МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

І.В. ЩЕРБИНА,
І.В. ПАСІЧНИК, Т.П. БАС

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 4
Навчальний посібник

Друкується за Планом видань навчальної та методичної літератури, затвердженим Вченою радою НМетАУ
Протокол № 1 від 26.01.2015

Дніпропетровськ НМетАУ 2015

УДК 517(07)
Вища математика. Частина 4: Навч. посібник / І.В. Щербина, І.В. Пасічник, Т.П. Бас. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2015. – 77 с.

Наведені докладні теоретичні відомості до вивчення розділу «Визначений інтеграл». Теоретичні положення супроводжуються необхідними поясненнями, а також розв'язуванням типових задач. Рекомендуються завдання для самостійної роботи.

Призначений для студентів напряму 6.050402 – ливарне виробництво.

Іл. 36. Бібліогр.: 4 найм.

Друкується за авторською редакцією.

Відповідальний за випуск В.Л. Копорулін, канд.тех.наук, доц.

Рецензенти: Т.С. Кагадій, д-р фіз.-мат. наук, проф. (ДВНЗ НГУ)
А.В. Сясєв, канд. фіз.-мат. наук, доц. (ДНУ)

ЗМІСТ

ВСТУП

Оновлення програми для студентів напряму “Ливарне виробництво”, і особливо, зменшення часів аудиторних занять передбачає новий підхід до викладання матеріалу з дисципліни “Вища математика”.

У четвертій частині навчального посібника викладено матеріал з таких розділів вищої математики: “Визначений інтеграл”, “Невласні інтеграли” та “Застосування визначеного інтеграла до задач геометрії”. Основні теоретичні положення, формули та теореми ілюструються докладним розв’язанням великої кількості задач різного ступеня складності з їх повним аналізом. Для ефективності засвоєння матеріалу пропонуються завдання для самостійної роботи.

Посібник складено згідно з робочою програмою дисципліни, матеріал подається у звичній для студентів формі – спочатку теорія, а потім практичні завдання. Кожна частина посібника відповідає матеріалу дисципліни однієї чверті аудиторних занять, що робить посібник більш зручним у використанні.

Автори посібника сподіваються, що ця робота буде корисною для кожного студента

ЛЕКЦІЯ 13. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

13.1. Визначений інтеграл. Основні поняття

Нехай у декартовій системі xOy задана неперервна на відрузку $[a;b]$ функція $y = f(x)$.

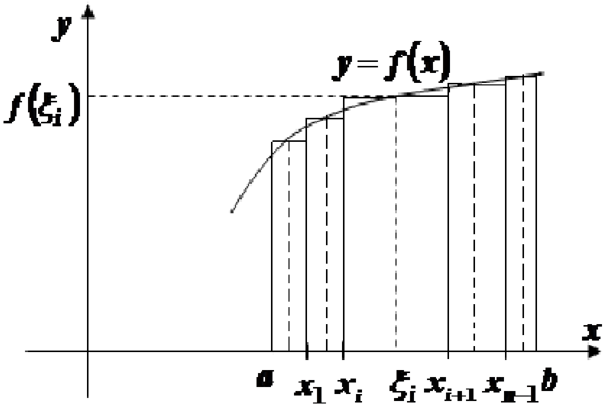


Рис. 13.1

Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ довільним чином на n частин точками $x_1, x_2, ..., x_n$ так, щоб $a = x_0$; $b = x_n$. Таким чином отримаємо відрізки $[x_0; x_1]$; $[x_1; x_2]$; …; $[x_{n-1}; x_n]$. У кожному з одержаних відрізків $[x_{i-1}; x_i]$ довільним чином оберемо точку ξ_i і знайдемо значення функції в кожній такій точці. Помножимо знайдене значення $f(\xi_i)$ на довжину відповідного відрізку $[x_{i-1}; x_i]$, яка дорівнює Δx_i. Складемо суму таких добутків:

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Така сума називається ***інтегральною сумою Рімана.***

Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I$, яка не залежить від способу розбиття відрізку $[a;b]$ на частини та від вибору точок ξ_i, то така границя називається ***визначеним інтегралом*** та позначається $\int_b^a f(x)dx$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Числа a та b називаються, відповідно, верхньою та нижньою границями інтегрування, $f(x)$ – підінтегральною функцією, $f(x)dx$ – підінтегральним виразом, x – змінною інтегрування, відрізок $[a;b]$ – відрізком (областю) інтегрування.

<u>Теорема (Коші) існування визначеного інтеграла.</u> Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ існує.

Ця теорема є достатньою умовою існування визначеного інтеграла.

Слід зауважити, що визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування, тобто $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt = \int\limits_a^b f(z)dz$.

13.2. Геометричне тлумачення визначеного інтеграла

Нехай на відрізку $[a;b]$ задана неперервна функція $y = f(x) \geq 0$. Розглянемо криволінійну трапецію, що обмежена лініями $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$ та знайдемо її площу.

