МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

РОБОЧА ПРОГРАМА,
методичні вказівки та індивідуальні завдання до вивчення дисципліни «Вища математика» для студентів спеціальності 132 – матеріалознавство (ліквідація академрізниці)

Частина 2

Дніпро НМетАУ 2017

О.Є. Запорожченко, канд. фіз.-мат. наук, доц.

ЗМІСТ

ВСТУП

Вища математика без перебільшення є однією з найважливіших складових практично усіх природознавчих і технічних дисциплін. Тому її вивчення вкрай важливе для фундаментальної фахової підготовки сучасного інженера.

Аудиторні заняття, які проводяться для ліквідації студентами академрізниці, носять переважно оглядовий характер. Їх мета – створити уяву щодо загальної схеми побудови даного розділу математики, ознайомити з основними теоретичними відомостями і методами розв'язання типових задач. Головною ж формою навчання є самостійна робота. Вивчення теоретичних положень доцільно супроводжувати самостійним розв'язанням відповідних задач і лише після вироблення достатніх практичних навичок приступати до виконання завдань контрольної роботи. Необхідні консультації протягом навчального семестру надаються викладачами академії згідно із затвердженим розкладом.

Сьогодні в Інтернеті неважко знайти величезну кількість літератури з будь-якої теми, в тому числі і з вищої математики. Тому до списку рекомендованої літератури увійшли лише деякі з джерел. Рекомендації щодо їх використання дані у методичних вказівках до виконання контрольної роботи. Консультації відносно інших підручників студент може отримати у викладача.

Р О Б О Ч А   П Р О Г Р А М А

навчальної дисципліни
«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

ІІ семестр

Кількість годин: 165

Кількість контр. робіт: 1

Форма звітності: екзамен

Зміст програми

9. Диференціальні рівняння першого порядку

27. Задачі, які приводять до диференціальних рівнянь. Поняття звичайного диференціального рівняння першого порядку, загальний та частинний розв'язки, їх геометричний зміст. Задача Коші та її геометричний зміст. Теорема Коші (про існування і єдиність розв'язку задачі Коші). Диференціальні рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними.

28. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку та такі, що до них приводяться. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку, їх розв'язування методами Лагранжа (варіації довільної сталої) і Бернуллі. Рівняння Бернуллі.

29. Постановка і розв'язування задач геометричного і фізичного змісту, які приводять до звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

10. Диференціальні рівняння вищих порядків

30. Поняття звичайного диференціального рівняння вищого порядку. Розв'язок рівняння. Задача Коші.

31. Деякі типи диференціальних рівнянь вищих порядків, що допускають пониження порядку.

32. Поняття лінійного диференціального рівняння ***n***-го порядку. Загальні властивості.

33. Умови лінійної залежності і незалежності системи функцій. Визначник Вронського та його властивості. Фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного рівняння, необхідна і достатня умова її утворення. Теорема про структуру загального розв'язку. Побудова рівняння за фундаментальною системою.

34. Розв'язування лінійних однорідних диференціальних рівнянь вищих порядків зі сталими коефіцієнтами.

35. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння вищих порядків: теорема про структуру загального розв'язку, принцип суперпозиції частинних розв'язків. Розв'язування рівнянь зі сталими коефіцієнтами: метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа), підбір частинного розв'язку та його відшукання методом невизначених коефіцієнтів у випадку "спеціальної" правої частини.

11. Числові ряди

36. Поняття числового ряду. Збіжність і розбіжність ряду. Ряд геометричної прогресії, ряд Діріхле. Необхідна умова збіжності. Достатня умова розбіжності. Залишок числового ряду. Основні властивості збіжних рядів.

37. Поняття факторіала. Достатні умови (ознаки) збіжності числових рядів з додатними членами: ознака порівняння у звичайному та граничному вигляді, ознака Д'Аламбера, "радикальна" ознака Коші, "інтегральна" ознака Маклорена-Коші.

38. Абсолютна і умовна збіжності знакозмінних числових рядів. Збіжність знакопочережних рядів (ознака Лейбніца). Властивості знакопочережних числових рядів.

12. Степеневі ряди та їх застосування

39. Поняття функціонального ряду. Область збіжності і залишок функціонального ряду, абсолютна і умовна збіжності.

40. Мажоровні ряди. Властивості мажоровних рядів.

41. Степеневий ряд як частинний випадок функціонального ряду. Збіжність степеневих рядів (теорема Абеля). Радіус та інтервал збіжності степеневого

ряду, їх обчислення. Область збіжності степеневого ряду. Основні властивості степеневих рядів.

42. Ряди Тейлора і Маклорена. Умови розвинення функції в ряд Тейлора. Формула Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа. Розвинення функцій в ряди Тейлора і Маклорена. Таблиця найпростіших розвинень та її застосування.

43. Наближені обчислення значень функцій, визначених інтегралів та відшукання частинних розв'язків деяких диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів.

13. Основи теорії ймовірностей

44. Елементи комбінаторики: переставлення, розміщення, сполучення, загальні правила.

45. Основні поняття теорії ймовірностей: випадкові події, їх види та дії над ними, ймовірність випадкової події. Класична ймовірність. Статистична та геометрична ймовірності.

46. Умовна ймовірність. Теореми додавання і множення ймовірностей. Формула повної ймовірності. Ймовірності гіпотез. Формули Байєса.

47. Повторення незалежних випробувань: біноміальна формула Бернуллі, локальна формула Муавра-Лапласа, формула Пуассона, інтегральна формула Муавра-Лапласа.

48. Одновимірні випадкові величини, їх типи. Закони розподілу дискретних і неперервних випадкових величин: ряд та многокутник розподілу, інтегральна та диференціальна функції розподілу.

49. Числові характеристики випадкових величин: математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення.

50. Деякі найважливіші закони розподілу дискретних і неперервних випадкових величин: геометричний, біномний, Пуассона, рівномірний, показниковий. Нормальний розподіл (закон Гаусса) і пов'язані з ним розподіли Пірсона, Стьюдента, Фішера – Снедекора.

14. Елементи математичної статистики

51. Предмет і задачі математичної статистики. Генеральна та вибіркова сукупності. Види вибірок. Простий випадковий вибір, види реальних виборів.

52. Варіаційний ряд. Дискретний та інтервальний (групований) статистичні розподіли виборки. Полігон і гістограма частот (відносних частот).

53. Емпірічна (вибіркова) функція розподілу та її властивості.

54. Вибіркова оцінка генеральної числової характеристики. Числові характеристики вибірки: вибіркові середня, моменти, дисперсія, середнє квадратичне відхилення.

55. Статистичне оцінювання параметрів розподілу. Точкове і інтервальне оцінювання. Вимоги до точкових оцінок: незміщеність, спроможність, ефективність. Точкове оцінювання генеральних числових характеристик за відповідними вибірковими. Властивості вибіркової середньої і вибіркової дисперсії. Виправлена вибіркова дисперсія. Умовні та рівновіддалені варіанти. Зведення первинних варіант до рівновіддалених.

56. Інтервальне оцінювання числових характеристик і параметрів розподілу генеральної сукупності. Довірчий інтервал, точність і надійність (довірча ймовірність) оцінки, рівень значущості. Інтервальне оцінювання числових характеристик нормального розподілу.

57. Функціональна, статистична і кореляційна залежності. Основні задачі теорії кореляції. Кореляційна таблиця. Вибірковий парний коефіцієнт кореляції та його властивості. Оцінка тісноти кореляційного зв'язку між випадковими величинами за значенням вибіркового коефіцієнта кореляції. Шкала Чеддока.

58. Регресійний аналіз, регресія. Емпірічна лінія регресії $\boldsymbol{Y}$ на $\boldsymbol{X}$ ($\boldsymbol{X}$ на $\boldsymbol{Y}$), теоретичне та емпірічне рівняння регресії. Проста лінійна регресія, побудова рівнянь прямих регресії $\boldsymbol{Y}$ на $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{X}$ на $\boldsymbol{Y}$ методом найменших квадратів та їх статистичний аналіз (оцінка адекватності лінійної моделі регресії експериментальним даним на підставі креслення й величин вибіркового парного коефіцієнта кореляції та залишкового середньоквадратичного відхилення). Застосування умовних варіант при побудові рівнянь прямих регресії.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

ПІДРУЧНИКИ І НАВЧАЛЬНІ ПОСІБНИКИ

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения: Учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 2000. – 480 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2002. – 479 с.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 2: Учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 2000. – 416 с.
4. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.
5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 608 с.
6. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 288 с.
7. Шипачев В.С. Высшая математика: Учеб. для вузов. – М.: Юрайт, Высшее образование, 2009. – 480 с.

ЗБІРНИКИ ЗАДАЧ

8. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов вузов. – М.: Высш. шк., 2002. – 405с.
9. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін.; За ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. – К.: А.С.К., 2004. – 480 с.
10. Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / Под ред. С.Н. Федина. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 592 с.
11. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч. 4: Учебное пособие для втузов / Под общ. ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 432 с.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА

Виконання кожної контрольної роботи треба починати з вивчення теоретичних положень за наведеними посиланнями, причому це необхідно поєднувати з самостійним розв'язанням рекомендованих задач. До виконання контрольних завдань доцільно приступати тільки після вироблення достатніх практичних навичок. Типові приклади наведені з метою допомогти в цьому.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 2

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ

Рекомендується (скориставшися одним або двома з наведених нижче джерел)

- вивчити теоретичні положення за **[4]**, гл. 8, §§1.1-1.5, 2, 3, 4.1, 4.2, гл. 9, §§ 1.1-1.5, 2.1-2.6; **[5]**, гл. X, §§ 47, 48.1-48.4, 49, 50, 51.1-51.4, гл. XIII, XIV; **[7]**, гл. 15, §§ 1.1-1.6, 2-4, гл. 14, §§ 1-5; **[1]**, гл. 1-6, гл. 7, §§7.1, 7.5-7.7, гл. 11, §§11.1-11.7; **[2]**, гл. 1-8, 10, 11, гл. 12, §§ 1-6, 13-15, гл. 15, гл. 16, §§ 1-19, гл. 17, §§ 1-2, 5-7, гл. 18, §§ 1-9; **[6]**, гл. 1, 2, гл. 3, §§ 3.1, 3.4-3.5, гл. 5, § 5.5, гл. 7, 8;
- розібрати розв'язання задач у **[3]**, гл. III, §§ 1-6; гл. IV, §§ 1-4, гл. V, §§ 1-6, 8-11, 14, 16-18;
- – самостійно розв'язати задачі: **[3]**, №№ 515, 516, 523, 550, 551, 554, 568, 570, 603, 605, 611, 645, 647, 651, 652, 659, 660, 685, 686, 696, 697, 698, 703, 704, 721, 723, 725, 743, 744, 764, 766, 301, 302, 304, 305, 307, 308, 310, 311, 314, 368, 374, 377, 391, 392, 394, 416, 419, 423, 435; 812-814, 832, 834, 837, 843, 846, 859, 866, 870, 871, 874, 883, 886, 898, 906, 912, 953; **[9]**, гл. 8, №№ 2, 4, 43, 44, 48, 61, 66, 84, 86, 103, 105, 115, 121, 124, 133, 140, 206, 213, 214, 215, 217, 221, 227, 246-а, 246-б, 270 – 273, 291, 308 – 310, 315, 322, 339, 345, 350, 373, 376, 378, гл. 9, №№ 2, 4, 41, 43, 50, 52, 54, 56, 59, 64, 66, 68, 71, 75, 77, 80, 131, 136, 140, 143, 154, 211, 214, 216, 229, 233, 250, 293, 294, 302, 303, 307, 314, 316, 332, 338, 343, 348, 351, 353, 357, 359; **[10]**, №№ 2.1.2 (а, б), 16, 19, 23, 25, 40, 64, 2.2.2, 4, 10, 27, 2.3.2, 3, 5, 12, 23, 2.6.2, 4, 7, 9, 12, 13, 17, 24, 27, 28, 30, 2.7.4, 6, 19, 26, 34, 38-40, 44, 45, 49, 58, 61, 78, 79, 81, 86, 87, 1.1.12, 13, 20, 21, 24, 25, 29, 30, 37, 39, 40, 42, 44, 46-49, 51, 53, 1.2.7, 8, 12, 14, 16, 18, 1.3.7, 8, 10, 20, 34, 35; 6.1.4, 6, 12, 18, 23, 24, 6.3.4, 5, 6, 18, 6.4.4, 14, 16, 24, 35, 6.5.3, 5, 10, 6.6.5, 6.7.4, 10, 16, 6.8.4, 9, 6.9.4, 8, 6.10.3, 4, 6.11.2, 3, 4, 8, 59;

[8], №№ 5, 21, 28, 45, 51, 57, 82, 85, 93, 94, 99, 101, 112, 121, 126, 133, 146, 171, 173, 180, 193, 211, 220, 257, 260, 269, 272, 276, 296, 309, 329, 351, 442, 445, 447, 449, 450, 459, 502, 509, 536, **[11]**, гл. 18, №№ 66, 68, 78, 84, 87, 164, 191, 196, 226, 244, 258-260, 271, 312, 352, 361, 362, гл. 19, №№ 1, 7, 24, 49, 160, 293, 294, 307.

<u>Приклад 1.</u> З'ясувати, чи буде функція $y = x\arcsin x$ розв'язком рівняння $xy' - y = xtg\frac{y}{x}$.

Розв'язання. Якщо функція є розв'язком рівняння, то її підстановка до цього рівняння повинна перетворити його на вірну тотожність. Перевіримо це.

Підставимо $y' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ разом із $y = x\arcsin x$ до рівняння:

$$x\arcsin x + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} - x\arcsin x = xtg\frac{x\arcsin x}{x}.$$

З урахуванням того, що $tgx = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$ й $\sin(\arcsin x) = x$, отримуємо вірну тотожність $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = x \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Отже, задана функція справді задовольняє рівнянню, тобто є його розв'язком.

<u>Приклад 2.</u> Скласти рівняння кривої, якщо відомо, що вона проходить через точку $M_0(0,1)$, а кутовий коефіцієнт дотичної до цієї кривої в кожній точці дорівнює $k(x,y) = x\sqrt[3]{y}$.

Розв'язання. Як відомо, кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = y(x)$ в довільній точці $M(x, y)$ є $k(x, y) = y'$. Отже, маємо рівняння $y' = x\sqrt[3]{y}$. Поділимо змінні і отримаємо $\frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = xdx$, звідки $\frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2} = \frac{x^2}{2} + \frac{C}{2}$ або $y^2 = \left(\frac{x^2+C}{3}\right)^3$. Отриманий загальний розв'язок є рівнянням сім'ї кривих. Шукана крива проходить через точку M_0, отже, її рівняння визначається значенням $C = C^*$, знайденим з умови $y(x_0) = y_0$, тобто, в даному випадку, з умови $y(0) = 1$. Отже, $1^2 = \left(\frac{0 + C^*}{3}\right)^3$, звідки $C^* = 3$. Таким чином, рівняння шуканої кривої є $y^2 = \left(\frac{x^2}{3} + 1\right)^3$. Графік додатної гілки кривої наведений на рис. 1.

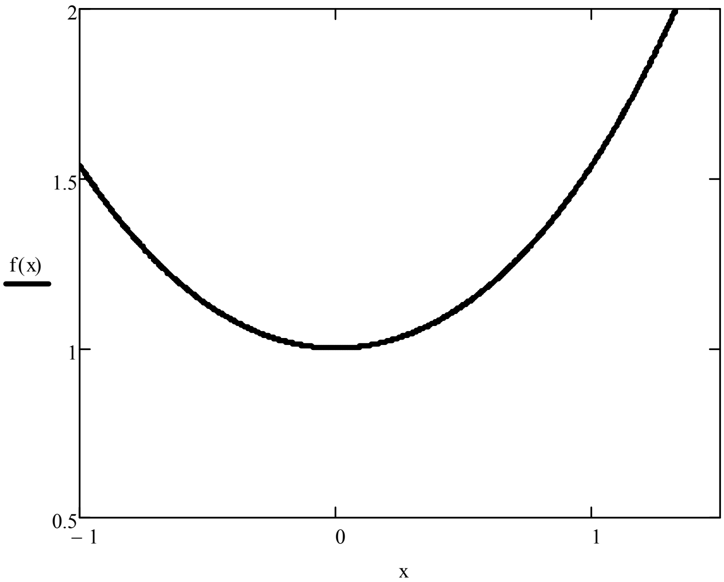

Рис. 1

<u>Приклад 3.</u> Розв'язати рівняння

а) $2xy^2dx - ydy = yx^2dy - 6xdx$; б) $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0$;

в) $y' = \frac{2x + y - 4}{x - y + 1}$; г) $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$ (застосувати метод Бернуллі).

Розв'язання.

