.).

б) Длину дуги вычислим по формуле (3.12). Для этого найдем дифференциал дуги dL.

Имеем: $\rho' = a\cdot 3\sin^2\frac{\varphi}{3}\cdot\cos\frac{\varphi}{3}\cdot\frac{1}{3} = a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}$.



Тогда $dL = \sqrt{a^2\sin^6\frac{\varphi}{3} + a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}}\, d\varphi =$

$$= a\sqrt{\sin^4\frac{\varphi}{3}\left(\sin^2\frac{\varphi}{3} + \cos^2\frac{\varphi}{3}\right)}\, d\varphi = a\cdot\sin^2\frac{\varphi}{3} d\varphi.$$

Определим, как изменяется полярный угол, когда точка, которая движется по кривой пробегает ее всю. Если $\rho = 0$, то $\sin\frac{\varphi}{3} = 0$, откуда $\frac{\varphi}{3} = \pi n \Rightarrow \varphi = 3\pi n$.

Положив $n = 0$, найдем $\varphi = 0$, при $n = 1$ получим $\varphi = 3\pi$.

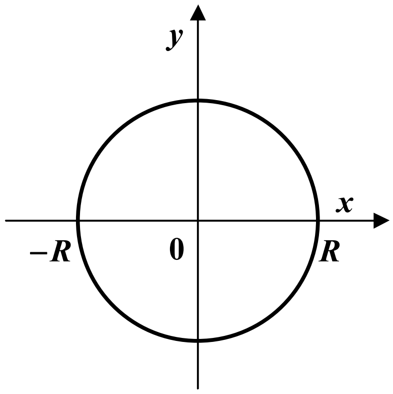
Значит, $L = \int\limits_0^{3\pi} a\sin^2\frac{\varphi}{3} d\varphi = a\int\limits_0^{3\pi}\frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2\varphi}{3}\right) d\varphi = \frac{a}{2}\left(\varphi - \frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{3\pi} =$

$$= \frac{a}{2}\left(3\pi - \frac{3}{2}\sin 2\pi\right) - 0 = \frac{3}{2}\pi a \text{ (ед.).}$$

Пример 3.8. Найти длину окружности.

Решение

Возьмем окружность радиуса R с центром в начале координат. Ее уравнение имеет вид: $x^2+y^2=R^2$. Чтобы использовать формулу (3.9), выразим $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$. Знак плюс соответствует верхней половине окружности, знак минус – нижней. Найдем длину четвертой части окружности, расположенной в первой четверти $\left(y\geq 0\right)$.



Будем иметь: $y=\sqrt{R^2-x^2}$, $y'=-\dfrac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$,

$$1+y'^2=1+\frac{x^2}{R^2-x^2}=\frac{R^2-x^2+x^2}{R^2-x^2}=\frac{R^2}{R^2-x^2}.$$

Тогда $dL=\sqrt{1+y'^2}dx=\dfrac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx$.

Абсцисса x точки окружности в первой четверти изменяется от 0 до R.

Тогда $$\frac{L}{4}=\int_0^R\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=R\arcsin\frac{x}{R}\Bigg|_0^R=R\left(\arcsin 1-\arcsin 0\right)=R\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Длина всей окружности $L=4\cdot R\cdot\dfrac{\pi}{2}=2\pi R$.

Решим эту же задачу для случая, когда окружность задана параметрическими уравнениями $\begin{cases}x=R\cos t,\\ y=R\sin t.\end{cases}$

Чтобы использовать формулу (3.11) вычислим дифференциал дуги. Найдем производные $x'(t)=-R\sin t,\;\; y'(t)=R\cos t$, тогда

$$dL=\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}\,dt=\sqrt{R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t}\,dt=R\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}\,dt=Rdt.$$

На всей окружности параметр t изменяется от 0 до 2π.

Поэтому $L=\int\limits_0^{2\pi}Rdt=Rt\Bigg|_0^{2\pi}=R\left(2\pi-0\right)=2\pi R$.

Еще более простым будет решение этой задачи, если уравнение окружности задать в полярных координатах, положив $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$.

Тогда уравнение окружности примет вид: $\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=R^2$, $\rho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=R^2$ или $\rho^2=R^2$, откуда $\rho=R$.

Полярная ось совпадает с положительным направлением оси Ox, а полярный угол φ, когда точка пробегает всю окружность, изменяется от 0 до 2π. По формуле (3.12) будем иметь:

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{R^2+\left(R'\right)^2}d\varphi=\int_0^{2\pi}Rd\varphi=R\varphi\Big|_0^{2\pi}=2\pi R.$$

Задания для самостоятельной работы

Вычислить длины дуг линий:

1. $y=e^x$ от $x_1=0$ до $x_2=2$;
2. $y=1-\ln\cos x$, $0\le x\le\dfrac{\pi}{4}$;
3. $y^2=4x$, $0\le x\le 1{,}5$;
4. $x=\dfrac{1}{4}y^2-\dfrac{1}{2}\ln y$ от $y_1=1$ до $y_2=e$;
5. $\begin{cases}x=3\cos t-\cos 3t\\ y=3\sin t-\sin 3t,\end{cases}$ $\left(0\le t\le\dfrac{\pi}{2}\right)$;
6. $\begin{cases}x=t^2\\ y=t\left(\dfrac{1}{3}-t^2\right),\end{cases}$ $\left(0\le t\le\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$;
7. $\rho=1+\cos\varphi$, $0\le\varphi\le 2\pi$;
8. $\rho=5\cos^2\dfrac{\varphi}{2}$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

3.3. Вычисление объемов тел вращения

Пусть функция $y=f(x)$ – непрерывна и положительна на отрезке $[a;b]$.

Объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$ и отрезками прямых $x=a,\ x=b,\ y=0$ (рис.3.8), равен

$$V_{ox}=\pi\int_a^b f^2(x)dx. \tag{3.13}$$

Если заданы две непрерывные кривые $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ такие, что $f_1(x)>0$, $f_2(x)\ge f_1(x)$ при $a\le x\le b$, то объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной этими линиями и отрезками прямых $x=a,\ x=b$ (рис.3.9), вычисляется по формуле

$$V_{ox} = \pi \int_a^b \left[f_2^2(x) - f_1^2(x) \right] dx. \qquad (3.14)$$

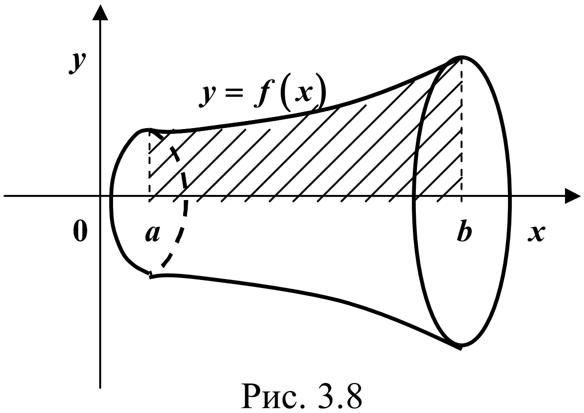


Рис. 3.8

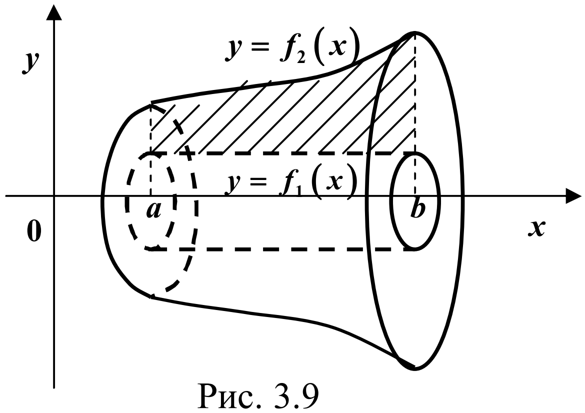


Рис. 3.9

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $x = \varphi(y)$, прямой $x = 0$ и отрезками прямых $y = c$ и $y = d$ (рис. 3.10), равен

$$V_{oy} = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy. \qquad (3.15)$$

Если тело получено в результате вращения вокруг оси Oy плоской фигуры, ограниченной непрерывными кривыми $x = \varphi_1(y)$, $x = \varphi_2(y)$ такими, что $\varphi_2(y) \ge \varphi_1(y)$, $\varphi_1(y) > 0$, и отрезками прямых $y = c$ и $y = d$ (рис. 3.11), то объем этого тела вычисляется по формуле

$$V_{oy} = \pi \int_c^d \left[\varphi_2^2(y) - \varphi_1^2(y) \right] dy. \qquad (3.16)$$

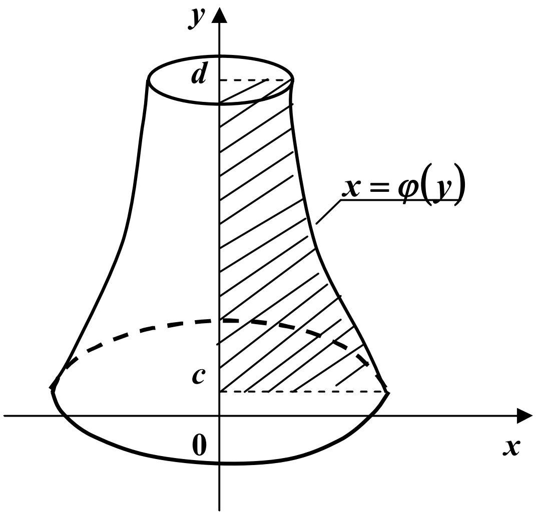


Рис. 3.10

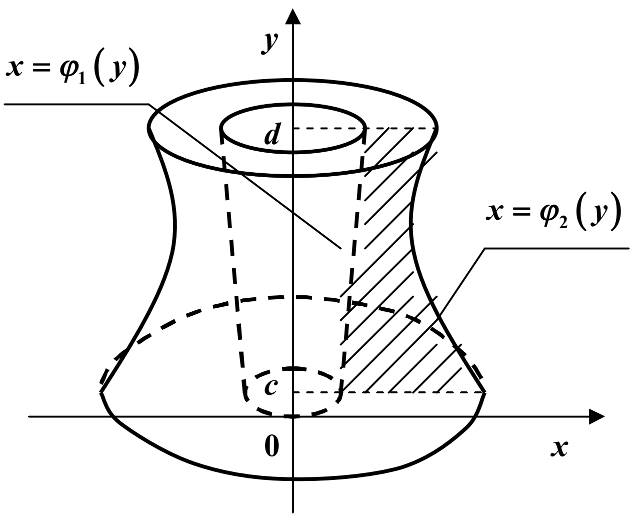


Рис. 3.11

В случае ***параметрического задания*** кривой уравнениями $x = x(t), y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, объемы образованных тел вращения вокруг оси Ox или оси Oy определяются соответственно формулами:

$$V_{ox} = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) \cdot x'(t)\,dt, \tag{3.17}$$

$$V_{oy} = \pi \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) \cdot y'(t)\,dt. \tag{3.18}$$

Пусть кривая задана в ***полярной системе координат*** уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, где $\rho(\varphi)$ – непрерывная функция при $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$. Тогда объем тела, образованного вращением вокруг полярной оси плоской фигуры, ограниченной кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и двумя полярными радиусами OA и OB, которые соответствуют углам φ_1 и φ_2 (рис.3.12), вычисляется по формуле

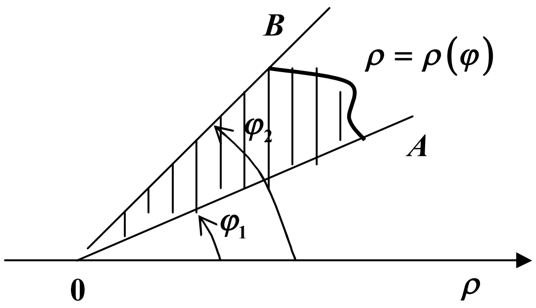


Рис. 3.12

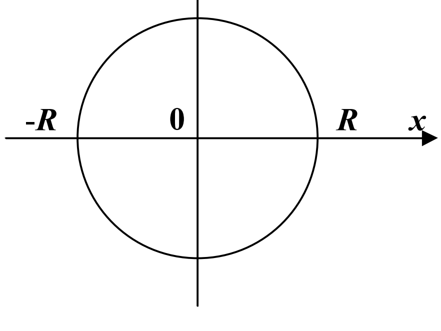
$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3(\varphi) \cdot \sin\varphi\, d\varphi. \tag{3.19}$$

Пример 3.9. Найти объем шара.