Для цього відрізок $[a;b]$ розіб'ємо точками розподілу $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ на n частинних відрізків $[x_0, x_1], [x_1; x_2], \ldots, [x_{n-1}; x_n]$, що мають довжини $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1,n}$. На кожному з таких відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ оберемо довільну точку ξ_i та знайдемо $f(\xi_i)$, $i = \overline{1,n}$. Розглянемо суму:

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = S_n.$$

Ця сума дорівнює площі ступінчатої фігури та наближено дорівнює площі криволінійної трапеції: $S \approx S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Із зменшенням Δx_i та збільшенням n точність обчислювання збільшується, і ступінчата фігура наближається до криволінійної трапеції.

Отже, при $n \to \infty$ маємо:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \quad \left(\lambda = max\,\Delta x_i;\, i = \overline{1,n}\right), \text{ або } S = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Тобто, площа криволінійної трапеції, що знизу обмежена відрізком осі Ox, ліворуч і праворуч прямими $x=a$, $x=b$, а зверху кривою $y=f(x)$, численно дорівнює визначеному інтегралу $\int_a^b f(x)dx$.

13.3. Властивості визначеного інтеграла

<u>Теорема 1.</u> Визначений інтеграл від алгебраїчної суми двох інтегрованих функцій дорівнює алгебраїчній сумі двох інтегралів від цих функцій:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

Доведення. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i =$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i)\Delta x_i \pm g(\xi_i)\Delta x_i] = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i \right] =$$

$$= \pm \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

<u>Теорема 2.</u> Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла: $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$.

Доведення. $\int_a^b cf(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} cf(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} c\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i =$

$$= c\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = c\int_a^b f(x)dx.$$

<u>Теорема 3.</u> Якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями границі інтегрування, то знак інтеграла зміниться на протилежний, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

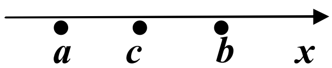
<u>Теорема 4.</u> Інтеграл, у якого нижня та верхня границі інтегрування однакові, дорівнює нулю, тобто

$$\int_a^a f(x)dx = 0 .$$

Доведення. Якщо нижня і верхня границі інтегрування збігаються, то довжина відрізка інтегрування дорівнює нулю, звідки довжина кожного Δx_i також дорівнює нулю. Тоді інтегральна сума $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = 0$, а значить $\int_a^a f(x)dx = 0$.

<u>Теорема 5.</u> Для будь-яких чисел a, b, c є справедливою рівність $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Доведення. 1) Нехай $a < c < b$.



При побудові інтегральної суми вважалось, що границя інтегральної суми не залежить від того, яким чином відрізок $[a;b]$ розбивається на частини. Отже, можна побудувати інтегральну суму так, щоб точка c увійшла до складу точок розподілу:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_i = c < x_{i+1} < ... < x_n = b .$$

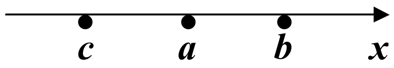
Тоді $S_n = \sum_{k=i}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{i} f(\xi_i)\Delta x_k + \sum_{k=i+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_k = S_n^* + S_n^{**}$.

При граничному переході отримаємо:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{R=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{i} f(\xi_i)\Delta x_k + \sum_{k=i+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_k \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} S_n^* + \lim_{n\to\infty} S^{**} = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

2) Нехай $c < a < b$.



У відповідності з попереднім випадком виходить: $\int\limits_c^b f(x)dx = \int\limits_c^a f(x)dx + \int\limits_a^b f(x)dx$.

Звідси $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_c^a f(x)dx$.

Помінявши місцями границі інтегрування в останньому інтегралі, маємо $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

Аналогічно доводиться теорема у випадку при $a < b < c$.

Теорема 6. Якщо інтегровна на відрізку $[a;b]$ функція $f(x) \geq 0$, то і $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.

Доведення. Нехай $f(x) \geq 0$ на $[a;b]$. Тоді $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$.

Користуючись правилом граничного переходу в нерівностях, дістанемо:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0.$$

Теорема 7. Якщо інтегровані на $[a;b]$ функції $f(x)$ та $g(x)$ задовольняють умову $0 \leq g(x) \leq f(x)$, то і $\int\limits_a^b g(x)dx \leq \int\limits_a^b f(x)dx$.

Доведення. Розглянемо допоміжну функцію $\Phi(x) = f(x) - g(x) \geq 0$. З теореми 6 випливає, що $\int\limits_a^b \Phi(x)dx \geq 0$, тоді $\int\limits_a^b (f(x) - g(x)]dx \geq 0 \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx - -\int\limits_a^b g(x)dx \geq 0 \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b g(x)dx$.