а) Перетворимо рівняння до вигляду $2x(y^2 + 3)dx = y(x^2 + 1)dy$. Отже, маємо *рівняння з відокремлюваними змінними* $X_1(x)Y_1(y)dx + X_2(x)Y_2(y)dy = 0$. Поділимо обидві частини рівняння на добуток $(y^2 + 3)(x^2 + 1)$. Оскільки обидва множники не дорівнюють нулю (а саме, додатні), то при цьому частинні (або особливі) розв'язки рівняння не загублюються. Таким чином, дістаємо рівняння з відокремленими змінними $\frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{y}{y^2+3}dy$. Після інтегрування отримуємо загальний інтеграл заданого рівняння $\ln(x^2+1) = \frac{1}{2}\ln(y^2+3) + \ln|C|$, $C \neq 0$, який після потенціювання і використання властивостей логарифмів набуває вигляду $\frac{x^2+1}{\sqrt{y^2+3}} = C$;

б) Маємо *однорідне* диференціальне рівняння першого порядку $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, тому що функції $P(x,y) = x - y\cos\frac{y}{x}$ й $Q(x,y) = x\cos\frac{y}{x}dy$ є однорідними одного й того самого виміру. Справді, $P(\lambda x, \lambda y) = \lambda x - \lambda y\cos\frac{\lambda y}{\lambda x} = \lambda \cdot P(x,y)$, $Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda x\cos\frac{\lambda y}{\lambda x} = \lambda \cdot Q(x,y)$.

Оскільки $x \neq 0$, то рівняння приводиться до вигляду

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 - \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}}{\cos\frac{y}{x}}$. Застосуємо підстановку $y = ux$. Тоді $y' = u'x + u$ і

$u'x + u = \frac{u\cos u - 1}{\cos u}$; $u'x = \frac{u\cos u - 1}{\cos u} - u$; $u'x = -\frac{1}{\cos u}$; $\frac{du}{dx}x = -\frac{1}{\cos u}$; $\cos u du + \frac{dx}{x} = 0$. Інтегрування отриманого рівняння з відокремленими змінними дає загальний інтеграл $\sin u + \ln|x| = C$, який після повернення до вихідної змінної y набуває остаточного вигляду $\sin\frac{y}{x} + \ln|x| = C$;

в) Дане рівняння відноситься до типу $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$. Такі рівняння у випадку $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ зводяться до однорідних за допомогою підстановки $x = x_0 + u$, $y = y_0 + v$, де x_0, y_0 є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$. Розв'язком системи $\begin{cases} 2x + y - 4 = 0, \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$ є $x_0 = 1$, $y_0 = 2$.

Зробимо підстановку $x = 1 + u$, $y = 2 + v$. Тоді $dx = du$, $dy = dv$, $y' = \dfrac{dv}{du}$.

Отримуємо однорідне рівняння $\dfrac{dv}{du} = \dfrac{2u + v}{u - v}$. Розв'яжемо це рівняння за допомогою підстановки $v = zu$, $\dfrac{dv}{du} = u\dfrac{dz}{du} + z$. Маємо

$$u\frac{dz}{du} + z = \frac{2 + z}{1 - z}; \quad u\frac{dz}{du} = \frac{2 + z^2}{1 - z}; \quad \frac{1 - z}{2 + z^2}dz = \frac{du}{u}.$$

Після інтегрування дістаємо загальний інтеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\ln(2 + z^2) = \ln|u| + C.$$

Повертаючись до вихідних змінних за формулами $z = \dfrac{v}{u}$, $v = y - 2$, $u = x - 1$, остаточно отримуємо $\dfrac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{y - 2}{x - 1}\right) - \dfrac{1}{2}\ln\left[2 + \left(\dfrac{y - 2}{x - 1}\right)^2\right] = \ln|x - 1| + C$;

г) Маємо *лінійне* диференціальне рівняння першого порядку $y' + p(x)y = q(x)$. Розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді добутку двох невідомих функцій $y = uv$, отже, $y' = u'v + uv'$. Підставимо y та y' у рівняння і отримаємо $u'v + uv' + uv\cos x = e^{-\sin x}$ або $u'v + u(v' + v\cos x) = e^{-\sin x}$ $(*)$. Невідому функцію $v = v(x)$ будемо шукати з умови $v' + v\cos x = 0$ $(**)$, отже, $\dfrac{dv}{dx} = -v\cos x$ або $\dfrac{dv}{v} = -\cos x dx$. Інтегруючи, знаходимо $\ln|v| = -\sin x$, звідки $v = e^{-\sin x}$ (для зручності беремо частинний розв'язок, якому відповідає нульове значення довільної сталої). Підставимо знайдену функцію v в рівняння (*) і з урахуванням (**) отримаємо $u'e^{-\sin x} = e^{-\sin x}$. Оскільки $e^{-\sin x} \neq 0 \quad \forall x$, то $u' = 1$ або $u = x + C$. Таким чином, загальний розв'язок має вигляд $y = (x + C)\, e^{-\sin x}$.

Приклад 4. Розв'язати задачу Коші $xy' + y = y^2 \ln x$, $y(1) = -\dfrac{1}{2}$.

Розв'язання. Оскільки $x > 0$, то без втрати розв'язку перетворимо рівняння до вигляду $y' + \frac{y}{x} = y^2 \frac{\ln x}{x}$. Отримали рівняння Бернуллі $y' + p(x)y = y^r q(x)$, де $r \neq 0$, $r \neq 1$. Розв'яжемо його однойменним методом: $y = uv$, $y' = u'v + uv'$,

$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = u^2v^2 \frac{\ln x}{x}$; $u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = u^2v^2 \frac{\ln x}{x}$ (*); $v' + \frac{v}{x} = 0$ (**);

$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$; $\ln|v| = -\ln|x|$; $v = \frac{1}{x}$; $u'\frac{1}{x} = u^2 \frac{1}{x^2}\frac{\ln x}{x}$; $\frac{du}{u^2} = \frac{\ln x}{x^2}dx$;

$-\frac{1}{u} = -\frac{\ln x + 1}{x} - C$; $u = \frac{x}{\ln x + 1 - Cx}$. Загальний розв'язок $y = uv$, таким чином, має вигляд $y = \frac{1}{\ln x + 1 - Cx}$. Розв'язок поставленої задачі Коші $\tilde{y}$ визначається значенням довільної сталої C^*, знайденим з початкової умови: $-\frac{1}{2} = \frac{1}{1 - C^*}$, $C^* = 3$. Отже, шуканий розв'язок має вигляд $\tilde{y} = \frac{1}{\ln x + 1 - 3x}$.

<u>Приклад 5.</u> Розв'язати задачу Коші

а) $y'' = \frac{1}{1+x^2}$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 2$; б) $x(y''+1) + y' = 0$, $y(1) = \frac{1}{4}$, $y'(1) = 0$;

в) $y''tgy = 2y'^2$, $y(1) = \frac{\pi}{4}$, $y'(1) = -\frac{1}{2}$; г) $y'' = \sqrt{1 - y'^2}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$;

д) $2y'' = y' + y'^3$, $y(0) = \frac{\pi}{2}$, $y'(0) = 1$; е) $3y'y'' = e^y$, $y(-5) = 0$, $y'(-5) = 1$.

Розв'язання.

а) Рівняння має вигляд $y'' = f(x)$, тобто містить тільки старшу похідну і незалежну змінну. Знайдемо його загальний розв'язок шляхом послідовного двократного інтегування:

$$\frac{d(y')}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow d(y') = \frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow \int d(y') = \int \frac{dx}{1+x^2} + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = arctgx + C_1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = arctgx + C_1 \Rightarrow dy = (arctgx + C_1)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \int (arctgx + C_1)dx + C_2 \Rightarrow y = xarctgx - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1x + C_2.$$

Частинний розв'язок $\tilde{y} = y(x, C_1^*, C_2^*)$ знайдемо, визначивши з початкових умов значення $C_1 = C_1^*$ та $C_2 = C_2^*$ довільних сталих: $y(0) = -3 \quad \Rightarrow \quad -3 = C_2^*$, $y'(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = C_1^*$. Отже, розв'язок поставленої задачі Коші має вигляд $\tilde{y} = x\,arctgx - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + 2x - 3$;

б) Рівняння має вигляд $F(x, y', y'') = 0$, тобто містить в явному вигляді незалежну змінну, але не містить невідому функцію. Порядок такого рівняння знижується на одиницю за допомогою підстановки $y' = p(x)$. Тоді $y'' = p'$ і рівняння набуває вигляду $x(p' + 1) + p = 0$. Отримали рівняння першого порядку, яке може бути віднесено як до однорідного, так і до лінійного. Вважаючи його однорідним, тобто, $p' + 1 = -\frac{p}{x}$ зробимо підстановку $p = ux$. Тоді $p' = u'x + u \quad \Rightarrow$

$$u'x + u = -1 - u \quad \Rightarrow \quad u'x = -(1 + 2u) \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{1 + 2u} = -\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\ln|1 + 2u| = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|C_1| \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 + 2u} = \frac{\sqrt{C_1}}{x} \quad \Rightarrow \quad 1 + 2u = \frac{C_1}{x^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad u = \frac{1}{2}\left(\frac{C_1}{x^2} - 1\right) \quad \Rightarrow \quad p = \frac{C_1}{2x} - \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{C_1}{2x} - \frac{x}{2}.$$

Після відокремлення змінних і інтегрування отримуємо загальний розв'язок $y = \frac{C_1}{2}\ln|x| - \frac{x^2}{4} + C_2$.

Враховуючи, що довільні сталі незалежні одна від одної і перепозначивши $\frac{C_1}{2}$ на C_1, остаточно будемо мати $y = C_1 \ln|x| - \frac{x^2}{4} + C_2$. Значення $C_1 = C_1^*$ та $C_2 = C_2^*$ довільних сталих знайдемо з початкових умов:

$$y(1) = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + C_2^* \quad \Rightarrow \quad C_2^* = \frac{1}{2},\ y'(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = -\frac{1}{2} + C_1^* \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad C_1^* = \frac{1}{2}$. Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд $\tilde{y} = \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}$;

в) Рівняння має вигляд $F(y, y', y'') = 0$, тобто містить в явному вигляді невідому функцію, але не містить незалежну змінну. Порядок такого рівняння знижується на одиницю за допомогою підстановки $y' = q(y)$. Тоді $y'' = q\frac{dq}{dy}$ і рівняння набуває вигляду $q\frac{dq}{dy}tgy = 2q^2$. Отримали рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Запишемо його у вигляді $q\left(\frac{dq}{dy}tgy - 2q\right) = 0$. Прирівнюючи до нуля кожен з множників, будемо мати $q = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = C;\ \frac{dq}{dy}tgy - 2q = 0 \Rightarrow \frac{dq}{q} = 2ctgydy \Rightarrow \ln|q| = 2\ln|\sin y| + \ln|C_1| \Rightarrow$$

$\Rightarrow q = C_1 \sin^2 y \Rightarrow y' = C_1 \sin^2 y \Rightarrow \frac{dy}{\sin^2 y} = C_1 dx$. Отже, загальний інтеграл рівняння має вигляд $ctgy = C_1 x + C_2$ (знак « - » врахований). Бачимо, що розв'язок $y = C$ не є особливим, оскільки утворюється з загального при $C_1 = 0$. Значення $C_1 = C_1^*$ та $C_2 = C_2^*$ довільних сталих знайдемо з початкових умов:

$$y(1) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow ctg\frac{\pi}{4} = C_1^* + C_2^*, \quad y'(1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{4}}\left(-\frac{1}{2}\right) = C_1^* \Rightarrow \quad C_1^* = 1,$$

$C_2^* = 0$. Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд $ctgy = x$;

г) Рівняння має вигляд $F(y', y'') = 0$, тобто не містить в явному вигляді ані невідому функцію, ані незалежну змінну. Порядок такого рівняння може бути знижений на одиницю за допомогою будь-якої з підстановок $y' = p(x)$ або $y' = q(y)$. Переважність однієї з них визначається конкретним рівнянням. В даному випадку застосуємо підстановку $y' = p(x)$: $y'' = p'$,

$$p' = \sqrt{1 - p^2} \Rightarrow \frac{dp}{\sqrt{1-p^2}} = dx \Rightarrow \arcsin p = x + C_1 \Rightarrow p = \sin(x + C_1) \Rightarrow$$

$\Rightarrow y' = \sin(x + C_1) \Rightarrow y = C_2 - \cos(x + C_1)$. Значення $C_1 = C_1^*$ та $C_2 = C_2^*$ довільних сталих знайдемо з початкових умов:

$$y(0) = 2 \Rightarrow 2 = C_2^* - \cos C_1^*,\ y'(0) = 1 \Rightarrow 1 = \sin C_1^* \Rightarrow C_1^* = \frac{\pi}{2},\ C_2^* = 2.$$

Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд $\tilde{y} = 2 - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ або $\tilde{y} = 2 + \sin x$;

д) Тип даного рівняння той самий, що й в попередньому прикладі. В даному разі вигідніше застосувати підстановку $y' = q(y)$ (перевірте): $y'' = q\dfrac{dq}{dy}$,

$$2q\frac{dq}{dy} = q(1+q^2) \;\Rightarrow\; q = 0 \;\Rightarrow\; y = C,\; 2\frac{dq}{dy} = 1+q^2 \;\Rightarrow\; \frac{dq}{1+q^2} = \frac{dy}{2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; arctgq = \frac{y}{2} + C_1 \;\Rightarrow\; q = tg\left(\frac{y}{2}+C_1\right) \;\Rightarrow\; y' = tg\left(\frac{y}{2}+C_1\right) \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow\; ctg\left(\dfrac{y}{2}+C_1\right)dy = dx \;\Rightarrow\; 2\ln\left|\sin\left(\dfrac{y}{2}+C_1\right)\right| = x + C_2$ – загальний інтеграл. Значення $C_1 = C_1^*$ та $C_2 = C_2^*$ довільних сталих знайдемо з початкових умов:

$$y(0) = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; 2\ln\left|\sin\frac{\pi}{4}\right| = C_2^* \;\Rightarrow\; C_2^* = \ln\sin^2\frac{\pi}{4} = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2,$$

$y'(0) = 1 \;\Rightarrow\; 1 = tg\left(\dfrac{\pi}{4}+C_1^*\right) \;\Rightarrow\; C_1^* = 0$. Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд $2\ln\left|\sin\dfrac{y}{2}\right| = x - \ln 2$, розв'язок $y = C$ є особливим;

е) При розв'язанні задач Коші значення кожної з довільних сталих рекомендується знаходити з початкових умов одразу як тільки ця стала з'являється в процесі розв'язання. Це демонструє даний приклад.

Рівняння відноситься до типу $F(y, y', y'') = 0$, отже, застосуємо підстановку $y' = q(y)$, $y'' = q\dfrac{dq}{dy}$: $3q^2\dfrac{dq}{dy} = e^y \;\Rightarrow\; 3q^2dq = e^y dy \;\Rightarrow\; q^3 = e^y + C_1 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; y' = \sqrt[3]{e^y + C_1} \;\Rightarrow\; \dfrac{dy}{\sqrt[3]{e^y + C_1}} = dx$ і спроба інтегрування приводить до інтеграла, що не береться. Врахуємо обидві початкові умови: $1 = \sqrt[3]{e^0 + C_1^*} \;\Rightarrow\; C_1^* = 0$. Зауважимо, що з цього місця шукаємо вже не загальний, а частинний розв'язок. Тоді $\dfrac{dy}{\sqrt[3]{e^y}} = dx \;\Rightarrow\; e^{-\frac{y}{3}}dy = dx \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; -3e^{-\frac{y}{3}} = x + C_2$. Врахуємо тепер першу початкову умову і знайдемо значення C_2^*: $-3e^0 = -5 + C_2^* \;\Rightarrow\; C_2^* = 2$. Отже розв'язок задачі Коші має вигляд частинного інтеграла $-3e^{-\frac{y}{3}} = x + 2$.

Приклад 6. Розв'язати рівняння

а) $y'' + 3y' - 4y = 0$; б) $y'' - 16y' + 64y = 0$; в) $y'' - 6y' + 25y = 0$.

Розв'язання.

а) Маємо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Складемо характеристичне рівняння $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$. Його корені $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -4$ дійсні і не дорівнюють один одному. Відповідно до цього фундаментальну систему розв'язків утворюють функції $y_1(x) = e^x$ й $y_2(x) = e^{-4x}$, а загальний розв'язок рівняння має вигляд $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}$, де C_1 й C_2 – довільні сталі;

б) Складемо характеристичне рівняння $\lambda^2 - 16\lambda + 64 = 0$. Його корені $\lambda_1 = 8 = \lambda_2$ дійсні і дорівнюють один одному. Отже, фундаментальну систему розв'язків утворюють функції $y_1(x) = e^{8x}$ й $y_2(x) = xe^{8x}$, а загальний розв'язок рівняння має вигляд $y(x) = e^{8x}(C_1 + C_2 x)$;

в) Складемо характеристичне рівняння $\lambda^2 - 6\lambda + 25 = 0$. Його корені $\lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 25} = 3 \pm 4i$ комплексні спряжені. Отже, фундаментальну систему розв'язків утворюють функції $y_1(x) = e^{3x}\cos 4x$ й $y_2(x) = e^{3x}\sin 4x$, а загальний розв'язок рівняння має вигляд $y(x) = e^{3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$.