Решение

Пусть шар образован вращением вокруг оси Ox окружности $x^2 + y^2 = R^2$.

Для вычисления объема используем формулу (3.13), учитывая, что $y^2 = R^2 - x^2$, а $-R \le x \le R$.



Получим $V_{ox} = \pi \int_{-R}^{R} y^2 dx = \pi \int_{-R}^{R} \left(R^2 - x^2\right) dx =$

$$= \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-R}^{R} = \pi \left(R^2 \cdot R - \frac{R^3}{3} \right) -$$

$$- \left(R^2 \cdot (-R) - \frac{(-R)^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi R^3 \text{ (куб. ед.).}$$

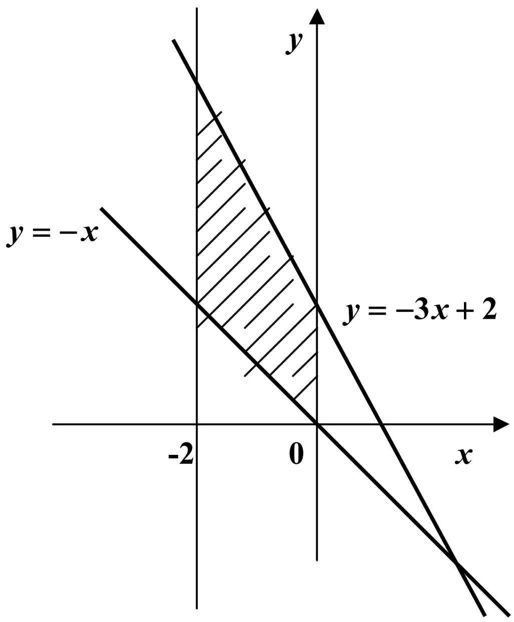
Пример 3.10. Вычислить объемы тел, образованных вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной данными линиями:

а) $y = -3x + 2$, $y = -x$, $x = -2$, $x = 0$; б) $y = \cos x$, $y = \sin x$, $x = 0$;

в) $y = 2x - x^2$, $x + y - 2 = 0$, $y \geq 0$; г) $y = \sqrt{1 - x}$, $x + y + 1 = 0$, $y = 0$.

Решение

Для нахождения объема тела используем формулу (3.14):



$$V_{ox} = \pi \int_{-2}^{0} \left[(-3x+2)^2 - (-x)^2 \right] dx =$$

$$= \pi \int_{-2}^{0} \left(9x^2 - 12x + 4 - x^2 \right) dx =$$

$$= \pi \int_{-2}^{0} \left(8x^2 - 12x + 4 \right) dx = 4\pi \int_{-2}^{0} \left(2x^2 - \right.$$

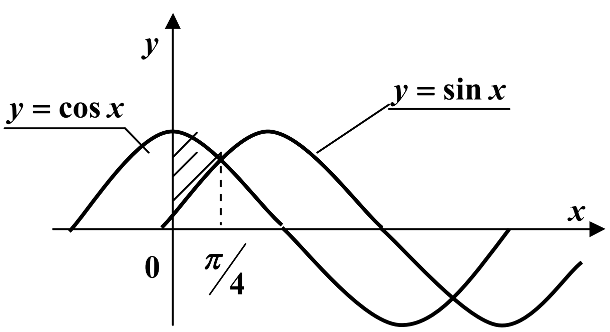
$$\left. -3x + 1 \right) dx = 4\pi \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x \right) \Bigg|_{-2}^{0} =$$

$$= 4\pi \left[0 - \left(-2 \cdot \frac{8}{3} - 3 \cdot \frac{4}{2} - 2 \right) \right] =$$

$$= 4\pi \cdot \frac{40}{3} = \frac{160}{3}\pi \text{ (куб. ед.).}$$

б) Найдем пределы интегрирования: $\begin{cases} y = \cos x \\ y = \sin x \end{cases}$, тогда $\cos x = \sin x$,

значит $\operatorname{tg} x = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$. При $n = 0$ находим $x = \frac{\pi}{4}$.

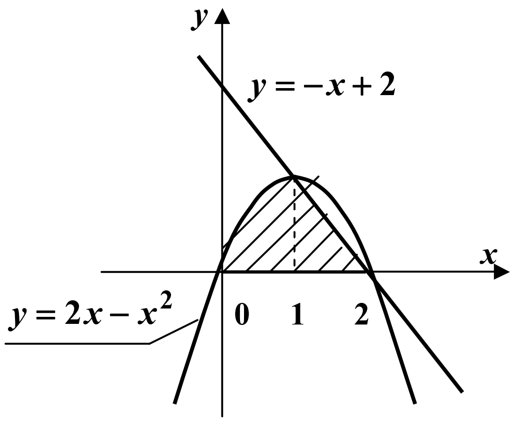


$$V_{ox} = \pi \int_{0}^{\pi/4} \left(\cos^2 x - \sin^2 x \right) dx =$$

$$= \pi \int_{0}^{\pi/4} \cos 2x dx = \pi \cdot \frac{1}{2} \sin 2x \Bigg|_{0}^{\pi/4} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) = \frac{\pi}{2} \text{ (куб. ед.).}$$

в) Изобразим фигуру, при вращении которой образуется искомое тело.



Найдем абсциссы точек пересечения графиков функций $y=2x-x^2$ и $x+y-2=0$:

$$\begin{cases} y=2x-x^2 \\ y=-x+2 \end{cases} \Rightarrow \ 2x-x^2=-x+2 \ \text{или}$$

$x^2-3x+2=0$, откуда $x_1=1,\ x_2=2$.