Приклад 7. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + 12y' + 45y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 3.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння $\lambda^2 + 12\lambda + 45 = 0$. Його корені $\lambda_{1,2} = -6 \pm \sqrt{36 - 45} = -6 \pm 3i$ комплексні спряжені. Отже, фундаментальну систему розв'язків утворюють функції $y_1(x) = e^{-6x}\cos 3x$ й $y_2(x) = e^{-6x}\sin 3x$, а загальний розв'язок рівняння має вигляд $y(x) = e^{-6x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$. Тоді

$$y'(x) = -6e^{-6x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + e^{-6x}(-3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x).$$

Знайдемо розв'язок задачі Коші, для чого обчислимо значення C_1^* й C_2^* з початкових умов: $y(0) = 5 \quad \Rightarrow \quad e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) = 5$,

$y'(0) = 3 \quad \Rightarrow \quad -6e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) + 3e^0(-C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0) = 3$.

Отже, $C_1^* = 5$, $C_2^* = 11$ і розв'язок задачі Коші має вигляд

$$\tilde{y}(x) = e^{-6x}(5\cos 3x + 11\sin 3x).$$

Приклад 8. Розв'язати рівняння $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$.

Розв'язання. Маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною $f(x) = e^{-2x} \ln x$, яка неперервна на $(0, +\infty)$. Як відомо, загальний розв'язок такого рівняння має вигляд $y(x) = y_{одн}(x) + y^*(x)$, де $y_{одн}(x)$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, а $y^*(x)$ – будь-який частинний розв'язок вихідного рівняння.

1) Знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння $y'' + 4y' + 4y = 0$: оскільки характеристичне рівняння $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ має корені $\lambda_{1,2} = -2$, то фундаментальну систему розв'язків утворюють функції $y_1(x) = e^{-2x}$ й $y_2(x) = xe^{-2x}$, а загальний розв'язок рівняння має вигляд $y_{одн}(x) = e^{-2x}(C_1 + C_2 x)$.

2) Частинний розв'язок знайдемо методом варіації довільних сталих (методом Лагранжа), згідно з яким $y^*(x)$ подається у вигляді $y^*(x) = D_1(x) y_1(x) + D_2(x) y_2(x)$. Невідомі функції $D_1(x)$ й $D_2(x)$ повинні задовольняти системі рівнянь $\begin{cases} D_1'(x) y_1(x) + D_2'(x) y_2(x) = 0 \\ D_1'(x) y_1'(x) + D_2'(x) y_2'(x) = f(x) \end{cases}$, лінійних відносно $D_1'(x)$ й $D_2'(x)$. Оскільки головний визначник цієї системи $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$ являє собою визначник Вронського, який відмінний від нуля в даному випадку на $(0, +\infty)$, то система сумісна і має єдиний розв'язок, який знаходиться за правилом Крамера

$$D_1'(x) = -\frac{y_2(x) f(x)}{W(x)}, \quad D_2'(x) = \frac{y_1(x) f(x)}{W(x)}.$$

Після інтегрування отримаємо

$$D_1(x) = -\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}dx \ , \qquad D_2(x) = \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}dx \ .$$

Отже,

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & e^{-2x}(1-2x) \end{vmatrix} = e^{-4x},$$

$$D_1(x) = -\int \frac{xe^{-2x}e^{-2x}\ln x}{e^{-4x}}dx = -\int x\ln x dx = -\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} \ ,$$

$$D_2(x) = \int \frac{e^{-2x}e^{-2x}\ln x}{e^{-4x}}dx = \int \ln x dx = x\ln x - x$$

(тут під символом інтеграла розуміємо первісну). Таким чином, частинний розв'язок має вигляд

$$y^*(x) = \left(-\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4}\right)e^{-2x} + \left(x\ln x - x\right)xe^{-2x} = \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{3}{4}x^2\right)e^{-2x},$$

а загальний розв'язок є $y(x) = \left(C_1 + C_2 x + \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{3}{4}x^2\right)e^{-2x}$.

<u>Приклад 9.</u> Вказати вигляд (без відшукання коефіцієнтів) частинного розв'язку рівняння.

а) $y'' - y' = x^2 + 3x + 10$; б) $y'' + 6y' + 9y = (x^2 - x - 5)\, e^{-3x}$;

в) $y'' + 9y = (x^3 - 3)\cos 3x$; г) $y'' - 8y' + 15y = 3\cos x - 5\sin x$;

д) $y'' - 8y' + 16y = (2x+1)e^{4x}\sin 2x$; е) $y'' - 2y' + 2y = e^x(x^2\cos x + 2\sin x)$.

Розв'язання. В усіх випадках маємо лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами й правими частинами так званого "спеціального" вигляду $f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x]$, де $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ – многочлени степенів m й n відповідно. Тоді частинний розв'язок рівняння *підбирається* у вигляді $y^*(x) = x^k e^{\alpha x}[R_s(x)\cos\beta x + T_s(x)\sin\beta x]$, де k – кратність контрольного числа првої частини $\sigma = \alpha + \beta i$ серед коренів характеристичного рівняння, а $R_s(x)$ і $T_s(x)$ – многочлени *одного й того ж самого* степіня $s = \max\{m, n\}$ з *невизначеними* коефіцієнтами. У таблиці наведені вигляди частинного розв'язку в залежності від правої частини (число

k залежить також від лівої частини рівняння, а саме, від коренів характеристичного рівняння, і тому визначається окремо).

№	$f(x)$	σ	s	y^*
1.	$P_m(x)$	0	m	$x^k R_m(x)$
2.	$e^{\alpha x} P_m(x)$	α	m	$x^k e^{\alpha x} R_m(x)$
3.	$P_m(x)\cos\beta x$	βi	m	$x^k [R_m(x)\cos\beta x + T_m(x)\sin\beta x$
4.	$Q_n(x)\sin\beta x$	βi	n	$x^k [R_n(x)\cos\beta x + T_n(x)\sin\beta x$
5.	$P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x$	βi	$\max\{m, n\}$	$x^k [R_s(x)\cos\beta x + T_s(x)\sin\beta x$
6.	$e^{\alpha x} P_m(x)\cos\beta x$	$\alpha + \beta i$	m	$x^k e^{\alpha x}[R_m(x)\cos\beta x + T_m(x)\sin\beta x$
7.	$e^{\alpha x} Q_n(x)\sin\beta x$	$\alpha + \beta i$	n	$x^k e^{\alpha x}[R_n(x)\cos\beta x + T_n(x)\sin\beta x$
8.	$e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x]$	$\alpha + \beta i$	$\max\{m, n\}$	$x^k e^{\alpha x}[R_s(x)\cos\beta x + T_s(x)\sin\beta x$

а) Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$. Судячи з правої частини, маємо випадок 1 (див. таблицю), де $f(x) = P_2(x) = x^2 + 3x + 10$, тобто $m = 2$. Оскільки $\sigma = 0$, то $k = 1$; $s = m = 2$. Отже, $y^* = x\,(Ax^2 + Bx + C)$;

б) Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$. Судячи з правої частини, маємо випадок 2 (див. таблицю), де $f(x) = (x^2 - x - 5)\,e^{-3x}$, тобто $m = 2$. Оскільки $\alpha = -3$, $\beta = 0$, то $\sigma = -3$, а $k = 2$; $s = m = 2$. Отже, $y^* = x^2\,e^{-3x}(Ax^2 + Bx + C)$;

в) Корені характеристичного рівняння $\lambda_{1,2} = \pm 3i$. Судячи з правої частини, маємо випадок 3 (див. таблицю), де $f(x) = (x^3 - 3)\cos 3x$, тобто $m = 3$. Оскільки $\alpha = 0$, $\beta = 3$, то $\sigma = 3i$, а $k = 1$; $s = m = 3$. Отже, $y^* = x\,[(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cos 3x + (Ex^3 + Fx^2 + Gx + H)\sin 3x]$;

г) Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$. Судячи з правої частини, маємо випадок 5 (див. таблицю), де $f(x) = 3\cos x - 5\sin x$, тобто $m = n = 0$. Оскільки $\alpha = 0$, $\beta = 1$, то $\sigma = i$, а $k = 0$; $s = 0$. Отже, $y^* = A\cos x + B\sin x$;

д) Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$. Судячи з правої частини, маємо випадок 7 (див. таблицю), де $f(x) = (2x+1)e^{4x}\sin 2x$, тобто $n = 1$. Оскільки $\alpha = 4$, $\beta = 2$, то $\sigma = 4 + 2i$, а $k = 0$; $s = n = 1$. Отже, $y^* = e^{4x}[(Ax+B)\cos 2x + (Cx+D)\sin 2x]$;

е) Корені характеристичного рівняння $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Судячи з правої частини, маємо випадок 8 (див. таблицю), де $f(x) = e^x(x^2\cos x + 2\sin x)$, тобто $m = 2$, $n = 0$. Оскільки $\alpha = 1$, $\beta = 1$, то $\sigma = 1 + i$, а $k = 1$; $s = \max\{2, 0\} = 2$. Отже, $y^* = xe^x\,[(Ax^2 + Bx + C)\cos x + (Dx^2 + Ex + F)\sin x]$.

<u>Приклад 10.</u> Розв'язати задачу Коші $y'' + 4y = \sin 2x$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Розв'язання. Маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною "спеціального" вигляду $f(x) = \sin 2x$.Загальний розв'язок рівняння має вигляд $y(x) = y_{одн}(x) + y^*(x)$, де $y_{одн}(x)$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, а $y^*(x)$ – будь-який частинний розв'язок вихідного рівняння.

1) Знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння $y'' + 4y = 0$: оскільки характеристичне рівняння $\lambda^2 + 4 = 0$ має корені $\lambda_{1,2} = \pm 2i$, то загальний розв'язок рівняння має вигляд $y_{одн}(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$.

2) Судячи з правої частини, маємо випадок 4 (див. таблицю), де $f(x) = \sin 2x$, тобто $m = n = 0$. Оскільки $\alpha = 0$, $\beta = 2$, то $\sigma = 2i$, а $k = 1$; $s = 0$. Отже, частинний розв'язок підбираємо у вигляді $y^* = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$. Знайдемо коефіцієнти A й B, для чого підставимо ${y^*}'$ та ${y^*}''$ у рівняння. Оскільки

$${y^*}' = A\cos 2x + B\sin 2x + x(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) = (A + 2Bx)\cos 2x +$$
$$+ (B - 2Ax)\sin 2x,$$

$${y^*}'' = 2B\cos 2x - 2(A + 2Bx)\sin 2x - 2A\sin 2x +$$
$$+ 2(B - 2Ax)\cos 2x = 4\,[(B - Ax)\cos 2x - (A + Bx)\sin 2x],$$

то отримуємо рівність

$$4\,[(B-Ax)\cos 2x-(A+Bx)\sin 2x]+4x(A\cos 2x+B\sin 2x)=\sin 2x$$

або $\quad 4B\cos 2x-4A\sin 2x=\sin 2x$. Прирівняємо коефіцієнти при $\cos 2x$ та $\sin 2x$ в обох частях рівності: $\begin{array}{c|l}\cos 2x & 4B=0\\ \sin 2x & -4A=1\end{array}$, звідки $A=-\dfrac{1}{4}$, $B=0$. Отже, частиний розв'язок має вигляд $y^{*}=-\dfrac{x}{4}\cos 2x$, а загальний розв'язок є $y(x)=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\dfrac{x}{4}\cos 2x$.

3) Знайдемо розв'язок задачі Коші, для чого обчислимо значення C_1^{*} й C_2^{*} з початкових умов: $y(0)=0 \quad\Rightarrow\quad C_1=0$;

$y'(x)=-2C_1\sin 2x+2C_2\cos 2x-\dfrac{1}{4}\cos 2x+\dfrac{x}{2}\sin 2x$, $y'(0)=0 \quad\Rightarrow\quad 2C_2-\dfrac{1}{4}=0$.

Отже, $C_1^{*}=0$, $C_2^{*}=\dfrac{1}{8}$ і шуканий розв'язок задачі Коші має вигляд

$$\tilde{y}(x)=\frac{1}{8}\sin 2x-\frac{x}{4}\cos 2x.$$

<u>Приклад 11.</u> Встановити збіжність або довести розбіжність рядів

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$; б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^2}}$; в) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\ln^2 n}$; г) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$;

д) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n^2}\,arctg\frac{1}{n^2}$.

Розв'язання.

а) Оскільки $\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}<\dfrac{1}{\sqrt{n\cdot n\cdot n}}=\dfrac{1}{n^{3/2}}$, а ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ збігається як ряд Діріхле при $\alpha=\dfrac{3}{2}>1$, то за ознакою порівняння заданий ряд також збігається;

б) Для порівняння оберемо звичайний гармонічний ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, який, як відомо, розбігається. Тоді за граничною ознакою порівняння із застосуванням правила Лопіталя будемо мати

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\ln n}{\sqrt[3]{n^2}}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\ln n}\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{n^2}}}{\dfrac{1}{n}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}=\infty.$$

Отже, на підставі цієї ознаки, заданий ряд *розбігається*;

в) Для порівняння оберемо ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$, який *збігається*, оскільки $p=2>1$. Тоді за граничною ознакою порівняння із застосуванням правила Лопіталя будемо мати $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{n}\ln^2 n}}{\dfrac{1}{n\ln^2 n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty$. Оскільки границя нескінченна, то ознака незастосовна. Це означає, що ряд для порівняння обраний невдало. Порівняння ж з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ показує, що даний ряд *розбігається* (виконайте самостійно);

г) Спроби порівняння даного ряду з розбіжним гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ або збіжним рядом Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ виявляються невдалими (перевірте!). Тому для порівняння оберемо (збіжний) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\beta}}$, де $1<\beta<2$. Візьмемо, наприклад, $\beta=3/2$. Тоді за ознакою порівняння із застосуванням правила Лопіталя будемо мати

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\ln n}{n^2}}{\dfrac{1}{n^{3/2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{2\sqrt{n}}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0.$$

Отже, за граничною ознакою порівняння заданий ряд *збігається*;

д) При дослідженні рядів дуже корисною може виявитися ***таблиця еквівалентних нескінченно малих***:

якщо $\alpha(n)\to 0$ при $n\to\infty$, то

$$\sin\alpha(n)\sim\alpha(n),$$

$$\arcsin\alpha(n)\sim\alpha(n),$$

$$tg\,\alpha(n)\sim\alpha(n),$$

$$arctg\,\alpha(n) \sim \alpha(n),$$

$$\ln[1+\alpha(n)] \sim \alpha(n),$$

$$b^{\alpha(n)} - 1 \sim \ln b \cdot \alpha(n),$$

$$e^{\alpha(n)} - 1 \sim \alpha(n).$$

Оскільки $\frac{1}{n^2} \to 0$ при $n \to \infty$, то на підставі наведеної таблиці, $arctg\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$.

Тоді $\sqrt[3]{n^2}\,arctg\frac{1}{n^2} \sim \sqrt[3]{n^2}\,\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^{4/3}}$. Це означає, що якщо за ряд для порівняння обрати *збіжний* ряд Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4/3}}$ $(\alpha = \frac{4}{3} > 1)$, то за граничною ознакою порівняння отримаємо $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\,arctg\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^{4/3}}} = 1$. Тоді за наслідком з цієї ознаки заданий ряд *збігається*.

Приклад 12. Встановити збіжність або довести розбіжність рядів

а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!3^n}{n^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^3}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} arctg^n\frac{\sqrt{3n+2}}{\sqrt{n+1}}$; д) $\frac{1}{2^3}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{4^3}+\ldots$.

Розв'язання.

а) Оскільки $a_n = \frac{(2n+1)!!}{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n+1)}$, то

$$a_{n+1} = \frac{[2(n+1)+1]!!}{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot [(3(n+1)+1]} = \frac{(2n+3)!!}{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n+4)} = \frac{(2n+1)!!(2n+3)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n+1)\cdot(3n+4)}$$

і тоді $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n+4} = \frac{2}{3} < 1$. Отже, за ознакою Д'Аламбера заданий ряд *збігається*;

б) Оскільки $a_n = \frac{n!3^n}{n^n}$, то $a_{n+1} = \frac{(n+1)!3^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n!(n+1)3^n\cdot 3}{(n+1)^n(n+1)}$.

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=3\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=3\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=\frac{3}{e}>1$. Таким чином, за ознакою Д'Аламбера заданий ряд *розбігається*;

в) Оскільки $a_n=\left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^3}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^2}\left\{1^\infty\right\}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}e^a$, де $a=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\frac{n^2+5}{n^2+6}-1\right)=-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+6}=-1$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=$

$=e^{-1}=\frac{1}{e}<1$ і за ознакою Коші заданий ряд *збігається*;

г) Оскільки $a_n=arctg^n\frac{\sqrt{3n+2}}{\sqrt{n+1}}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}arctg\frac{\sqrt{3n+2}}{\sqrt{n+1}}=$

$=arctg\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{3n+2}{n+1}}=arctg\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}>1$. Отже, за ознакою Коші заданий ряд *розбігається*;

д) Загальний член ряду, як неважко бачити, $a_n=\frac{n}{(n+1)^3}$. За ознакою Д'Аламбера маємо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{(n+2)^3}}{\frac{n}{(n+1)^3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4}{n(n+2)^3}=1$, отже, на підставі цієї ознаки ніякого висновку про збіжність ряду зробити не можна (ознака незастосовна). До того ж самого результату приводить спроба застосування радикальної ознаки Коші.

Будемо розглядати члени ряду як значення функції $f(x)=\frac{x}{(x+1)^3}$ при значеннях аргументу $x=1, 2, 3, \ldots$. Неважко перевірити, що при $x\ge 1$ функція $f(x)$ додатна, неперервна й монотонно спадна, тобто задовольняє умови інтегральної ознаки. Тому дослідимо на збіжність невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{x}{(x+1)^3}dx$. В даному випадку за означенням маємо:

$$\int_1^{+\infty}\frac{x}{(x+1)^3}dx=\lim_{B\to+\infty}\int_1^B\frac{x}{(x+1)^3}dx=\lim_{B\to+\infty}\int_1^B\left[\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}\right]dx=$$

$$=\lim_{B\to+\infty}\left[-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x+1)^2}\right]\Bigg|_1^B=\lim_{B\to+\infty}\left[-\frac{1}{B+1}+\frac{1}{2(B+1)^2}\right]-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)=\frac{3}{8}.$$

Отже, інтеграл набуває скінченного значення, тобто збігається. Тому за інтегральною ознакою одночасно з ним збігається і заданий ряд.

<u>Приклад 13.</u> Встановити характер збіжності або довести розбіжність рядів

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3\cdot6\cdot\ldots\cdot(3n)}{(n+1)!}arctg\frac{1}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\left(\sqrt{n+1}-1\right)}$; в) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln\ln n}$.

Розв'язання.

а) Дослідимо заданий знакочережний ряд на абсолютну збіжність, для чого розглянемо ряд з абсолютних величин членів заданого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot6\cdot\ldots\cdot(3n)}{(n+1)!}arctg\frac{1}{2^n}$ (*). За ознакою Д'Аламбера маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3\cdot6\cdot\ldots\cdot(3n)\cdot(3n+3)}{(n+2)!}arctg\dfrac{1}{2^{n+1}}}{\dfrac{3\cdot6\cdot\ldots\cdot(3n)}{(n+1)!}arctg\dfrac{1}{2^n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{3n+3}{n+2}=\frac{3}{2}>1$$

(тут враховано, що $arctg\frac{1}{2^n}\sim\frac{1}{2^n}$ при $n\to\infty$). Отже, ряд (*) розбігається за ознакою Д'Аламбера. Тому заданий ряд *не збігається абсолютно*. А оскільки цей результат отриманий на підставі ознаки Д'Аламбера, то необхідна умова збіжності ряду $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ (а з нею і друга умова ознаки Лейбніца) не виконується. Це означає, що заданий ряд *розбігається*;

б) Дослідимо заданий знакочережний ряд на абсолютну збіжність, для чого розглянемо ряд з абсолютних величин членів заданого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\left(\sqrt{n+1}-1\right)}$ (*). Порівняємо цей ряд зі *збіжним рядом* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$, застосувавши граничну ознаку порівняння:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(n+1)\left(\sqrt{n+1}-1\right)}}{\dfrac{1}{n\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}}{(n+1)\left(\sqrt{n+1}-1\right)}=1.$$ Отже, за наслідком зі згаданої ознаки обидва ряди поводяться однаково, тобто ряд (*) збігається. А це означає, що заданий ряд *збігається абсолютно*;

в) Дослідимо заданий знакопочережний ряд на абсолютну збіжність, для чого розглянемо ряд з абсолютних величин членів заданого ряду $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{\ln\ln n}$ (*).

Оскільки $\ln n < n$, а $\ln\ln n << n$, то $\frac{1}{\ln\ln n} >> \frac{1}{n}$. Тому за ознакою порівняння ряд (*) розбігається, отже, заданий ряд *не збігається абсолютно* (тут ми врахували, що гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбігається). Оскільки цей результат отриманий не за ознакою Д’Аламбера або радикальною ознакою Коші, то ми повинні дослідити ряд також на умовну збіжність.

Перевіримо виконання умов ознаки Лейбніца:

1) нерівність $\frac{1}{\ln\ln(n+1)} < \frac{1}{\ln\ln n}$ виконується $\forall n \ge 4$; 2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln\ln n}=0$.

Обидві умови виконуються, отже, за ознакою Лейбніца заданий ряд збігається. А оскільки він не збігається абсолютно, то він *збігається умовно*.

<u>Приклад 14.</u> Знайти радіуси та інтервали збіжності степеневих рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n (x+2)^n}{(2n+1)(n+2)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{2n^3}(x-1)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(2n)!}{(3n)!}x^n$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+5)^n}{n^n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}(x-1)^n$.

Розв’язання.

а) Оскільки $|a_n|=\left|\frac{(-1)^n 3^n}{(2n+1)(n+2)}\right|=\frac{3^n}{(2n+1)(n+2)}$, то за формулою

$\dfrac{1}{R}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ маємо $\dfrac{1}{R}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}(2n+1)(n+2)}{(2n+3)(n+3)3^n}=3$, звідки $R=\dfrac{1}{3}$. Отже, інтервал збіжності даного ряду є $|x+2|<\dfrac{1}{3}$ або $-\dfrac{1}{3}<x+2<\dfrac{1}{3}$, тобто $-\dfrac{7}{3}<x<-\dfrac{5}{3}$;

б) Оскільки $|a_n|=\left|\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\right|^{2n^3}=\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{2n^3}$, то за формулою $\dfrac{1}{R}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ маємо $\dfrac{1}{R}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{2n^3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{2n^2}=e^2$, звідки $R=\dfrac{1}{e^2}$. Отже, інтервал збіжності даного ряду є $|x-1|<\dfrac{1}{e^2}$ або $1-\dfrac{1}{e^2}<x<1+\dfrac{1}{e^2}$;

в) Оскільки $|a_n|=\dfrac{n!(2n)!}{(3n)!}$, то з формули $\dfrac{1}{R}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n!(2n)!}{(3n)!}}{\dfrac{(n+1)![2(n+1)]!}{[3(n+1)]!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{(n+1)(2n+1)(2n+2)}=\frac{27}{4}.$$

Отже, інтервал збіжності даного ряду є $|x|<\dfrac{27}{4}$;

г) Оскільки $|a_n|=\dfrac{1}{n^n}$, то з формули $\dfrac{1}{R}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ маємо

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n^n}}}=\lim_{n\to\infty}n=\infty.$$

Це означає, що ряд абсолютно *збігається на усій числовій осі*;

д) З формули $\dfrac{1}{R}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ маємо $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n!}{3^n}}{\dfrac{(n+1)!}{3^{n+1}}}=3\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+1)}=0$. Це означає, що ряд *збігається в єдиній точці* $x=1$ (інтервал збіжності вироджується в точку).

Приклад 15. Знайти область збіжності степеневих рядів

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^n}{3^{n+2}\sqrt{n}\ln n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+2}{n}\right)^n \dfrac{(2n)!(x+3)^{2n+3}}{(n!)^2}$.

Розв'язання.

а) З формули $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ маємо

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{3^{n+2}\sqrt{n}\ln n}}{\dfrac{1}{3^{n+3}\sqrt{n+1}\ln(n+1)}} = 3\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 3\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 3$$

(тут ми використали правило Лопіталя). Отже, ряд збігається в інтервалі $|x| < 3$. Дослідимо поведінку ряду в межових точках $x = \pm 3$ цього інтервалу.

В точці $x = -3$ маємо знакопочережний числовий ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 3^n}{3^{n+2}\sqrt{n}\ln n} = \dfrac{1}{9}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n}$. Дослідимо його на абсолютну збіжність, для чого розглянемо знакододатний ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n}\right| = \sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}\ln n}$. Порівняємо цей ряд із розбіжним гармонічним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$. За “граничною” ознакою порівняння $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{n}\ln n}}{\dfrac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{n}}}{\dfrac{1}{n}} = \infty$ (тут ми знов використали правило Лопіталя). Оскільки границя існує і нескінченна, то за згаданою ознакою в точці $x = -3$ ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}\ln n}$ розбігається, отже, знакопочережний ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n}$ не збігається абсолютно. В той же час цей ряд збігається за ознакою Лейбніца, оскільки, як неважко перевірити, обидві умови ознаки виконуються. Тому ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n}$, а разом з ним і заданий степеневий ряд

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+2}\sqrt{n}\ln n}$, збігаються умовно.

В точці $x=3$ маємо знакододатний ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{3^{n+2}\sqrt{n}\ln n} = \frac{1}{9}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$, який, як вже з'ясовано, розбігається. Отже, в точці $x=3$ заданий степеневий ряд розбігається.

Таким чином, областю збіжності заданого степеневого ряду є півінтервал $[-3, 3)$, всередині якого ряд збігається абсолютно, на лівому кінці – умовно.

б) Тут показник степеня є лінійною функцією $\varphi(n) = 2n+3$. *Радіус* збіжності визначимо з формули $R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$ для $\varphi(n) = kn+m$, де $(k \ge 2) \in \mathbb{N}$, а m – *ціле невід'ємне* число (може дорівнювати 0), поклавши $k=2$:

$$R = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{\left(\frac{n+2}{n}\right)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2}}{\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+1} \frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2}}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \left[\frac{(n+2)(n+1)}{n(n+3)}\right]^n \frac{(n+1)^3}{(n+3)(2n+1)(2n+2)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot \sqrt{e} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Отже, ряд збігається в інтервалі $|x+3| < \frac{1}{2}$ або $-\frac{7}{2} < x < -\frac{5}{2}$.

Зауваження. Можна було б обчислити одразу *інтервал* збіжності безпосередньо за ознакою Д'Аламбера, тобто скориставшися нерівністю $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{\varphi(n+1)}}{a_n x^{\varphi(n)}}\right| < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{\varphi(n+1)}}{a_n x^{\varphi(n)}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+1} \frac{(2n+2)!\,(x+3)^{2n+5}}{[(n+1)!]^2}}{\left(\frac{n+2}{n}\right)^n \frac{(2n)!\,(x+3)^{2n+3}}{(n!)^2}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{(n+3)(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^3}\left|x+3\right|^2 = e\cdot\frac{1}{e}\cdot 4\cdot\left|x+3\right|^2 < 1.$$

Отже, отримали той самий інтервал збіжності $|x+3| < \frac{1}{2}$.

<u>Приклад 16.</u> Розвинути функцію в ряд Маклорена та вказати область, в якій це розвинення справедливе.

а) $f(z) = x^4\sin(3x^2)$; б) $f(x) = \frac{1}{1+x^5}$; в) $f(x) = \frac{2x-5}{x^2-5x+6}$;

г) $f(x) = \frac{1}{(1-x^3)^2}$; д) $f(x) = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Розв'язання.

а) Безпосереднє розвинення приведе до громіздких обчислень. В цьому випаку скористаємось способом, що передбачає використання так званих *найпростіших розвинень*.

Найпростішими розвиненнями називають відомі розвинення в ряд Маклорена основних елементарних функцій. Наведемо ***таблицю найпростіших розвинень*** (у дужках вказані області збіжності відповідних рядів):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad (-\infty < x < +\infty),$$

$$a^x = e^{x\ln a} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n a}{n!}x^n \qquad (-\infty < x < +\infty),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$(-\infty < x < +\infty),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$(-\infty < x < +\infty),$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$(-\infty < x < +\infty),$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$(-\infty < x < +\infty),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

$$(-1 < x \le 1),$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n}(\alpha-k+1)}{n!}x^n$$

$$(-1 < x < 1 \text{ якщо } \alpha \le -1,\ -1 < x \le 1 \text{ якщо } -1 < \alpha < 0,\ -1 \le x \le 1 \text{ якщо } \alpha \ge 0),$$

зокрема,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1),$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (-1 < x < 1),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$$

$$(-1 < x \le 1),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$$

$$(-1 < x \le 1),$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \ldots = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}x^{n+1}$$

$$(-1 \le x \le 1),$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \ldots = 1 - \frac{x}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}x^{n+1}$$

$$(-1 \le x \le 1),$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$(-1 \le x \le 1),$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$(-1 \le x \le 1).$$

Тому скористаємось відомим розвиненням в ряд Маклорена функції $\sin x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (-\infty < x < +\infty),$$

в якому замінимо x на $3x^2$, і отриманий ряд почленно помножимо на x^4:

$$\sin(3x^2) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(3x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}x^{4n+2}}{(2n+1)!},$$

$$f(z) = x^4\sin(3x^2) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}x^{4n+6}}{(2n+1)!} = 3x^6 - \frac{9}{2}x^{10} + \frac{81}{40}x^{14} - \ldots.$$

Отримане розвинення справедливе на усій числовій осі $(-\infty < x < +\infty)$;

б) Замінимо у відомому розвиненні

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1),$$

x на x^5. Маємо

$$\frac{1}{1+x^5} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x^5)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{5n} = 1 - x^5 + x^{10} - x^{15} + \ldots + (-1)^n x^{5n} + \ldots.$$

Цей ряд подає задану функцію для усіх x таких, що $\left|x^5\right| < 1$, тобто $-1 < x < 1$;

в) В деяких випадках розвинення функції в степеневий ряд можна отримати, просумувавши табличні розвинення або раніше знайдені. При цьому іноді треба тотожно перетворити функцію таким чином, щоб подати її у вигляді зручної комбінації функцій, розвинення яких відомі.

Задана функція є правильним раціональним дробом. У відповідності із розкладанням знаменника на множники $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ подамо її у вигляді суми найпростіших дробів:

$$\frac{2x-5}{x^2-5x+6}=\frac{2x-5}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3},\ \text{звідки}\quad 2x-5=A(x-3)+B(x-2).$$

Невідомі коефіцієнти A і B знайдемо з системи рівнянь $\begin{array}{c|c} x=2 & -1=-A, \\ x=3 & 1=B. \end{array}$

Отже, $A=B=1$ й $f(x)=\dfrac{2x-5}{x^2-5x+6}=\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}$. Кожен з отриманих найпростіших дробів після нескладного тотожного перетворення розвинемо в ряд Маклорена за допомогою відомого розвинення

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+...+x^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \qquad (-1<x<1).$$

Будемо мати

$$\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n \quad \left(\left|\frac{x}{2}\right|<1\Rightarrow|x|<2\right),$$

$$\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n \quad \left(\left|\frac{x}{3}\right|<1\Rightarrow|z|<3\right).$$

Отже,

$$\frac{2x-5}{x^2-5x+6}=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)x^n=-\frac{5}{6}-\frac{13}{36}x-\frac{35}{216}x^2-....$$

За відповідною степеневих рядів отримане розвинення справедливе в інтервалі $(-2,\,2)$, який є спільним інтервалом збіжності обох рядів;

г) При розвиненні деяких функцій в степеневі ряди дуже корисним виявляється спосіб, що заснований на використанні такої властивості степеневих рядів, як можливість їх почленного диференціювання. Суть цього способа полягає в наступному. Нехай треба знайти розвинення деякої функції $f(x)$ в степеневий ряд. Якщо вдається знайти таку функцію $g(x)$, що $f(x)=a\cdot x^k\cdot g'(x)$, де $k\in\mathbb{Z}$, то, розвинувши функцію $g(x)$ в степеневий ряд і продиференціювавши його почленно, отримаємо розвинення в ряд функції $f(x)$. При цьому отримане розвинення справедливе всюди, де відповідне розвинення було вірним для функції $g(x)$.

Оскільки в даному випадку $\dfrac{1}{(1-x^3)^2}=\dfrac{1}{3x^2}\left(\dfrac{1}{1-x^3}\right)'$, то, замінивши у табличному розвиненні

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+...+x^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad (-1<x<1)$$

x на x^3, отримаємо

$$\frac{1}{(1-x^3)^2}=\frac{1}{3x^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(x^3)^n\right)'=\frac{1}{3x^2}\sum_{n=1}^{\infty}3n\,x^{3n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n\,x^{3n-3}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,x^{3n}=$$

$$=1+2x^3+3x^6+....$$

Оскільки при диференціюванні інтервал збіжності степеневого ряду не змінюється, то знайдене розвинення справедливе при усіх x з інтервалу $-1<x<1$;

д) В деяких випадках значно простіше розвинути в степеневий ряд не саму функцію $f(x)$, а її похідну $f'(x)$, після чого почленно проінтегрувати отриманий ряд.

Знайдемо похідну $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{1+x^2}}}\cdot\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\dfrac{x\cdot 2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\dfrac{1}{1+x^2}$.

У табличному розвиненні

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+...+(-1)^n x^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (-1<x<1)$$

замінимо x на x^2 і отримаємо розвинення $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, вірне при $-1<x<1$. Проінтегрувавши цей ряд почленно від 0 до x, будемо мати шукане розвинення $f(x)=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Оскільки при почленному інтегруванні ряду інтервал його збіжності не змінюється, то знайдене розвинення справедливе при усіх x з інтервалу $-1<x<1$.

Приклад 17. Розвинути в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = 4$ (за степенями різниці $x-4$) функцію $f(x) = \ln(x^2+4x-5)$ та та вказати область, в якій це розвинення справедливе.