Уравнение $y=2x-x^2$ задает параболу, пересекающую ось Ox в точках $x=0$ и $x=2$. Уравнение $x+y-2=0$ определяет прямую линию, для которой $y=-x+2$.

Так как на отрезках $[0;1]$ и $[1;2]$ фигура ограничена разными линиями, то объем тела найдем как сумму объемов V_1+V_2, где

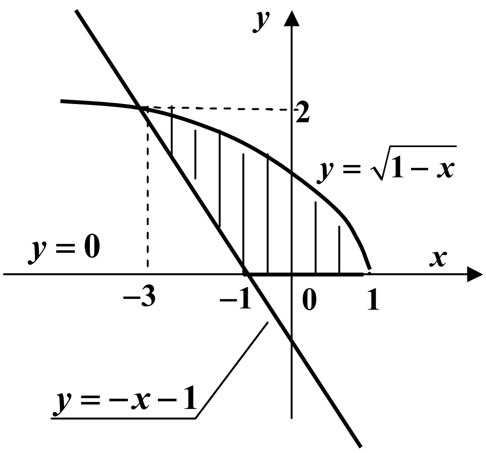
$$V_1=\pi\int_0^1\left(2x-x^2\right)^2dx=\pi\int_0^1\left(4x^2-4x^3+x^4\right)dx=\pi\left(\frac{4x^3}{3}-\frac{4x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\pi\left(\frac{4}{3}-1+\frac{1}{5}\right)=\frac{8}{15}\pi,$$

$$V_2=\pi\int_1^2(2-x)^2dx=-\pi\cdot\frac{(2-x)^3}{3}\Bigg|_1^2=-\pi\left[\frac{(2-2)^3}{3}-\frac{(2-1)^3}{3}\right]=\frac{\pi}{3}.$$

Значит, $V=V_1+V_2=\dfrac{8}{15}\pi+\dfrac{1}{3}\pi=\dfrac{13}{15}\pi$ (куб. ед.).

г) Построим ветвь параболы $y=\sqrt{1-x}$ с вершиной в точке $(1;0)$ и прямую $y=-x-1$. Координаты их точки пересечения найдем, решив систему уравнений $\begin{cases} y=\sqrt{1-x} \\ y=-x-1, \end{cases}$ откуда $x=-3$, $y=2$.



Найдем объем тела как разность между V_1 – объемом тела, образованного вращением ветви параболы, и V_2 – объемом конуса, образованного вращением прямой.

Имеем: $V = V_1 - V_2 = \pi\int\limits_{-3}^{1}\left(\sqrt{1-x}\right)^2 dx - \pi\int\limits_{-3}^{-1}\left(-1-x\right)^2 dx = \pi\int\limits_{-3}^{1}\left(1-x\right)dx -$

$$-\pi\int\limits_{-3}^{-1}\left(1+2x+x^2\right)dx = \pi\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-3}^{1} - \pi\left(x+2\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{-1} = \pi\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(-3-\frac{9}{2}\right)\right] - \pi\left[\left(-1+1-\frac{1}{3}\right)-\left(-3+9-9\right)\right] = 8\pi - \frac{8}{3}\pi = \frac{16}{3}\pi \text{ (куб. ед.).}$$

Пример 3.11. Вычислить объемы тел, образованных вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной данными линиями:

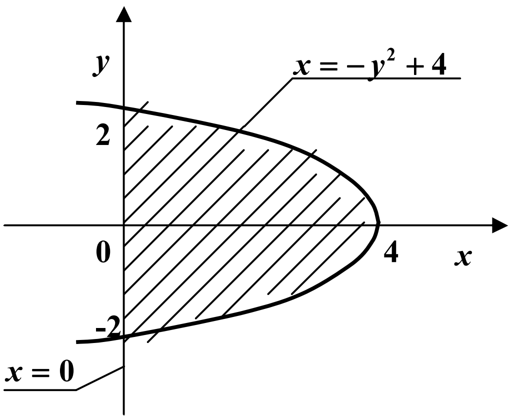
а). $y^2 + x - 4 = 0$, $x = 0$;   б) $x^2 = 4y$, $y^2 = 4x$.

Решение

а) Уравнение $y^2 + x - 4 = 0$ определяет параболу с вершиной в точке $(4;0)$, симметричную относительно оси Ox.

Для определения пределов интегрирования найдем ординаты точек пересечения линий: $\begin{cases} x = -y^2 + 4 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow -y^2 + 4 = 0 \Rightarrow y^2 = 4$, откуда $y = \pm 2$.

Объем тела вращения вычислим по формуле (3.15): $V_{oy} = \pi\int\limits_{-2}^{2}\left(4-y^2\right)^2 dy$.



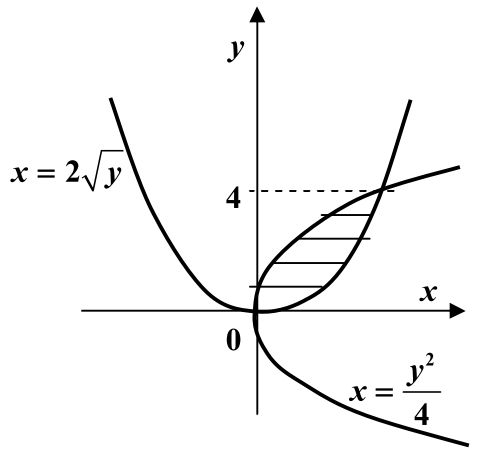
Учитывая симметрию тела, получим: $V_{oy} = 2\pi\int\limits_{0}^{2}\left(4-y^2\right)^2 dy =$

$$= 2\pi\int\limits_{0}^{2}\left(16-8y^2+y^4\right)dy =$$

$$= 2\pi\left(16y - 8\cdot\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_{0}^{2} =$$

$$= 2\pi\left(32 - 8\cdot\frac{8}{3}+\frac{35}{5}\right) = \frac{512}{15}\pi \text{ (куб. ед.).}$$

б) Построим данные линии и найдем ординаты их точек пересечения.



$$\begin{cases} x = 2\sqrt{y} \\ x = \dfrac{y^2}{4}, \end{cases} \Rightarrow \ 2\sqrt{y} = \frac{y^2}{4}, \qquad 64y = y^4,$$

$y\left(y^3 - 64\right) = 0$. Значит, $y_1 = 0,\ y_2 = 4$.