Розв'язання. Перетворимо тотожно задану функцію, виділяючи різницю $x-4$:

$$f(x) = \ln(x^2+4x-5) = \ln[(x-1)(x+5)] = \ln\{[3+(x-4)][9+(x-4)]\} =$$

$$= \ln\left[27\left(1+\frac{x-4}{3}\right)\left(1+\frac{x-4}{9}\right)\right] = \ln 27 + \ln\left(1+\frac{x-4}{3}\right) + \ln\left(1+\frac{x-4}{9}\right).$$

Скористаємось табличним розвиненням

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \quad (-1 < x \le 1),$$

в якому замінимо x на $\frac{x-4}{3}$ й на $\frac{x-4}{9}$. Отримаємо

$$\ln\left(1+\frac{x-4}{3}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-4)^n}{n3^n} \quad \left(\left|\frac{x-4}{3}\right| < 1 \Rightarrow |x-4| < 3\right),$$

$$\ln\left(1+\frac{x-4}{9}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-4)^n}{n9^n} \quad \left(\left|\frac{x-4}{9}\right| < 1 \Rightarrow |x-4| < 9\right).$$

Отже,

$$f(x) = \ln(x^2+4x-5) = \ln 27 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1+3^n}{n9^n}(x-4)^n =$$

$$= \ln 27 + \frac{4}{9}(x-4) - \frac{5}{9^2}(x-4)^2 + \frac{28}{3\cdot 9^3}(x-4)^3 - \ldots.$$

Отримане розвинення справедливе в інтервалі $|x| < 3$, який є спільним інтервалом збіжності рядів $\ln\left(1+\frac{x-4}{3}\right)$ та $\ln\left(1+\frac{x-4}{9}\right)$.

Приклад 18. Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x) = \int\limits_0^x \frac{arctg\, t}{t}\, dt$.

Розв'язання. При наближеному обчисленні визначених інтегралів, коли знайти первісну в скінченному вигляді не представляється можливим, широко застосовується почленне інтегрування степеневого ряду. При цьому підінтегральну функцію розвивають в ряд, який потім інтегрують почленно.

Скориставшись табличним розвиненням

$$\mathbf{arctg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 \le x \le 1),$$

будемо мати

$$f(x) = \int_0^x \frac{arctg\, t}{t}\, dt = \int_0^x \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \int_0^x t^{2n} dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}.$$

Оскільки $\lim\limits_{x \to 0} \frac{arctgx}{x} = 1$, то розвинення справедливе в інтервалі $-1 < x < 1$.

Приклад 19. Обчислити $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^3} dx$ з точністю $\delta = 10^{-4}$.

Розв'язання. Приймемо залишкову похибку $\varepsilon = \frac{\delta}{4} = \frac{1}{4} \cdot 10^{-4} = 2.5 \cdot 10^{-5}$ і розвинемо підінтегральну функцію в ряд Маклорена, для чого у табличному розвиненні

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

замінимо x на $-x^3$:

$$e^{-x^3} = 1 - x^3 + \frac{x^6}{2!} - \frac{x^9}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{3n}}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n}}{n!}.$$

Отриманий ряд збігається на всій числовій осі, отже, його можна почленно інтегрувати на будь-якому відрізку, зокрема, на відрізку $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Після інтегрування і застосування формули Ньютона-Лейбніца приходимо до знакопочережного числового ряду, який збігається, тобто є рядом Лейбніца:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^3} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{3n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(3n+1)} x^{3n+1} \Bigg|_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!(3n+1)8^n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8\cdot 8}+\frac{1}{2!\cdot 14\cdot 8^2}-\frac{1}{3!\cdot 20\cdot 8^3}+\ldots.$$

Для забезпечення необхідної точності обчислення суми цього ряду, яка і є значенням заданого визначеного інтеграла, потрібно утримати таке число членів ряду, щоб виконалася умова $|u_{n+1}|\le\varepsilon$, де u_{n+1} – перший з відкинутих членів, а ε – задана залишкова похибка.

Оскільки $u_0=0.5$, $u_1=-0.015625$, $u_2=0.0005580$, $u_3=-0.0000163$, ... й $|u_3|<\varepsilon=0.000025$, то треба утримати 3 перших члени ряду:

$$\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-x^3}dx\approx 0.5-0.015625+0.0005580=0.4849330\approx 0.4849.$$

Значення цього інтеграла, обчислене на комп'ютері за допомогою **Mathcad**, дорівнює **0.48491714311364 ...** , тобто в отриманому результаті всі знаки вірні.

<u>Приклад 20.</u> Знайти чотири перших, відмінних від нуля, члени розвинення в степеневий ряд розв'язку рівняння $y''=x\sin y'$, який задовольняє початкові умови $y(1)=0$, $y'(1)=\frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Будемо шукати частинний розв'язок рівняння у вигляді ряду Тейлора

$$\tilde{y}=y(1)+y'(1)(x-1)+\frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2+\ldots.$$

За умовою задачі, $y(1)=0$, $y'(1)=\frac{\pi}{2}$. З рівняння $y''=x\sin y'$ знаходимо, що $y''(1)=1\cdot\sin y'(1)=1\cdot 1=1$. Диференціюючи вихідне рівняння, маємо

$$y'''=\sin y'+xy''\cos y',$$

звідки отримуємо $y'''(1)=\sin y'(1)+1\cdot y''(1)\cdot\cos y'(1)=1+1\cdot 1\cdot 0=1$.

Диференціюючи рівність $y'''=\sin y'+xy''\cos y'$, маємо

$$y^{(4)}=y''\cos y'+y''\cos y'+xy'''\cos y'-xy''y'''\sin y',$$

звідки отримуємо $y^{(4)}(1)=2\cdot 1\cdot 0+1\cdot 1\cdot 0-1\cdot 1\cdot 1\cdot 1=-1$.

Отже, шуканий частинний розв'язок має вигляд

$$\tilde{y}=\frac{\pi}{2}(x-1)+\frac{1}{2!}(x-1)^2+\frac{1}{3!}(x-1)^3-\frac{1}{4!}(x-1)^4+\ldots.$$

Приклад 21. Куб, усі грані якого пофарбовані, розпилили на 1000 кубиків однакового розміру і ретельно їх перемішали. Знайти ймовірність того, що навмання витягнутий кубик має рівно одну пофарбовану грань.

Розв'язання. При розпилюванні вихідного куба, який має 6 граней, на $n = 1000$ кубічних частин (загальне число можливих наслідків) утворюється $m = 6 \times 8 \times 8 = 384$ кубика з однією пофарбованою гранню (число сприятливих наслідків). Тому за класичною формулою $P(A) = \frac{m}{n}$ маємо

$$P(A) = \frac{384}{1000} = \frac{96}{250} = 0{,}384 .$$

Приклад 22. Колоду з 36 гральних карт ретельно перемішують і навмання витягують одразу 3 карти. Знайти ймовірність того, що серед них буде хоча б одна "дама".

Розв'язання. Знайдемо ймовірність *протилежної* події, а саме: серед узятих карт немає жодної "дами". За класичною формулою маємо $q = \frac{C_4^0 \cdot C_{32}^3}{C_{36}^3}$. Тоді шукана ймовірність $p = 1 - q = 1 - \frac{C_{32}^3}{C_{36}^3} = 0{,}3053$.

Приклад 23. Та ж сама задача, але карти витягують *по черзі*, одну за одною.

Розв'язання. У даному випадку, на відміну від попереднього, маємо не одну, а три *залежні* події. Тому за теоремою множення ймовірностей залежних подій $P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C)$ маємо $q = \frac{32}{36} \cdot \frac{31}{35} \cdot \frac{30}{34} = \frac{248}{357}$. Тоді $p = 1 - q = \frac{114}{357} = 0{,}3053$.

Приклад 24. У крузі радіуса R розміщений малий круг радіуса $r < R$. Знайти ймовірність того, що точка, навмання кинута у великий круг, влучить також і в малий круг.

Розв'язання. За «геометричним» означенням ймовірності $P(A)=\dfrac{\Omega_A}{\Omega}$ маємо

$$p=\frac{S_r}{S_R}=\frac{\pi\, r^2}{\pi\, R^2}=\frac{r^2}{R^2}.$$

Приклад 25. Розрив електричної мережі може відбутися внаслідок відмови елемента E_1 або одночасно двох елементів E_2 й E_3, які відмовляють незалежно один від одного відповідно з ймовірностями $p_1=0{,}3$, $p_2=p_3=0{,}2$. Визначити ймовірність розриву електричної мережі.

Розв'язання. Мережа буде працювати (подія A), якщо жоден з елементів не відмовить. Тому за теоремою множення ймовірностей незалежних подій $P(A)=(1-p_1)\cdot(1-p_2 p_3)=0{,}672$. Отже, ймовірність розриву мережі (подія $\overline{A}$)

$$P(\overline{A})=1-P(A)=0{,}328.$$

Приклад 26. Стрілець робить один постріл по мішені, яка складається з круга й двох концентричних кілець. Ймовірності попадання в круг і кільця відповідно дорівнюють $p_1=0{,}3$, $p_2=0{,}2,$ $p_3=0{,}1$. Визначити ймовірність промаху.

Розв'язання. Мішень буде уражена (подія A), якщо відбудеться влучання або в круг, або в одне з кілець. Оскільки стрілець робить тільки один постріл, то ці події несумісні. За теоремою додавання ймовірностей несумісних подій $P(A_1+A_2+....+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)$ маємо

$$P(A)=p_1+p_2+p_3=0{,}3+0{,}2+0{,}1=0{,}6.$$

Отже, ймовірність промаху (подія $\overline{A}$) є $P(\overline{A})=1-P(A)=0{,}4$.

Приклад 27. Технічний пристрій містить три блоки, надійності яких відповідно дорівнюють $p_1=0{,}6$, $p_2=0{,}5,$ $p_3=0{,}3$. При відмові за проміжок часу t усіх трьох блоків пристрій напевно виходить з ладу, при відмові лише одного блока ймовірність виходу з ладу $0{,}2$, а при відмові двох блоків вона складає $0{,}6$. Знайти ймовірність того, що за проміжок часу t пристрій вийде з ладу.

Розв'язання. Нехай подія A – вихід пристрою з ладу за проміжок часу t – відбувається за умови появи однієї з несумісних подій: B_1 – усі три блоки за час t працювали безвідмовно, B_2 – за час t відмовив тільки один блок, B_3 – за час t відмовили два блоки, B_4 – за час t відмовили усі три блоки.
Ймовірності відмов кожного з блоків: $q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0,6 = 0,4$, $q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0,5 = 0,5$, $q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0,3 = 0,7$. За теоремами додавання і множення ймовірностей знайдемо ймовірності появ подій B_i $(i = \overline{1,4})$:

$$P(B_1) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,3 = 0,09,$$

$$P(B_2) = q_1 \cdot p_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot q_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_2 \cdot q_3 = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + \\ + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,36,$$

$$P(B_3) = q_1 \cdot q_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot p_2 \cdot q_3 = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,7 + \\ + 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,41,$$

$$P(B_4) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,14.$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{4} P(B_i) = 0,09 + 0,36 + 0,41 + 0,14 = 1$, то події B_i $(i = \overline{1,4})$ утворюють повну групу. Відповідні умовні ймовірності події A дорівнюють: $P_{B_1}(A) = 0$, $P_{B_2}(A) = 0,2$, $P_{B_3}(A) = 0,6$, $P_{B_4}(A) = 1$. За формулою повної ймовірності $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)$ маємо

$$P(A) = 0,09 \cdot 0 + 0,36 \cdot 0,2 + 0,41 \cdot 0,6 + 0,14 \cdot 1 = 0,458.$$

Приклад 28. По каналу зв'язку передається один з двох можливих сигналів x_1 або x_2, причому сигнал x_2 передається вдвічі частіше, ніж сигнал x_1. Через перешкоди можливі викривлення: замість одного сигнала може бути прийнятий інший і навпаки. Властивості каналу зв'язку такі, що сигнал x_1 зазнає викривлень приблизно у 10 % випадків, а сигнал x_2 - у 20 %. Нехай був отриманий сигнал x_1. Яка ймовірність того, що був переданий саме цей сигнал?

Розв'язання. Нехай подія A - був отриманий сигнал x_1.

Висунемо гіпотези: H_1 - був переданий сигнал x_1; H_2 - був переданий сигнал x_2. Тоді $P(H_1)=\frac{1}{3}$, $P(H_2)=\frac{2}{3}$, $P_{H_1}(A)=\frac{9}{10}$, $P_{H_2}(A)=\frac{1}{5}$. Ймовірність отримати за даних умов сигнал x_1 за формулою повної ймовірності є $P(A)=\sum_{i=1}^{2}P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{10}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{13}{30}$. За відповідною формулою Байєса $P_A(H_1)=\frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(A)}$ ймовірність того, що був переданий саме сигнал x_1 (апостеріорна ймовірність гіпотези H_1) є

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{10}}{\frac{13}{30}}=\frac{9}{13}=0{,}692.$$

Таким чином, отримання сигналу x_1 значно збільшує ймовірність гіпотези H_1 у порівнянні з її апріорним значенням.

Приклад 29. Ймовірність того, що витрата електроенергії протягом однієї доби не перевищить установленої норми, дорівнює $p=0{,}75$. Знайти ймовірність того, що у найближчі 6 діб витрата електроенергії протягом 4 діб не перевищить норми.

Розв'язання. Ймовірність перевитрати електроенергії протягом кожної доби стала і дорівнює $q=1-0{,}75=0{,}25$. Оскільки число спроб $n=6$ невелике, а ймовірність $p=0{,}75$ не мала, то шукану ймовірність обчислимо за формулою Бернуллі $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, де $k=4$:

$$P_6(4)=C_6^4 p^4 q^2=\frac{6!}{4!2!}\cdot 0{,}75^4\cdot 0{,}25^2=0{,}297.$$

Приклад 30. Знайти ймовірність того, що подія A настане рівно 70 разів у 243 спробах, якщо ймовірність появи цієї події у кожній спробі стала і дорівнює 0,25.

Розв'язання. Оскільки число спроб $n=243$ велике, а ймовірність $p=0{,}25$ не мала, то шукану ймовірність обчислимо за локальною формулою Лапласа

$P_n(k) \sim \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$: $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 243 \cdot 0,25}{\sqrt{243 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} = 1,37$, значення $\varphi(x) = \varphi(1,37) = 0,1561$ обчислюємо на калькуляторі за формулою $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ або знаходимо за таблицею у додатку 1,

$$P_{243}(70) = \frac{1}{\sqrt{243 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} \cdot 0,1561 = 0,0231.$$

Приклад 31. Ймовірність виходу з ладу за час T одного конденсатора дорівнює $p = 0,2$. Визначити ймовірність того, що зі 100 конденсаторів за час T вийдуть з ладу від 14 до 26 конденсаторів.

Розв'язання. Скористаємось інтегральною формулою Лапласа $P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, у якій покладемо $n = 100$, $k_1 = 14$, $k_2 = 26$, $p = 0,2$, $q = 1 - p = 0,8$. Обчисливши $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{14 - 100 \cdot 0,2}{\sqrt{100 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = -1,5$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{26 - 100 \cdot 0,2}{\sqrt{100 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 1,5$, за таблицею у додатку 2 знаходимо $\Phi(1,5) = 0,4332$. Оскільки функція $\Phi(x)$ непарна, то $\Phi(-1,5) = -0,4332$. Тоді $P_{100}(14,26) = \Phi(1,5) - \Phi(-1,5) = = 2 \cdot 0,4332 = 0,8664$.

Приклад 32. Проводиться 10 000 незалежних випобувань, в кожному з яких подія A може появитися з імовірністю 0,0003. Знайти ймовірність того, що подія A з'явиться рівно 5 разів.

Розв'язання. Оскільки число спроб $n = 10\,000$ дуже велике, а ймовірність $p = 0,0003$ дуже мала, то шукану ймовірність обчислимо за формулою Пуассона $P_n(k) \sim \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ при $\lambda = np = 10000 \cdot 0,0003 = 3$. Отже, $P_{10000}(5) = \frac{3^5 \cdot e^{-3}}{5!} = 0,1$.

Приклад 33. Ймовірність прийому радіосигналу за певних умов дорівнює 0,75. Скільки сигналів повинно бути передано, щоб ймовірність відхилення частоти прийнятих сигналів від ймовірності прийому не більш, ніж на 0,035, дорівнювала 0,95?

Розв'язання. Ймовірність того, що модуль відхилення відносної частоти $\frac{m}{n}$ від сталої ймовірності p не перевищує *заданого* числа $\varepsilon > 0$, є

$$P\left(\left| \frac{m}{n} - p \right| \le \varepsilon \right) \cong 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \right).$$

Покладемо $p = 0{,}75, \quad q = 1 - p = 0{,}25, \quad \varepsilon = 0{,}035, \quad P\left(\left| \frac{m}{n} - p \right| \le \varepsilon \right) = 0{,}95$.

Отримаємо рівняння $0{,}95 = 2\Phi\left(0{,}035 \cdot \sqrt{\frac{n}{0{,}75 \cdot 0{,}25}} \right)$ або, після невеликого

перетворення, $\Phi\left(0{,}035 \cdot \sqrt{\frac{n}{0{,}1875}} \right) = 0{,}475$. За таблицею у додатку 2 знаходимо

$0{,}475 = \Phi(1{,}96)$, звідки маємо $0{,}035 \cdot \sqrt{\frac{n}{0{,}1875}} = 1{,}96$.

Отже, $n = 0{,}1875 \cdot \left(\frac{1{,}96}{0{,}035} \right)^2 = 588$.