По формуле (3.16) искомый объем равен:

$$V_{oy} = \pi \int_0^4 \left[\left(2\sqrt{y}\right)^2 - \left(\frac{y^2}{4}\right)^2 \right] dy =$$

$$= \pi \int_0^4 \left(4y - \frac{y^4}{16}\right) dy = \pi \left(\frac{4y^2}{2} - \frac{1}{16} \cdot \frac{y^5}{5} \right)\Bigg|_0^4 = \pi \left(2 \cdot 4^2 - \frac{1}{80} \cdot 4^5 \right) = \frac{96\pi}{5} \text{ (куб.ед.).}$$

Пример 3.12. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной линиями

а) $\begin{cases} x = a\sin t \\ y = b\sin 2t, \end{cases}$ вокруг оси Ox $\left(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right)$; б) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ вокруг оси Oy.

Решение

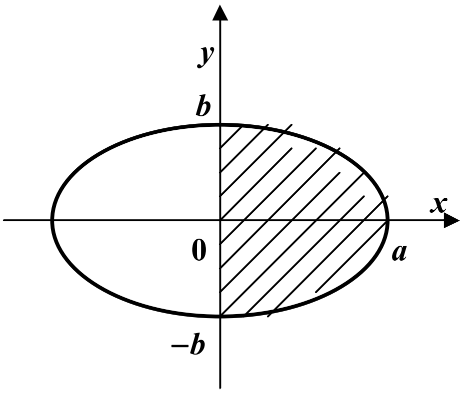
а) Для вычисления объема воспользуемся формулой (3.14). Найдем $x'(t) = a\cos t$.

Тогда $V_{ox} = \pi \int_0^{\pi/2} b^2 \sin^2 2t \cdot a\cos t dt = ab^2\pi \int_0^{\pi/2} 4\sin^2 t \cos^2 t \cos t dt =$

$$= 4ab^2\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 t\left(1 - \sin^2 t\right)\cos t dt = 4\pi ab^2 \int_0^{\pi/2} \left(\sin^2 t - \sin^4 t\right) d\left(\sin t\right) =$$

$$= 4\pi ab^2 \left(\frac{\sin^3 t}{3} - \frac{\sin^5 t}{5} \right)\Bigg|_0^{\pi/2} = 4\pi ab^2 \left(\frac{1}{3}\sin^3\frac{\pi}{2} - \frac{1}{5}\sin^5\frac{\pi}{2} \right) = \frac{8}{15}\pi ab^2 \text{ (куб. ед.).}$$

б) Данные параметрические уравнения определяют ***эллипс*** с полуосями a и b. При его вращении вокруг оси Oy получим эллипсоид, объем которого можно вычислить по формуле (3.15). Из двух симметричных частей эллипса выберем его правую половину. Тогда при изменении y от $-b$ до b параметр t изменяется от $-\dfrac{\pi}{2}$ до $\dfrac{\pi}{2}$. Учитывая, что $y'_t = b\cos t$, найдем искомый объем:



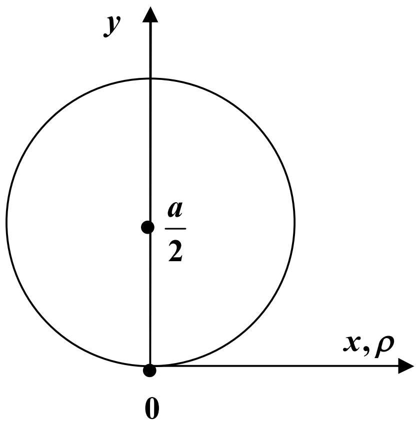
$$V_{oy}=\pi\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}a^2\cos^2 t\cdot b\cos t\,dt=$$

$$=2\pi\int\limits_0^{\pi/2}a^2b\left(1-\sin^2 t\right)d\left(\sin t\right)=2\pi a^2b\left(\sin t-\frac{\sin^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=$$

$$=2\pi a^2b\left(\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\sin^3\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4}{3}\pi a^2b\ \text{(куб.ед.).}$$

Пример 3.13. Вычислить объем тела, полученного вращением кривой $\rho=a\sin\varphi$ вокруг полярной оси.

Решение



Уравнение $\rho=a\sin\varphi$ определяет окружность радиуса a с центром в точке $\left(0;\dfrac{a}{2}\right)$. При вращении этой окружности вокруг полярной оси получим тор, объем которого можем вычислить по формуле (3.19). Очевидно, что $0\le\varphi\le\pi$. Будем иметь:

$$V=\frac{2\pi}{3}\int\limits_0^{\pi}a^3\sin^3\varphi\cdot\sin\varphi d\varphi=\frac{2\pi}{3}a^3\int\limits_0^{\pi}\sin^4\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{2\pi}{3}a^3\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos2\varphi}{2}\right)^2d\varphi=\frac{2\pi}{3}a^3\cdot\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi}\left(1-2\cos2\varphi+\cos^2 2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{\pi}{6}a^3\int\limits_0^{\pi}\left(1-2\cos2\varphi+\frac{1+\cos4\varphi}{2}\right)d\varphi=\frac{\pi}{6}a^3\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos2\varphi+\frac{1}{2}\cos4\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{\pi}{6}a^3\left(\frac{3}{2}\varphi-2\cdot\frac{1}{2}\sin2\varphi+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin4\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi}{6}a^3\cdot\frac{3}{2}\pi=\frac{\pi^2}{4}a^3\ \text{(куб.ед.).}$$

Задания для самостоятельной работы

Вычислить объемы тел, полученных вращением плоских фигур вокруг координатных осей:

1. $y=\dfrac{4}{x},\ y=1,\ x=1,\ x=2,\quad V_{ox}-?$ 2. $y=x^2-4x,\ y=-x,\quad V_{ox}-?$

3. $xy=6,\ y=7-x,\quad V_{oy}-?$ 4. $y^2=9x,\ y=3x,\quad V_{ox}-?$

5. $\begin{cases} x=2t^2 \\ y=2t\left(1-\dfrac{t^2}{3}\right), \end{cases} \left(0\le t\le\sqrt{3}\right),\ V_{ox}-?$

6. Найти объем тела, полученного вращением кривой $\rho=a(1+cos\varphi)$ вокруг полярной оси $(0\le\varphi\le 2\pi)$.