<u>Приклад 34.</u> Дискретна випадкова величина задана рядом розподілу

x_i	13	18	19	x_4	25
p_i	0,18	p_2	0,22	0,20	0,15

Знайти x_4, p_2, $D(X)$, $\sigma(X)$, якщо $M(X) = 18{,}77$.

Розв'язання. Для знаходження p_2 використаємо умову $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, тобто $0{,}18 + p_2 + 0{,}22 + 0{,}2 + 0{,}15 = 1$, звідки знаходимо $p_2 = 0{,}25$.

Тоді маємо рівняння

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = 13 \cdot 0{,}18 + 18 \cdot 0{,}25 + 19 \cdot 0{,}22 + x_4 \cdot 0{,}2 + 25 \cdot 0{,}15 = 18{,}77$$

або $14{,}77 + 0{,}2 \cdot x_4 = 18{,}77$, звідки знаходимо $x_4 = \frac{4}{0{,}2} = 20$.

Отже, закон розподілу дискретної величини має вигляд

x_i	13	18	19	20	25
p_i	0,18	0,25	0,22	0,2	0,15

Тоді

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2\cdot p_i-\left[M(X)\right]^2==13^2\cdot 0{,}18+18^2\cdot 0{,}25+19^2\cdot 0{,}22+20^2\cdot 0{,}2+$$

$$+25^2\cdot 0{,}15-(18{,}77)^2=364{,}59-352{,}3129=12{,}28,$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=3{,}50.$$

Приклад 35. Неперервна випадкова величина задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 8;\\ (x-8)^3, & 8<x\le 9;\\ 1\ , & x>9.\end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ й середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$; в) ймовірність попадання випадкової величини на відрізок $[8{,}25;\,8{,}75]$.

Розв'язання.

а) Щільність розподілу $f(x)$:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0\ , & x\le 8;\\ 3(x-8)^2, & 8<x\le 9,;\\ 0\ , & x>9\end{cases}$$

б) Оскільки $f(x)$ ненульова лише на проміжку $[8,9)$, то користуємось формулами $M(X)=\int\limits_a^b x\,f(x)dx$, $D(X)=\int\limits_a^b x^2 f(x)dx-[M(X)]^2$. Отже, маємо

$$M(X)=\int\limits_8^9 x\cdot 3(x-8)^2dx=3\int\limits_8^9 x(x-8)^2dx=\left|\begin{array}{lll} x-8=t & & \\ x=t+8 & & \\ x & 8 & 9 \\ t & 0 & 1 \end{array}\right|=$$

$$=3\int\limits_0^1 (t+8)\,t^2dt=3\int\limits_0^1\left(t^3+8t^2\right)dt=3\left(\frac{t^4}{4}+8\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=3\left(\frac{1}{4}+\frac{8}{3}\right)=8{,}75,$$

$$D(X)=\int\limits_8^9 x^2\cdot 3(x-8)^2dx-[M(X)]^2=3\int\limits_8^9\left(x^4-16x^3+64x^2\right)dx-8{,}75^2=$$

$$=3\left(\frac{x^5}{5}-4x^4+\frac{64}{3}x^3\right)\Bigg|_8^9-76{,}56=\frac{383}{5}-76{,}56=0{,}04,$$

$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=0{,}2$;

в) ймовірність попадання неперервної випадкової величини X в заданий інтервал $(a;b)$ обчислюється за формулою $P(a<X<b)=F(b)-F(a)$. Отже, в даному випадку

$$P(8{,}25<X<8{,}75)=F(8{,}75)-F(8{,}25)=0{,}75^3-0{,}25^3=0{,}406.$$

Приклад 36. Гармата робить 4 постріли по мішені з однієї і тієї ж позиції. Ймовірність влучення при одному пострілі дорівнює 0,8. Скласти закон розподілу кількості влучень, знайти середнє значення, дисперсію та середнє квадратичне відхилення кількості влучень.

Розв'язання. Дискретна випадкова величина X кількість влучень у мішень. Її можливі значення: $x_1=0,\quad x_2=1,\ x_3=2,\quad x_4=3,\quad x_5=4$.

Результати пострілів не залежать один від одного, ймовірність влучення при одному пострілі є сталою величиною. Це означає, що випадкова величина X розподілена за біноміальним законом.

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k},$$

де $n=4,\quad k=0,1,2,3,4;\quad p=0{,}8;\quad q=1-p=0{,}2.$

Обчислимо

$$P(0)=C_4^0 p^0 q^4=(0{,}2)^4=0{,}0016;$$

$$P(1)=C_4^1 pq^3=4\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2^3=0{,}0256;$$

$$P(2)=C_4^2 p^2 q^2=6\cdot 0{,}8^2\cdot 0{,}2^2=0{,}1536;$$

$$P(3)=C_4^3\cdot p^3\cdot q=4\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2=0{,}4096;$$

$$P(4)=C_4^4 p^4 q^0=0{,}8^4=0{,}4096.$$

Перевіримо вірність обчислень:

$$P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4)=0{,}0016+0{,}0256+0{,}1536+0{,}4096+0{,}4096=1.$$

Шуканий закон розподілу має вигляд:

x	0	1	2	3	4
p	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

Математичне сподівання (середнє значення) кількості влучень $M(X)=np=4\cdot 0{,}8=3{,}2$, дисперсія $D(X)=npq=4\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2=0{,}64$, середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}64}=0{,}8$.

Приклад 37. Електронний пристрій складається з 1000 елементів, які працюють незалежно один від одного. Імовірність відмови будь-якого елемента протягом одного року дорівнює 0,002. Знайти імовірність того, що за рік відмовлять не менш трьох елементів.

Розв'язання. Нехай випадкова величина X - число елементів, які відмовили. За законом Пуассона $P_n(k)=\dfrac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}$.

Вважаючи $n=1000,\ p=0{,}002$, одержимо $\lambda=np=1000\cdot 0{,}002=2$.

Ймовірність відмови не менш трьох елементів

$$P(X\ge 3)=\sum_{k=3}^{\infty}P(X=k)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2).$$

$$P(X=0)=P_{1000}(0)=\frac{2^0\cdot e^{-2}}{0!}=0{,}13534,\quad P(X=1)=P_{1000}(1)=\frac{2^1\cdot e^{-2}}{1!}=0{,}27068,$$

$$P(X=2)=P_{1000}(2)=\frac{2^2\cdot e^{-2}}{2!}=0{,}27068.$$

Тоді $P(X\ge 3)=1-0{,}13534-2\cdot 0{,}27068=0{,}3233$.

Приклад 38. Автобуси деякого маршруту рухаються точно за розкладом. Проміжок руху 15 хвилин. Знайти ймовірність того, що пасажир, який підійшов до зупинки, чекатиме черговий автобус менше 10 хвилин.

Розв'язання. Пасажир може підійти до зупинки у будь-який момент. Тому час очікування можна вважати випадковою величиною X, яка рівномірно розподілена у інтервалі руху автобусів.

Щільність розподілу $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$, де $(b-a)$ - довжина інтервалу, у якому знаходяться ймовірні значення X. У даному випадку $b-a=15$, тому $f(x)=\dfrac{1}{15}$. Оскільки автобуси йдуть точно за розкладом (тобто наступний прийде не раніше означеного часу), то пасажир чекатиме його менше 10 хвилин, якщо $5<X<15$.

Ймовірність попадання випадкової величини в деякий інтервал обчислюється за формулою $P(\alpha<X<\beta)=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, отже,

$$P(5<X<15)=\int\limits_{5}^{15}\frac{1}{15}dx=\frac{x}{15}\Bigg|_{5}^{15}=\frac{2}{3}.$$

Приклад 39. Середній час безвідмовної роботи радіоелектронного обладнання літака за статистичними даними складає 200 годин. Знайти ймовірність відмови обладнання протягом 10 годин польоту.

Розв'язання. Час безвідмовної роботи обладнання є випадковою величиною T, розподіленою за показниковим законом $F(t)=\begin{cases}0, & t\le 0,\\ 1-e^{-\lambda t}, & t>0,\end{cases}$

де $\lambda-$інтенсивність відмов (кількість відмов за одиницю часу). У даному випадку $t=10,\ \lambda=\dfrac{1}{200}$ і ймовірність відмови за час t буде складати $P(T<t)=1-e^{-\lambda t}=1-e^{-\frac{10}{200}}=0{,}049$.

Приклад 40. Найбільший поперечний діаметр заготовок деталей, що поступають в обробку є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом з середнім значенням 5см і середнім квадратичним відхиленням 0,3 см.

Написати диференціальну функцію розподілу, побудувати її схематичний графік, вказавши його характерні точки, і знайти ймовірність того, що: а) діаметр взятої навмання заготовки буде знаходитись в межах від 4,7 до 6,2 см; б) відхилення діаметра заготовки від середнього не перевищить за абсолютною величиною 0,6 см.

Розв'язання. Випадкова величина $\boldsymbol{X}$ – найбільший поперечний діаметр заготовки. Оскільки вона розподілена нормально, то диференціальна функція розподілу виражається формулою $\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}}$, де $\boldsymbol{a}$ – математичне сподівання (середнє значення), $\boldsymbol{\sigma}$ – середнє квадратичне відхилення. Функція досягає максимума $\boldsymbol{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}}$ в точці $\boldsymbol{x=a}$, її графік має дві точки перегину $\boldsymbol{\left(a\pm\sigma;\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)}$. В даному випадку $\boldsymbol{a=5}$, $\boldsymbol{\sigma=0{,}3}$. Тому $\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{0{,}3\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-5)^2}{0{,}18}}}$, максимум $\boldsymbol{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\approx 1{,}33}$ в точці $\boldsymbol{x=5}$, точки перегину $\boldsymbol{(4{,}7;\,0{,}81)}$ й $\boldsymbol{(5{,}3;\,0{,}81)}$. Графік функції показаний на рис. 2.

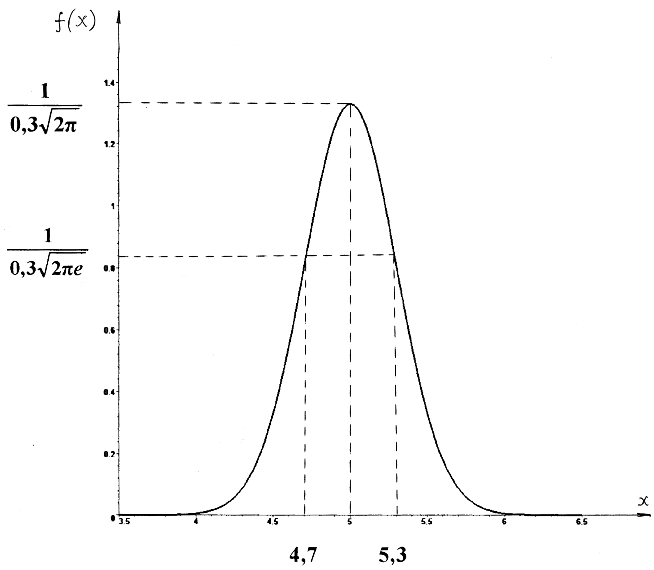

Рис. 2

а) Ймовірність попадання випадкової величини $\boldsymbol{X}$ в інтервал $\boldsymbol{(\alpha,\beta)}$

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ – інтегральна функція Лапласа (її значення наведені у додатку 2).

Оскільки $\alpha = 4{,}7$, $\beta = 6{,}2$, то маємо

$$P(4{,}7 < X < 6{,}2) = \Phi\left(\frac{6{,}2-5}{0{,}3}\right) - \Phi\left(\frac{4{,}7-5}{0{,}3}\right) = \Phi(4) + \Phi(1) = 0{,}3413 + 0{,}5 = 0{,}8413;$$

б) ймовірність того, що модуль відхилення X від її математичного сподівання a не перевищить заданого числа $\delta > 0$, $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$.

У даному випадку $\delta = 0{,}6$, отже

$$P(|X - 5| < 0{,}6) = 2\Phi\left(\frac{0{,}6}{0{,}3}\right) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

Приклад 41. З великої кількості результатів випробувань випадковим чином відібрані наступні: 2; 3; 2; 4; 5; 2; 3; 3; 6; 4; 5; 4; 6; 5; 3; 4; 2; 4; 3; 3; 5; 4; 6; 4; 5; 3; 4; 3; 2; 4. Потрібно:

а) скласти дискретний статистичний розподіл вибірки;

б) знайти обсяг вибірки;

в) скласти розподіл відносних частот;

г) побудувати полігон частот;

д) скласти емпіричну функцію розподілу і побудувати її графік;

е) знайти незміщені оцінки числових характеристик генеральної сукупності.

Розв'язання.

а) Розташуємо різні значення ознаки в порядку їх зростання і під кождим з них запишемо їх частоти. Отримаємо дискретний статистичний розподіл вибірки:

x_i	2	3	4	5	6
n_i	5	8	9	5	3

де x_i - варіанти, n_i - частоти варіант x_i;

б) сума частот усіх варіант повинна дорівнювати обсягу вибірки. В даному прикладі об’єм вибірки дорівнює $n = 5 + 8 + 9 + 5 + 3 = 30$;

в) знайдемо відносні частоти:

$$W_1 = \frac{5}{30} = \frac{1}{6};\ W_2 = \frac{8}{30} = \frac{4}{15};\ W_3 = \frac{9}{30} = \frac{3}{10};\ W_4 = \frac{5}{30} = \frac{1}{6};\ W_5 = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}.$$

Запишемо шуканий розподіл відносних частот:

x_i	2	3	4	5	6
W_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$

Контроль: $\frac{1}{6} + \frac{4}{15} + \frac{3}{10} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} = 1$;

г) точки з координатами (x_i, n_i) з’єднаємо послідовними відрізками. Отримаємо ламану лінію, яка називається полігоном частот (рис. 3);

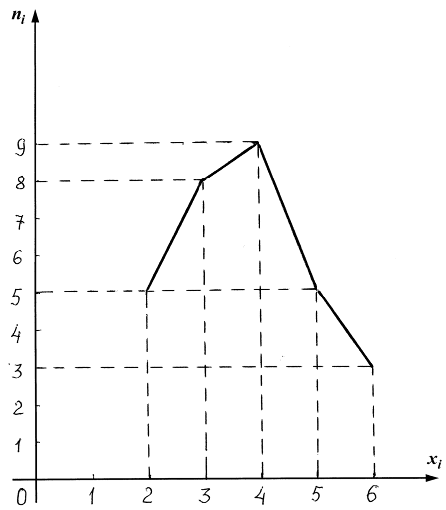

Рис. 3

д) згідно з означенням емпіричною функцією розподілу називається функція виду $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, де n – обсяг вибірки, n_x– сума частот варіант, менших ніж x.

Эмпірична функція є оцінкою функції розподілу генеральної сукупності. Найменша варіанта дорівнює 2, тому при $x \le 2,\ n_x = 0$ й $F^*(x) = 0$. Значення $X < 3$, а саме, $X = x_1 = 2$ спостерігалося 5 разів. Тоді для $2 < x \le 3$ $n_x = 5$ й $F^*(x) = \frac{5}{30}$. Значення $X < 4$, а саме, $X = 2$, $X = 3$ спостерігалося 5+8=13 разів. Тому для $3 < x \le 4$ $n_x = 13$ й $F^*(x) = \frac{13}{30}$. Аналогічно міркуючи, отримуємо: для $5 < x \le 6$ $n_x = 5 + 8 + 9 + 5 = 27$ й $F^*(x) = \frac{27}{30}$,

для $x > 6$ $n_x = 5 + 8 + 9 + 5 + 3 = 30$ й $F^*(x) = \frac{30}{30} = 1$.

Таким чином, шукана емпірична функція розподілу має вигляд

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 2, \\ \frac{5}{30} & \text{при}\ 2 < x \le 3, \\ \frac{13}{30} & \text{при}\ 3 < x \le 4, \\ \frac{22}{30} & \text{при}\ 4 < x \le 5, \\ \frac{27}{30} & \text{при}\ 5 < x \le 6, \\ 1 & \text{при} \quad x > 6. \end{cases}$$

Її графік наведений на рис. 4.

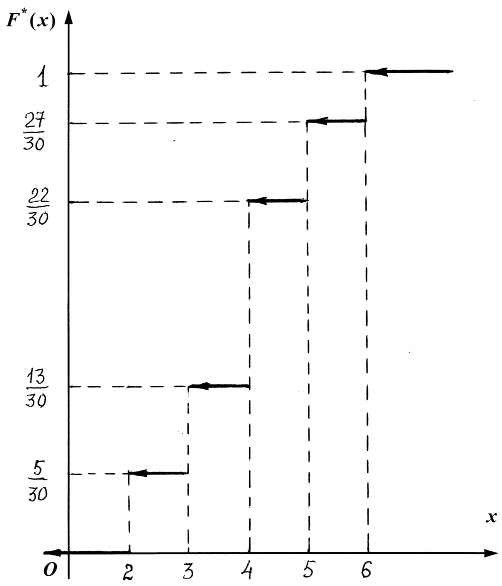

Рис. 4

е) незміщеною оцінкою математичного сподівання генеральної сукупності є вибіркова середня

$$\overline{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n} = \frac{2\cdot 5 + 3\cdot 8 + 4\cdot 9 + 5\cdot 5 + 6\cdot 3}{30} = \frac{113}{30} \approx 3{,}77,$$

а незміщеною оцінкою дисперсії – виправлена вибіркова дисперсія $s^2 = \frac{n}{n-1} D_B$, де D_B – вибіркова дисперсія (зміщена оцінка дисперсії).