7. Вычислить объем кругового конуса, который получен вращением отрезка AB вокруг оси Ox, где $A(0;0),\ B(H;R)$.

3.4. Вычисление площади поверхности тел вращения

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги гладкой кривой, заданной уравнением $y=f(x)$, $a\le x\le b$, вычисляется по формуле

$$P_{ox}=2\pi\int_a^b\left|f(x)\right|\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx. \tag{3.20}$$

Если гладкая кривая задана уравнением $x=\varphi(y)$, $c\le y\le d$, то площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Oy, может быть найдена по формуле

$$P_{oy}=2\pi\int_c^d\left|\varphi(y)\right|\sqrt{1+\left[\varphi'(x)\right]^2}\,dy. \tag{3.21}$$

В случае ***параметрического задания*** кривой уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t_1\le t\le t_2$, где функции $x(t)$, $y(t)$ – непрерывны вместе со своими производными, соответствующие площади поверхностей вычисляются по формулам:

$$P_{ox}=2\pi\int_{t_1}^{t_2}\left|y(t)\right|\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}\,dt, \tag{3.22}$$

$$P_{oy}=2\pi\int_{t_1}^{t_2}\left|x(t)\right|\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}\,dt. \tag{3.23}$$

Площадь поверхности, полученной в результате вращения вокруг ***полярной оси*** криволинейного сектора, ограниченного непрерывной кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$, определяется по формуле

$$P = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho(\varphi) \sqrt{\rho^2(\varphi) + \left[\rho'(\varphi)\right]^2} \sin\varphi \, d\varphi . \qquad (3.24)$$

Пример 3.14. Найти площадь поверхности сферы, как тела вращения.

Решение

Пусть сфера образована вращением окружности $x^2 + y^2 = R^2$ вокруг оси Ox. Выразим из уравнения y и найдем $y'(x)$: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ (верхняя половина окружности), тогда $y'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{R^2 - x^2}} \cdot 2x = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$. Вычислим

$1 + \left[y'(x)\right]^2 = 1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} = \frac{R^2 - x^2 + x^2}{R^2 - x^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2}$.

Дифференциал дуги равен $dl = \sqrt{1 + \left[y'(x)\right]^2}\, dx = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx$.

Тогда по формуле (3.20):

$$P_{ox} = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-R}^{R} R dx = 2\pi R x \Big|_{-R}^{R} = 2\pi R(R + R) = 4\pi R^2 .$$

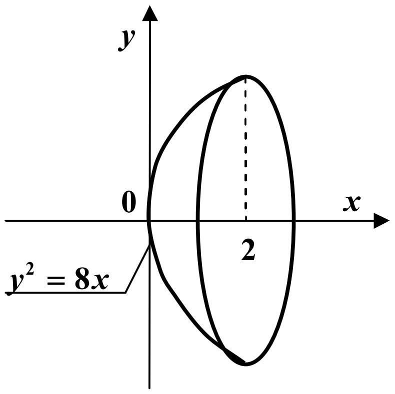
Площадь поверхности сферы равна $4\pi R^2$.

Пример 3.15. Вычислить боковую поверхность параболоида, образованного вращением параболы $y^2 = 8x$ вокруг оси Ox на отрезке $[0;2]$.

Решение

Запишем уравнение параболы в виде $y = \pm\sqrt{8x}$.

Так как ветви параболы симметричны относительно оси Ox, будем считать, что параболоид образован вращением ее верхней ветви, уравнение которой $y = \sqrt{8x}$. Найдем $y' = \frac{1}{2\sqrt{8x}} \cdot 8 = \sqrt{\frac{2}{x}}$, $\quad 1 + \left[y'(x)\right]^2 = 1 + \frac{2}{x} = \frac{x+2}{x}$.



Тогда подынтегральное выражение принимает вид:

$$|y|\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2} = \sqrt{8x}\cdot\sqrt{\frac{x+2}{x}} = \sqrt{\frac{8x^2+16x}{x}} =$$
$$= \sqrt{8x+16} = 2\sqrt{2x+4}.$$

Площадь поверхности параболоида:

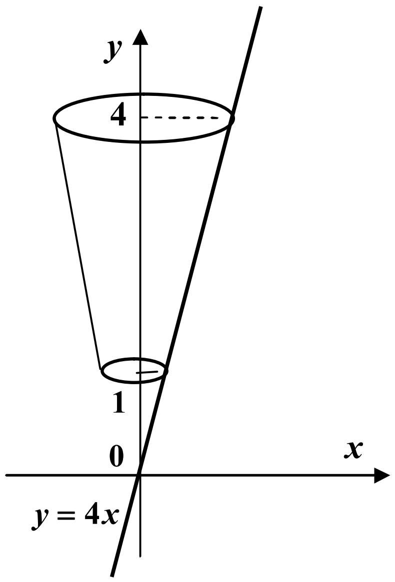
$$P_{ox} = 2\pi\int_0^2 2\sqrt{2x+4}\,dx = 4\pi\int_0^2 \sqrt{2x+4}\,dx =$$

$$= 4\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{(2x+4)^3}\Bigg|_0^2 = \frac{4\pi}{3}\left(\sqrt{(4+4)^3}-\sqrt{4^3}\right) = \frac{32\pi}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right) \text{ (кв. ед.).}$$

Пример 3.16. Найти площадь поверхности тела, полученного вращением прямой $y = 4x$ вокруг оси Oy от $y = 1$ до $y = 4$.

Решение

Воспользуемся формулой (3.21). Для этого найдем $x = \frac{y}{4}$, $x' = \frac{1}{4}$.