Оскільки $D_B = \overline{x_B^2} - \left(\overline{x}_B\right)^2 = \frac{2^2\cdot 5 + 3^2\cdot 8 + 4^2\cdot 9 + 5^2\cdot 5 + 6^2\cdot 3}{30} - \left(\frac{113}{30}\right)^2 \approx 1{,}42$,

то виправлена вибіркова дисперсія є $s^2 = \frac{30}{29}\cdot 1{,}42 \approx 1{,}47$, а виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення $s = \sqrt{1{,}47} \approx 1{,}21$.

__Приклад 42.__ Надані вибіркові значення контрольованого параметра деякого технологічного процесу:

18,0; 12,0; 11,9; 1,9; 5,5; 14,6; 4,8; 5,6; 4,8; 10,9; 9,7; 7,2; 12,4; 7,6; 9,7; 11,2; 4,2; 4,9; 9,6; 3,2; 8,6; 4,6; 6,7; 8,4; 6,8; 6,9; 17,9; 9,6; 14,8; 15,8. Потрібно:

а) Скласти групований (інтервальний) розподіл вибірки з початком $x_0 = 1$ і довжиною часткового інтервалу $h = 3$;

б) побудувати гістограму частот.

Розв'язання.

а) Для складання інтервального розподілу складемо таблицю, у першому рядку якої розташуємо в порядку зростання інтервали, довжина кожного з яких $h = 3$. У другому рядку запишемо кількість значень ознаки у вибірці, що потрапили в цей інтервал (тобто суму частот варіант, які потрапили у відповідний інтервал):

$(x_i; x_{i+1})$	**1-4**	**4-7**	**7-10**	**10-13**	**13-16**	**16-19**
n_i	**2**	**10**	**8**	**5**	**3**	**2**

Обсяг вибірки $n = 2 + 10 + 8 + 5 + 3 + 2 = 30$;

б) для побудови гістограми частот на осі абсцис відкладаємо часткові інтервали, на кожному з них будуємо прямокутники висотою $\frac{n_i}{h}$, де n_i – сума частот варіант i-го часткового інтервалу, h – крок (довжина інтервалу). Таким чином, гістограма частот має вигляд

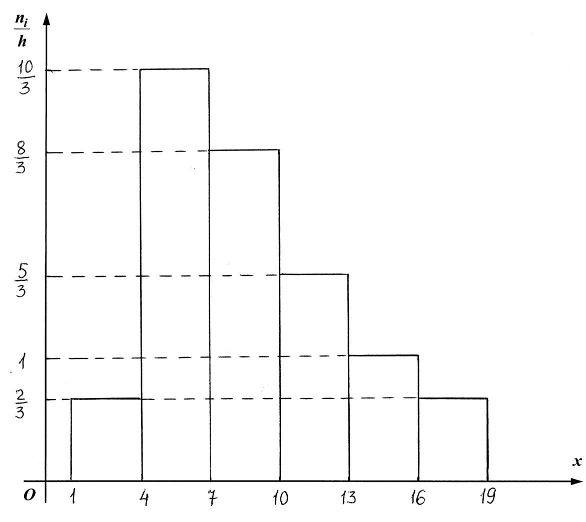

Рис. 5

Зауваження. Для побудови емпіричної функції розподілу і відшукання точкових оцінок ряду необхідно перетворити його до дискретного вигляду за формулою $x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$. Отримаємо

x_i^*	2,5	5,5	8,5	11,5	14,5	17,5
n_i	2	10	8	5	3	2

Приклад 43. З результатів вимірювань границі текучості великої партії зразків деякого сорту сталі з різних плавок випадковим чином відібрані **100**. Середнє значення границі текучості у вибірці виявилося рівним $\mathbf{31{,}33\ кГ/мм^2}$. Вважаючи границю текучості випадковою величиною X, розподіленою за нормальним законом, знайти з надійністю $\gamma = 0{,}95$ довірчий інтервал для середнього значення $a_Г$ границі текучості зразків усієї партії, якщо середнє квадратичне відхилення границі текучості для всієї партії відоме і складає $\mathbf{3{,}19\ кГ/мм^2}$.

Розв'язання.

За умовою задачі $n = 100,\ \bar{x}_B = 31{,}33,\ \gamma = 0{,}95,\ \sigma_Г = 3{,}19$. Довірчий інтервал для математичного сподівання $a_Г$ нормально розподіленої кількісної ознаки X генеральної сукупності при відомому середньоквадратичному відхиленні $\sigma_Г$ визначається нерівністю

$$\bar{x}_B - t\frac{\sigma_Г}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + t\frac{\sigma_Г}{\sqrt{n}},$$

де t заходиться з умови $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$. За таблицею у додатку 2 знаходимо $t = 1{,}96$, якому відповідає значення функції Лапласа $\frac{\gamma}{2} = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$. Тоді шуканий довірчий інтервал є

$$31{,}33 - \frac{1{,}96 \cdot 3{,}19}{\sqrt{100}} < a < 31{,}33 + \frac{1{,}96 \cdot 3{,}19}{\sqrt{100}} \quad \text{або} \quad 30{,}70 < a < 31{,}96.$$

Приклад 44. З генеральної сукупності, розподіленої за нормальним законом, витягнута вибірка:

$(x_i;\ x_{i+1})$	120-140	140-160	160-180	180-200	200-220	220-240	240-260	260-280
n_i	1	4	10	14	12	6	2	1

Знайти з надійністю γ довірчі інтервали для оцінки математичного сподівання, середньоквадратичного відхилення і дисперсії ознаки X генеральної сукупності.

Розв'язання. Якщо генеральне середнє квадратичне відхилення $\sigma_Г$ невідоме, але відомі вибіркова середня $\overline{x}_B$ і виправлене вибіркове значення s, то довірчий інтервал для математичного сподівання ознаки X генеральної сукупності відшукується за допомогою розподілу Стьюдента і має вигляд

$$\overline{x}_B - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_B + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}},$$

де значення t_γ знаходиться з таблиці у додатку 3.

Перетворимо заданий інтервальний розподіл до дискретного вигляду за формулою $x_i^* = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$. Отримаємо

x_i^*	130	150	170	190	210	230	250	270
n_i	1	4	10	14	12	6	2	1

Об'єм вибірки $n = 50$. Обчислимо вибіркову середню:

$$\overline{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^* n_i}{n} = \frac{1}{50}\big(130\cdot 1 + 150\cdot 4 + 170\cdot 10 + 190\cdot 14 + 210\cdot 12 + 230\cdot 6 + 250\cdot 2 + $$
$$+ 270\cdot 1\big) = 195{,}2.$$

Оскільки вибіркова дисперсія є

$$D_B = \overline{x_B^2} - \left(\overline{x}_B\right)^2 = \frac{1}{50}\big(130^2\cdot 1 + 150^2\cdot 4 + 170^2\cdot 10 + 190^2\cdot 14 + 210^2\cdot 12 + 230^2\cdot 6 +$$
$$+ 250^2\cdot 2 + 270^2\cdot 1\big) - 195{,}2^2 = 812{,}96,$$

то вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_B = \sqrt{D_B} = 28{,}5$, виправлена вибіркова дисперсія $s^2 = \dfrac{n}{n-1} D_B = \dfrac{50}{49}\cdot 813 \approx 829{,}6$, а виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення $s = \sqrt{829{,}6} \approx 28{,}8$. Значення t_γ знаходимо з таблиці у додатку 3 при $n = 50$ й $\gamma = 0{,}95$: $t_\gamma = 2{,}009$. Отже, отримуємо

$$195{,}2-\frac{2{,}009\cdot 28{,}8}{\sqrt{50}}<a_\Gamma<195{,}2+\frac{2{,}009\cdot 28{,}8}{\sqrt{50}} \quad \text{або} \quad 187{,}0<a_\Gamma<203{,}4;$$

На практиці довірчі інтервали для середньоквадратичного відхилення або дисперсії доводиться будувати або при оцінованні точності вимірювальної методики і апаратури або, наприклад, при при оцінюванні технологічного розкиду деякого параметра промислової продукції.

Довірчий інтервал для середнього квадратичного відхилення σ_Γ ознаки X генеральної сукупності визначається нерівністю

$$s(1-q)<\sigma_\Gamma<s(1+q),$$

де значення q знаходиться з таблиці у додатку 4. При $n=50$ й $\gamma=0{,}95$ з вказаної таблиці знаходимо $q=0{,}21$. Отже, отримуємо

$$28{,}8\cdot(1-0{,}21)<\sigma_\Gamma<28{,}8\cdot(1+0{,}21) \quad \text{або} \quad 22{,}75<\sigma_\Gamma<34{,}85.$$

Зауваження. Якщо $q>1$, то довірчий інтервал $0<\sigma_\Gamma<s(1+q)$;

Довірчий інтервал для дисперсії може бути отриманий на підставі наступного міркування. Оскільки дисперсія є квадрат середнього квадратичного відхилення ($D_\Gamma=\sigma_\Gamma^2$), то довірчий інтервал, який покриває генеральну дисперсію з заданою надійністю γ, має вигляд

$$s^2(1-q)^2<D_\Gamma<s^2(1+q)^2 \text{ якщо } q<1 \text{ й } 0<D_\Gamma<s^2(1+q)^2 \text{ якщо } q>1.$$

В нашому випадку $22{,}75^2<D_\Gamma<34{,}85^2$ або $517{,}6<D_\Gamma<1214{,}5$.

Приклад 45. Результати обстеження 100 підприємств відносно споживання сировини X (т) і обсяга виробленої продукції Y (тис. од.) представлені у кореляційній таблиці.

Y	X					n_y
	5	**15**	**25**	**35**	**45**	
30	7	1				8
32	2	7	1			10
34	1	5	4	1		11
36		1	15	10	8	34
38			3	12	15	30
40				1	6	7
n_x	10	14	23	24	29	$n=100$

Потрібно:

а) в декартовій системі координат побудувати випадкові точки вибірки і емпіричні ламані регресії Y на X й X на Y, зробити припущення про існування і тип кореляційного зв'язку між X та Y;

б) скласти лінійні рівняння регресії Y на X й X на Y і побудувати відповідні прямі на одному кресленні;

в) оцінити адекватність лінійної моделі регресії даним таблиці за кресленням й величинам залишкового середньоквадратичного відхилення та вибіркового парного коефіцієнта кореляції.

Розв'язання.

а) При $x = 5$ ознака Y має розподіл

Y	30	32	34
n_i	7	2	1

Тому умовна середня $\overline{y}_{x=5} = \dfrac{30 \cdot 7 + 32 \cdot 2 + 34 \cdot 1}{10} = 30{,}8$.

При $x = 15$ ознака Y має розподіл

Y	30	32	34	36
n_i	1	7	5	1

Отже, $\overline{y}_{x=15} = \dfrac{30 \cdot 1 + 32 \cdot 7 + 34 \cdot 5 + 36 \cdot 1}{14} = 32{,}86$.

Аналогічно обчислюються всі умовні середні $\overline{y}_x$. В результаті отримуємо таблицю, що виражає кореляційну залежність $\overline{y}$ від от X.

X	5	15	25	35	45
$\overline{y}_x$	30,8	32,86	35,74	37,08	37,86

Оскільки при $y = 30$ ознака X має розподіл

X	5	15
n_j	7	1

то умовне середнє $\overline{x}_{y=30} = \dfrac{5\cdot 7 + 15\cdot 1}{8} = 6{,}25$.

При $y = 32$ ознака X має розподіл

X	5	15	25
n_j	2	7	1

Отже, $\overline{x}_{y=32} = \dfrac{5\cdot 2 + 15\cdot 7 + 25\cdot 1}{10} = 14$.

Аналогічно обчислюються всі умовні середні $\overline{x}_y$. В результаті отримуємо таблицю, що виражає кореляційну залежність $\overline{x}$ від от Y.

Y	30	32	34	36	38	40
$\overline{x}_y$	6,25	14	19,54	32,35	39	43,57

В прямокутній системі координат побудуємо експериментальні точки та точки $A_i\left(x_i; \overline{y}_{x_i}\right)$. З'єднавши їх відрізками прямих, отримаємо емпіричну лінію регресії Y на X. Аналогічно будуємо точки $B_j\left(\overline{x}_{yj}; y_j\right)$ і емпіричну лінію регресії X на Y. Результати представлені на рис. 6. Вигляд емпіричних ліній регресії і їх розташування відносно експериментальних точок дозволяє припустити існування лінійного кореляційного зв'язку між X й Y.

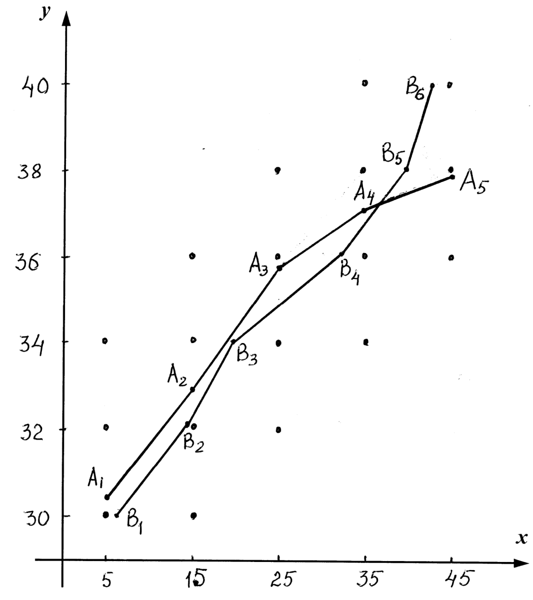

Рис. 6

б) обчислимо вибірковий парний коефіцієнт кореляції

$$r_B = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y},$$

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{n},\ \overline{y} = \frac{\sum y_j \cdot n_j}{n},\ \overline{x^2} = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{n},\ \overline{y^2} = \frac{\sum y_j^2 \cdot n_j}{n},$$

$$\overline{xy} = \frac{\sum x_i y_j \cdot n_{ij}}{n},\ \sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2},\ \sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - \left(\overline{y}\right)^2},$$

$$\overline{x} = \frac{5 \cdot 10 + 15 \cdot 14 + 25 \cdot 23 + 35 \cdot 24 + 45 \cdot 29}{100} = 29{,}8,$$

$$\overline{y} = \frac{30 \cdot 8 + 32 \cdot 10 + 34 \cdot 11 + 36 \cdot 34 + 38 \cdot 30 + 40 \cdot 7}{100} = 35{,}78,$$

$$\overline{x^2} = \frac{5^2 \cdot 10 + 15^2 \cdot 14 + 25^2 \cdot 23 + 35^2 \cdot 24 + 45^2 \cdot 29}{100} = 1059,$$

$$\overline{y^2} = \frac{30^2 \cdot 8 + 32^2 \cdot 10 + 34^2 \cdot 11 + 36^2 \cdot 34 + 45^2 \cdot 30 + 40^2 \cdot 7}{100} = 1287{,}4,$$

$$\overline{xy} = \frac{30 \cdot 5 \cdot 7 + 30 \cdot 15 \cdot 1 + 32 \cdot 5 \cdot 2 + 32 \cdot 15 \cdot 7 + 32 \cdot 25 \cdot 1 + 34 \cdot 5 \cdot 1 + 34 \cdot 15 \cdot 5}{100} +$$

$$+ \frac{34 \cdot 25 \cdot 4 + 34 \cdot 35 \cdot 1 + 36 \cdot 15 \cdot 1 + 36 \cdot 25 \cdot 15 + 36 \cdot 35 \cdot 10 + 36 \cdot 45 \cdot 8 + 38 \cdot 25 \cdot 3}{100} +$$

$$+ \frac{38 \cdot 35 \cdot 12 + 38 \cdot 45 \cdot 15 + 40 \cdot 35 + 40 \cdot 45 \cdot 6}{100} = 1095{,}5$$

$$\sigma_x = \sqrt{1059 - (29{,}8)^2} = 13{,}08, \qquad \sigma_y = \sqrt{1287{,}4 - (35{,}78)^2} = 2{,}68,$$

$$r_B = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{1095{,}5 - 29{,}8 \cdot 35{,}78}{13{,}08 \cdot 2{,}68} = 0{,}83.$$

Підставимо знайдені значення у рівняння прямої регресії Y на X

$$y - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x}).$$

Отримуємо $y - 35{,}78 = 0{,}83 \dfrac{2{,}68}{13{,}08}(x - 29{,}8)$ або $y = 0{,}17x + 30{,}71$.

Тепер підставимо знайдені значення у рівняння прямої регресії X на Y

$$x - \overline{x} = r_B \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \overline{y}).$$

Отримуємо $x - 29{,}8 = 0{,}83 \dfrac{13{,}08}{2{,}68}(y - 35{,}78)$ або $x = 4{,}05y - 115{,}14$.

Зауваження. Якщо у кореляційній таблиці дані інтервальні розподіли, за значення варіант потрібно брати середини часткових інтервалів.