Вычислим $\sqrt{1+(x')^2} = \sqrt{1+\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{4}$.

Получим: $P_{oy} = 2\pi\int_1^4 \frac{y}{4}\cdot\frac{\sqrt{17}}{4}dy =$

$$= 2\pi\cdot\frac{\sqrt{17}}{16}\int_1^4 y\,dy = 2\pi\cdot\frac{\sqrt{17}}{16}\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_1^4 =$$

$$= \frac{\sqrt{17}\pi}{16}(16-1) = \frac{15\sqrt{17}\pi}{16} \text{ (кв. ед.).}$$

Пример 3.17. Найти площади поверхностей, образованных вращением кривой вокруг соответствующей оси:

а) $\begin{cases} x = t^2+1 \\ y = \frac{t}{3}\left(3-t^2\right), \end{cases} \left(0 \le t \le \sqrt{3}\right),\quad P_{ox} - ?$ б) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t, \quad P_{oy} - ? \end{cases}$

Решение

а) Применим формулу (3.22). Для этого найдем $x'_t = 2t$ и $y'_t = 1 - t^2$. Вычислим $\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2 = 4t^2 + \left(1 - t^2\right)^2 = t^4 + 2t^2 + 1 = \left(1 + t^2\right)^2$.

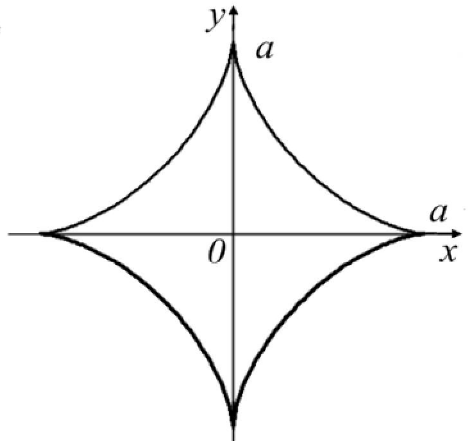
Тогда получим:

$$P_{ox} = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t}{3}\left(3 - t^2\right)\sqrt{\left(1 + t^2\right)^2}\, dt = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t}{3}\left(3 - t^2\right)\left(1 + t^2\right) dt =$$

$$= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\sqrt{3}} \left(3t + 2t^3 - t^5\right) dt = \frac{2\pi}{3}\left(3 \cdot \frac{t^2}{2} + 2 \cdot \frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{6}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{3}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 9 - \frac{1}{6} \cdot 27\right) =$$

$= 3\pi$ (кв. ед.).

б) Заданные уравнения определяют ***астроиду***. Будем считать, что тело получено вращением дуги астроиды, расположенной в первой четверти.



В этом случае $0 \le y \le a$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$. Найдем производные:

$x'_t = -3a\cos^2 t \sin t$, $y'_t = 3a\sin^2 t \cos t$.

Тогда $\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2 = 9a^2\cos^4 t \sin^2 t +$

$+ 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t = 9a^2\cos^2 t \sin^2 t$.

По формуле (3.23) площадь поверхности равна

$$P_{oy} = 2\pi \int_0^{\pi/2} a\left|\sin^3 t\right|\sqrt{9a^2\cos^2 t \sin^2 t}\, dt = 2\pi a \int_0^{\pi/2} \sin^3 t \cdot 3a\cos t \sin t\, dt =$$

$$= 6\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t\, d\left(\sin t\right) = 6\pi a^2 \frac{\sin^5 t}{5}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{6\pi a^2}{5}\sin^5\frac{\pi}{2} = \frac{6\pi a^2}{5} \text{ (кв.ед.).}$$

Пример 3.18. Найти площади поверхностей, образованных вращением кривой вокруг полярной оси:

а) $\rho = a\left(1 + \cos\varphi\right)$; б) $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$.

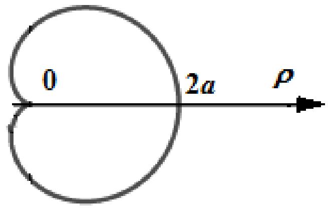
Решение

а) Уравнение $\rho = a(1+\cos\varphi)$ определяет ***кардиоиду***. Площадь поверхности вычислим по формуле (3.24). Для этого найдем: $\rho' = -a\sin\varphi$,

$\rho^2 + \rho'^2 = a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi = a^2(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) =$

$= a^2(2+2\cos\varphi) = 2a^2(1+\cos\varphi)$.

Получим:



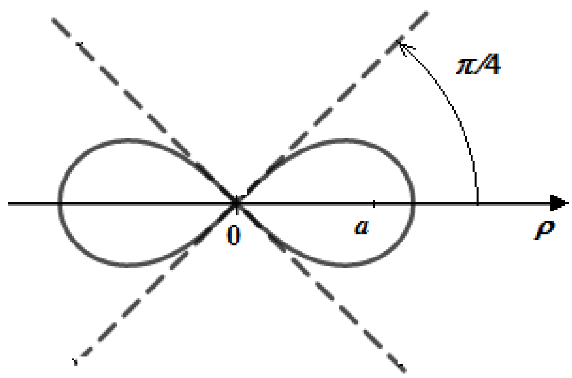
$$P = 2\pi\int_0^{\pi} a(1+\cos\varphi)\sqrt{2a^2(1+\cos\varphi)}\sin\varphi d\varphi =$$

$$= -2\pi a^2\int_0^{\pi}\sqrt{2}\sqrt{(1+\cos\varphi)^3}\,d(1+\cos\varphi) =$$

$$= -2\sqrt{2}\pi a^2\cdot\frac{(1+\cos\varphi)^{5/2}}{5/2}\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{4\sqrt{2}}{5}\pi a^2\sqrt{(1+\cos\varphi)^5}\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{4\sqrt{2}}{5}\pi a^2\left(0-\sqrt{32}\right)$$

$= \dfrac{4\sqrt{2}}{5}\pi a^2\cdot 4\sqrt{2} = \dfrac{32}{5}\pi a^2$ (кв.ед.).

б) Уравнение $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ описывает лемнискату.