Зобразимо графіки прямих ліній регресії на кресленні (рис.7). Цифрою **1** позначена пряма регресії Y на X, а цифрою **2** – пряма регресії X на Y. Як бачимо, прямі розташовані відносно одна одної так само, як і відповідні емпірічні лінії, причому обидві прямі проходять через точку $(\overline{x}, \overline{y})$ – центр регресії.

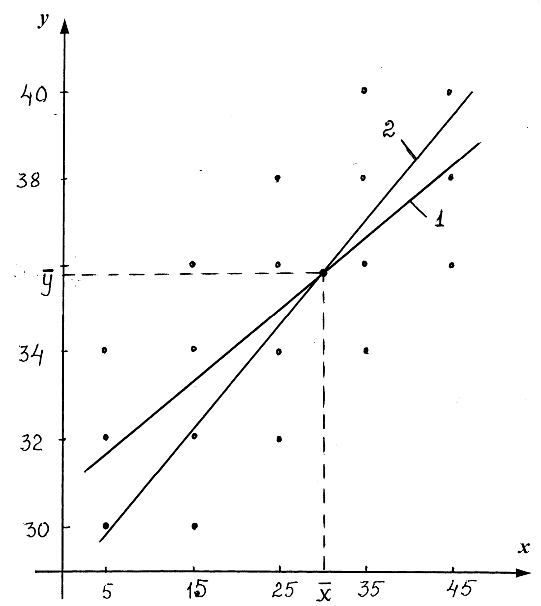

Рис. 7

Застосування умовних варіант при побудові рівнянь регресії. Оскільки значення обох ознак X і Y є рівновіддаленими, то дану задачу можна розв'язати за допомогою умовних варіант

$$u_i = \frac{x_i - C_1}{h_1},\ v_j = \frac{y_j - C_2}{h_2},$$

де C_1, C_2 – хибні нулі, h_1, h_2 – кроки. Так, в даному прикладі

$$C_1 = 25,\ h_1 = 10,\ u_i = \frac{x_i - 25}{10};\ \ C_2 = 36,\ h_2 = 2,\ v_j = \frac{y_j - 36}{2}.$$

Побудуємо кореляційну таблицю.

v	u					n_y
	-2	**-1**	**0**	**1**	**2**	
-3	7	1				8
-2	2	7	1			10
-1	1	5	4	1		11
0		1	15	10	8	34
1			3	12	15	30
2				1	6	7
n_x	10	14	23	24	29	$n = 100$

$$\bar{u} = \frac{-2\cdot 10\cdot 14 + 0\cdot 23 + 1\cdot 24 + 2\cdot 29}{100} = 0{,}48,$$

$$\bar{v} = \frac{-3\cdot 8 - 2\cdot 10 - 1\cdot 11 + 1\cdot 30 + 2\cdot 7}{100} = -0{,}11,$$

$$\overline{u^2} = \frac{4\cdot 10 + 1\cdot 14 + 1\cdot 24 + 4\cdot 29}{100} = 1{,}94;$$

$$\overline{v^2} = \frac{9\cdot 8 + 4\cdot 10 + 1\cdot 11 + 1\cdot 30 + 4\cdot 7}{100} = 1{,}81;$$

$$\overline{uv} = \frac{1}{100}\cdot[(-3)(-2)\cdot 7 + (-3)(-1)\cdot 1 + (-2)(-2)\cdot 2 + (-2)(-1)\cdot 7 + (-1)(-2)\cdot 1 +$$

$$+(-1)(-1)\cdot 5 + (-1)\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 12 + 1\cdot 2\cdot 15 + 2\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 6] = 1{,}4;$$

$$\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\bar{u})^2} = \sqrt{1{,}94 - 0{,}2304} = 1{,}308,\ \ \sigma_v = \sqrt{1{,}81 - 0{,}012} = 1{,}34;$$

$$r_B = \frac{\overline{uv} - \overline{u} \cdot \overline{v}}{\sigma_u \sigma_v} = \frac{1{,}4 - 0{,}48 \cdot (-0{,}11)}{1{,}31 \cdot 1{,}34} = 0{,}83;$$

$$\overline{x} = \overline{u} h_1 + C_1 = 0{,}48 \cdot 10 + 25 = 29{,}8, \ \overline{y} = \overline{v} h_2 + C_2 = -0{,}11 \cdot 2 + 36 = 35{,}78,$$

$$\sigma_x = \sigma_u \cdot h_1 = 1{,}308 \cdot 10 = 13{,}08, \ \sigma_y = \sigma_v \cdot h_2 = 1{,}34 \cdot 2 = 2{,}68.$$

Підставивши отримані дані у рівняння регресії, будемо мати

$$y = 0{,}17x + 30{,}71 \quad \text{й} \quad x = 4{,}05y - 115{,}14;$$

в) креслення (подібне рис. 7), на яке нанесені експериментальні точки і прямі регресії, дає досить добре уявлення про відповідність лінійної моделі регресії даним експерименту.

На практиці тіснота (сила) кореляційного зв’язку оцінюється за допомогою вибіркового коефіцієнта кореляції. При $r_B = 0$ лінійного кореляційного зв'язку між ознаками не існує (однак при цьому може бути нелінійний кореляційний зв'язок і навіть нелінійна функціональна залежність). Якщо ж $|r_B| = 1$, то обидві прямі регресії зливаються у одну пряму, тобто усі експериментальні точки лежать на прямій регресії. Це випадок жорсткої лінійної залежності між випадковими величинами в межах проведених експериментів. Таким чином, чим ближче за модулем коефіцієнт лінійної кореляції до одиниці, тим тісніша лінійна залежність між випадковими величинами; наближення ж коефіцієнта кореляції до нуля веде к ослабленню лінійної залежності.

Про тісноту зв'язку можна судити за значенням коефіцієнта кореляції, використовуючи шкалу Чеддока (див. додаток 6). В даному випадку $r_B = 0{,}83$, що за шкалою Чеддока свідчить про високу кореляційну залежність між X і Y.

Про якість лінійної апроксимації свідчить також порівняння залишкового середнього квадратичного відхилення σ_3 з σ_x й σ_y. Обчислимо його:

$$\sigma_3 = \sigma_y \sqrt{\frac{n}{n-2}(1 - r_B^2)} = \sqrt{\frac{100}{100-2}(1 - 0{,}83^2)} = 0{,}56.$$

Як бачимо, залишкове середнє квадратичне відхилення σ_3 мале у порівнянні з $\sigma_x = 13{,}08$ та $\sigma_y = 2{,}68$, що додатково свідчить про адекватність обраної лінійної моделі регресії експериментальним даним.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання 1. Скласти рівняння кривої, якщо відомо, що вона проходить через точку M_0, а кутовий коефіцієнт дотичної до цієї кривої в кожній точці дорівнює $k(x, y)$.

1. M_0 (-1; 2), $k(x,y) = -\dfrac{x^2}{y}$.

2. M_0 (2; 5), $k(x,y) = \dfrac{y}{x^2}$.

3. M_0 (1; 2), $k(x,y) = \dfrac{y^2-1}{2x}$.

4. M_0 (1; 1), $k(x,y) = -\dfrac{\sqrt{x}}{y}$.

5. M_0 (0; 1), $k(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+1}}$.

6. $M_0\,(\pi/2;\,1)$, $k(x,y) = y\,ctgx$.

7. M_0 (1; 1), $k(x,y) = 3\dfrac{y}{x}$.

8. M_0 (1; 2), $k(x,y) = -y^2 x$.

9. M_0 (-1; 1), $k(x,y) = -\dfrac{y^2}{x^2}$.

10. M_0 (0; 1), $k(x,y) = -y\,tgx$.

Завдання 2. Розв’язати рівняння.

1. а) $x^2y' - 2xy = 3y$; б) $\left(y^2 - 2xy\right)dx + x^2dy = 0$; в) $xy' + 2y = e^{3x}$.

2. а) $xy' + y = xy\ln x$; б) $2x^3y' = y\left(2x^2 - xy\right)$; в) $\cos xy' + y\sin x = 1$.

3. а) $\left(x^2 + y^2\right)y' = xy$; б) $\left(x^2 + y^2\right)y' = xy$; в) $xy' + y = \ln x$.

4. а) $e^x \sin^3 y + \left(1 + e^{2x}\right)\cos y\, y' = 0$; б) $ydx + \left(2\sqrt{xy} - x\right)dy = 0$;

в) $y' - y\sin x = \sin 2x$.

5. а) $x^2y' + \cos 4y = 1$; б) $(y - x)xdy = y^2dx$; в) $y' - 3y\,tgx = \dfrac{1}{\cos x}$.

6. а) $yx^2y' = \left(y^2 + 1\right)e^{\frac{1}{x}}$; б) $2x^2y' = x^2 + y^2$; в) $x^2y' + 3xy = \cos x$.

7. а) $y^2 - xy' = y - x^2y'$; б) $xy' = y(\ln y - \ln x)$; в) $y' + 3y\,tgx = \sin x$.

8. а) $x\,tg5y\,dx - e^{2x^2}dy = 0$; б) $xy'\cos^2\dfrac{y}{x} = y\cos^2\dfrac{y}{x} + x$;

в) $x^2y' + xy = 2\ln x + 1$.

9. а) $y' = (x-1)e^{x+y}$; б) $xyy' = x^2 - y^2$; в) $xy' - 2y = xe^{\frac{1}{x}}$.

10. а) $3yy' + x^3 = x$; б) $2y' = \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + 1$; в) $y' + \dfrac{2e^{2x}y}{1+e^{2x}} = e^{-2x}$.

Завдання 3. Розв'язати задачу Коші.

1. $y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = -2$.
2. $y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 4$.
3. $y'' - 2y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 5$.
4. $y'' - y' - 12y = 0, \quad y(0) = -4, \quad y'(0) = 3$.
5. $y'' - 2y' + 10y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -4$.
6. $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -4$.
7. $y'' + 4y' + 13y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2$.
8. $y'' - 8y' + 16y = 0, \quad y(0) = -5, \quad y'(0) = 1$.
9. $y'' - 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -5$.
10. $y'' - 2y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -4$.

Завдання 4. Розв'язати задачу Коші.

1. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0$.
2. $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4$.
3. $y'' - 14y' + 53y = 42x^2 + 59x - 14, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 7$.
4. $y'' + 16y = e^x(\cos 4x - 8\sin 4x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 5$.
5. $y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0$.
6. $y'' + 25y = e^x(\cos 5x - 10\sin 5x), \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -4$.
7. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$.
8. $y'' - 2y' + 37y = 36e^x \cos 6x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6$.
9. $y'' - 9y' + 18y = 26\cos x - 8\sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$.
10. $y'' + 12y' + 36y = 72x^3 - 18, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$.

Завдання 5. Встановити збіжність або довести розбіжність рядів.

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+2)!}{n^5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}10^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{7^{2n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{5n}\right)^{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)\ln(3n+2)}$.

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\,\frac{1}{2n+1}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln^2(2n+1)}$.

4. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln(n+2))^n}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{\ln n}}{n}$.

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^n}}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{2^n}\right)^{3n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+4)\ln^3(3n+4)}$.

6. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot 5\cdot 6...(n+3)}{5\cdot 7\cdot 9...(2n+3)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+5n+8}{3n^2-2}\right)^n$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^7 n}$.

7. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\,\frac{1}{5^n}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-arctg\,n}}{n^2+1}$.

8. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 7\cdot 13...(6n-5)}{2\cdot 3\cdot 4...(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\ln(3n-1)}$.

9. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{n^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(tg\,\frac{\pi}{5^n}\right)^{3n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-2)\ln(5n-2)}$.

10. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n(n+1)}{5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln(n+1))^{2n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3+n^2}$.

Завдання 6. Встановити характер збіжності або довести розбіжність рядів.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^3}$.

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+1)!}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2+1}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n^2+1}{n^3}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n^3+1}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(2n+1)}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5n+1}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{5n^2+3}{3n-1}$.

Завдання 7. Знайти область збіжності степеневого ряду.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{2n+1}}{2n-1}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^{n-1}3^n}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n^2+1}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{8^n(n^2+1)}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{6^n\sqrt[3]{n+1}}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^n}{2^{n+1}(n+1)^2}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^{2n}}{\sqrt{n+3}}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt{2n+1}}$.

ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Номер варіанта контрольної роботи, що виконується, повинен співпадати з ДВОМА останніми цифрами номера залікової книжки. Номери задач з кожного завдання вибираються з таблиці, наведеної нижче.

Виконана контрольна робота переписується в окремий зошит. Розв'язки задач наводяться зі збереженням номерів задач, у порядку зростання цих номерів. Перед розв'язком кожної задачі треба повністю виписати її умову. Робота з не усіма виконаними задачами, або ж з такими, що повністю або частково не відповідають даному варіанту, вважається виконаною невірно.

СКЛАД ВАРІАНТІВ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Номер варіанта	Завд. 1	Завд. 2	Завд. 3	Завд. 4	Завд. 5	Завд. 6	Завд. 7	Завд. 8
00	6	6	4	5	6	1	6	4
01	4	7	3	9	10	6	4	2
02	3	4	9	6	5	7	3	9
03	9	3	8	1	1	4	9	8
04	1	10	10	3	3	5	1	10
05	10	2	2	2	9	3	10	3
06	2	8	1	8	2	10	2	1
07	8	9	7	4	8	2	8	7
08	7	5	6	7	7	8	7	6
09	5	1	5	10	4	9	5	5
10	4	10	7	3	3	4	3	7
11	1	2	1	7	5	6	2	1
12	9	9	5	1	1	5	9	5
13	7	7	3	4	7	9	7	3
14	5	6	2	10	10	8	6	2
15	8	4	10	8	6	7	4	10
16	6	8	4	5	8	10	8	4
17	10	3	6	2	4	2	10	6
18	3	5	9	9	9	1	5	9
19	2	1	8	6	2	3	1	8
20	5	6	6	8	5	10	6	6
21	2	9	9	2	3	7	9	9
22	9	2	2	9	4	6	2	2
23	4	7	7	4	7	4	7	7
24	1	10	10	1	9	1	10	10
25	6	5	5	7	6	2	5	5
26	7	4	4	6	2	3	4	4
27	8	3	3	5	8	5	3	3

28	3	8	8	3	1	8	8	8
29	10	1	1	10	10	9	1	1
30	5	6	6	1	5	4	6	6
31	4	5	5	2	10	6	5	5
32	7	10	8	6	6	5	10	8
33	3	4	4	3	1	10	4	4
34	9	9	10	9	3	7	9	10
35	6	7	7	5	8	3	7	7
36	2	1	2	8	7	2	1	2
37	10	8	9	10	4	8	8	9
38	1	2	3	4	2	9	2	3
39	8	3	1	7	9	1	3	1
40	6	4	7	4	7	1	4	7
41	5	10	5	3	10	9	10	5
42	2	3	8	7	6	4	3	8
43	10	7	4	2	1	8	7	4
44	1	5	9	8	5	3	5	9
45	4	2	3	5	2	5	2	3
46	3	6	6	10	4	2	6	6
47	8	8	2	6	8	7	8	2
48	9	1	10	9	3	6	1	10
49	7	9	1	1	9	10	9	1
50	10	2	1	7	8	3	2	1
51	9	8	2	8	1	4	8	2
52	8	9	3	6	6	5	9	3
53	7	7	5	5	5	6	7	5
54	1	1	10	9	4	7	1	10
55	5	5	6	3	9	10	5	6
56	4	4	7	2	3	8	4	7
57	3	3	8	1	10	9	3	8
58	2	10	9	10	7	2	10	9
59	6	6	4	4	2	1	6	4
60	9	10	1	5	8	1	10	1
61	3	8	4	7	7	2	8	4
62	5	7	7	3	10	9	7	7
63	6	4	2	9	4	5	4	2
64	8	6	5	1	3	6	6	5
65	10	9	9	8	2	7	9	6
66	7	1	3	6	6	3	1	3
67	4	5	6	2	1	8	5	9
68	1	3	10	4	5	4	3	10
69	2	2	8	10	9	10	2	8
70	10	6	7	2	6	8	6	7
71	6	7	6	9	1	6	7	6
72	7	10	2	6	7	9	10	2
73	1	1	9	5	5	7	1	9
74	9	9	3	4	8	10	9	3
75	8	8	4	3	10	5	8	4
76	2	2	10	8	2	4	2	10

77	3	3	8	10	4	3	3	8
78	5	5	5	1	3	2	5	5
79	4	4	1	7	9	1	4	1
80	8	7	1	6	6	4	7	1
81	10	1	3	7	8	5	1	3
82	6	10	4	3	3	1	10	4
83	9	6	2	8	7	10	6	2
84	5	9	5	9	10	3	9	5
85	7	8	7	10	9	2	8	7
86	1	2	10	5	5	6	2	10
87	3	5	8	1	1	7	3	8
88	4	4	6	2	4	8	5	6
89	2	3	9	4	2	9	4	9
90	8	9	8	8	4	4	9	8
91	4	6	1	4	2	2	6	1
92	10	1	9	6	7	7	1	9
93	3	3	7	1	10	10	3	7
94	7	2	3	5	6	6	2	3
95	5	4	2	7	5	5	4	2
96	6	10	6	10	9	9	10	6
97	1	5	10	2	3	3	5	10
98	2	7	5	3	8	8	7	5
99	9	8	4	9	1	1	8	4