Вычислим площадь поверхности, образованной вращением части лемнискаты, когда полярный угол изменяется от $\mathbf{0}$ до $\dfrac{\pi}{4}$:

$$\frac{P}{2} = 2\pi\int_0^{\pi/4}\rho\cdot\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\sin\varphi d\varphi.$$

Выразим из уравнения кривой $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ и найдем ρ':

$$\rho' = \frac{a}{2\sqrt{\cos 2\varphi}}\cdot(-\sin 2\varphi)\cdot 2 = -\frac{a\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Тогда $\rho^2+\rho'^2 = a^2\cos 2\varphi + \dfrac{a^2\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \dfrac{a^2\cos^2 2\varphi + a^2\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} =$

$= \dfrac{a^2(\cos^2 2\varphi+\sin^2 2\varphi)}{\cos 2\varphi} = \dfrac{a^2}{\cos 2\varphi}$.

Будем иметь:

$$\frac{P}{2}=2\pi\int_0^{\pi/4} a\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\cdot\sin\varphi\, d\varphi=2\pi a^2\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\, d\varphi=-2\pi a^2\cos\varphi\Big|_0^{\pi/4}=$$

$$=-2\pi a^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)=2\pi a^2-\pi a^2\sqrt{2}.$$

$P=4\pi a^2-2\pi a^2\sqrt{2}=2\pi a^2\left(2-\sqrt{2}\right)$ (кв. ед.).

Задания для самостоятельной работы

Вычислить площади поверхностей тел, образованных вращением кривых вокруг соответствующей оси:

1. $y=x^3,\ 0\le x\le\frac{1}{2},\quad P_{ox}-?$
2. $y=\cos x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right],\quad P_{ox}-?$
3. $y=\ln x,\ y\in\left[0;\ln 2\right],\quad P_{oy}-?$
4. $\begin{cases}x=3\cos t\\ y=\sqrt{5}\sin t,\end{cases}\left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right),\quad P_{ox}-?$
5. Найти поверхность сферы, заданной в полярных координатах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 608 с.

2. Щипачев В.С. Высшая математика: Учеб. для вузов. – М.: Юрайт, Высшее образование, 2009. – 480 с.

3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.

4. Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – М.: Айрис – пресс, 2009. – 576 с.

5. Щипачев В.С. Задачник по высшей математике: Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 2003. – 304 с.

6. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике: Учебное пособие для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 336 с.

7. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика. Приклади і задачі: Посібник. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002. – 624 с.

8. Данко Д.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1. – М.: Высшая школа, 2000. − 304 с.

9. Кагадий Л.П., Шинковская И.Л., Заец И.П., Сушко Л.Ф. Высшая математика. Ч. 2: Учебное пособие. – Днепропетровск: НМетАУ, 2015. – 105 с.

10. Копорулин В.Л., Шинковская И.Л., Заец И.П., Сушко Л.Ф. Высшая математика. Ч. 3: Учебное пособие. – Днепропетровск: НМетАУ, 2016. – 65 с.

Приложение 1

СПИСОК МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ И СЛОВОСОЧЕТАНИЙ НА РУССКОМ И ФРАНЦУЗСКОМ ЯЗЫКАХ

длина дуги – longueur l'arc

длина отрезка – longueur le segment

интегральная сумма – somme intégrale

интеграл сходящийся – l'intégrale croisant

интеграл расходящийся – l'intégrale séparant

интервал – intervalle

кривая – courbe

криволинейный сектор – curviligne secteur

криволинейная трапеция – curviligne trapeze

неограниченная функция – illimité fonction

непрерывная функция – continu fonction

несобственный интеграл – l'intégrale mauvaise

объем тела – volume du corps

определенный интеграл – l'intégrale définie

особая точка – singularité

отрезок – segment

параметрическая функция – fonction paramétrique

площадь – surface, zone, aire

площадь плоской фигуры – zone plane de la fiqure

площадь поверхности вращения – aire de la surface de révolution

приближенное вычисление – calcul approximatif

предел – limite

~ **бесконечный –** limite infinie

~ **конечный –** limite finie

~ **верхний –** limite supérieure

~ **нижний**– limite inférieure

полярная система координат – systéme de coordonnées polaires

предельный признак сравнения – le signe ultime de la comparaison

признак – signe

признаки сходимости – signes de convergence

стремится слева – tend vers la gauche

стремится справа – cherche le droit

Приложение 2

СПИСОК МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ И СЛОВОСОЧЕТАНИЙ НА РУССКОМ И АНГЛИЙСКОМ ЯЗЫКАХ

длина дуги – arc length

длина отрезка – length of line

интегральная сумма – integral sum

интеграл сходящийся – convergent integral

интеграл расходящийся – divergent integral

интервал – interval, interspaces

кривая – curve

криволинейный сектор – curvilinear sector

криволинейная трапеция – curvilinear trapezoid

неограниченная функция – unlimited function

непрерывная функция – continuous function

несобственный интеграл – improper integral

объем тела – body volume

определенный интеграл – definite integral

особая точка – singular point

отрезок – line segment

параметрическая функция – parametric function

площадь – area

площадь плоской фигуры – area of a flat figure

площадь поверхности вращения – surface area of rotation

приближенное вычисление – approximate calculation

предел – limit

~ **бесконечный –** infinite limit

~ **конечный –** final limit

~ **верхний –** upper limit

~ **нижний –** lower limit

предельный признак сравнения – limit of comparison

признак сравнения – comparison feature

признаки сходимости – signs of convergence

полярная система координат – polar coordinate system

стремится слева – tends to the left

стремится справа – tends on the right

Навчальне видання

Копорулін Володимир Львович
Шинковська Ірина Леонідівна
Заєць Ірина Петрівна
Сушко Лариса Федорівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина IV

(російською мовою)

Навчальний посібник

Тем. план 2017, поз. 83

Підписано до друку16.05.2017. Формат 60х84 1/16. Папір друк. Друк плоский. Облік.-вид. арк. 5,41. Умов. друк. арк. 5,34. Тираж 100 пр. Замовлення № 92.

Національна металургійна академія України
49600, Дніпро, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