Теорема 8. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на $[a;b]$, то її модуль є також інтегровною функцією, і при цьому є справедливою нерівність

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

Доведення. Із властивості модуля виходить: $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$.

Проінтегруємо цю нерівність: $-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$.

Звідки маємо: $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

Теорема 9. Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a;b]$, а m та M – відповідно її найменше та найбільше значення на $[a;b]$, то виконується нерівність: $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

Доведення. Оскільки $m \le f(x) \le M$ на $[a;b]$, то за теоремами 2 та 8 маємо: $m\int_a^b dx \le \int_a^b f(x)dx \le M\int_a^b dx$.

Розглянемо $\int_a^b dx$: $\int_a^b dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 1\cdot \Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = b-a$.

Тоді $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

Теорема 10. (Теорема про середнє значення визначеного інтеграла). Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a;b]$, то існує хоча б одна точка $x = c \in [a;b]$ така, що $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$.

Доведення. За теоремою 9 маємо $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

Якщо розділити всі частини нерівності на $(b-a) > 0$, то отримаємо $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$, або $m \le \mu \le M$, де $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Із властивості функцій, неперервних на відрізку, виходить, що на $[a;b]$ існує така точка $x = c$, що $f(c) = \mu$. Маємо:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c), \text{ або } \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Число $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ називається середнім значенням функції на відрізку $[a;b]$.

Теорема 11. (Про похідну від інтеграла зі змінною верхньою границею). Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a;b]$, тоді функція $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ диференційовна у будь-якій точці відрізка $[a;b]$, і виконується рівність:

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x), \text{ тобто } \Phi'(x)=f(x).$$

Доведення. За означенням похідної функції та теоремою 6 маємо:

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x}.$$

Застосовуючи теорему 10, дістанемо $\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(c)$, де $c\in(x;x+\Delta x)$.

При $\Delta x\to 0 \Rightarrow x+\Delta x\to x$, тоді $c\to x$. Отже, $\Phi'(x)=f(x),\ x\in[a;b]$.

Це свідчить про те, що функція $\Phi(x)$ є первісною для функції $f(t)$.

Теорема 12. (Формула Ньютона-Лейбніца). Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a;b]$, а $F(x)$ – одна з первісних функції $f(x)$, то виконується рівність $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$.

Доведення. За умовою $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, а з попередньої теореми маємо, що $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ також первісна функції $f(x)$. Оскільки дві первісні однієї функції відрізняються на сталу величину, то отримаємо $\Phi(x)=$ $=F(x)+C$, або $\int\limits_a^x f(t)dt = F(x)+C$, де $x\in[a;b]$.

При $x=a$, маємо $\int\limits_a^a f(t)dt = F(a)+C=0 \Rightarrow C=-F(a)$.

При $x=b$, маємо $\int\limits_a^b f(t)dt = F(b)+C = F(b)-F(a)$, або $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b)-$ $-F(a)$.

Приклад 13.1. Обчислити інтеграли: а) $\int\limits_1^3 (x^3+2x+5)dx$; б) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \cos 3x dx$.

Розв'язання. а) $\int\limits_1^3 (x^3+2x+5)dx = \left(\frac{x^4}{4}+\frac{2x^2}{2}+5x\right)\Bigg|_1^3 = \left(\frac{3^4}{4}+3^2+5\cdot 3\right) -$ $-\left(\frac{1^4}{4}+1^2+5\cdot 1\right) = \frac{81}{4}+9+15-\frac{1}{4}-1-5=38$;

б) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \cos 3x dx = \frac{1}{3}\sin 3x\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{1}{3}\sin 3\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{6} = -\frac{1}{3}$.

13.4. Методи обчислення визначеного інтеграла

13.4.1. Метод підстановки (заміни змінної)

<u>Теорема.</u> Нехай функція $y=f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і для обчислення інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ зроблена підстановка $x=\varphi(t)$, де $\varphi(t)$ задовольняє такі умови:

1) $\varphi(t)$ неперервна на $[\alpha;\beta]$ та має неперервну на $[\alpha;\beta]$ похідну $\varphi'(t)$;

2) множиною значень функції $\varphi(t)$ при $t\in[\alpha;\beta]$ є відрізок $[a;b]$;

3) $\varphi(\alpha)=a$; $\varphi(\beta)=b$.

Тоді $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Доведення. Нехай $F(x)$ – первісна функції $f(t)$ на $[a;b]$. Тоді за формулою Ньютона-Лейбніца маємо

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (*)$$

Розглянемо допоміжну функцію $\Phi(t) = F(\varphi(t))$, де $t \in [\alpha, \beta]$.

Похідна цієї функції дорівнює $\Phi'(t) = F_\varphi{}' \cdot \varphi'(t)$. Оскільки $F'(x) = f(x)$, то $F'(\varphi(t)) = f(\varphi(t))$. Тоді $\Phi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$.

Це означає, що $\Phi(t)$ є первісною на $[a;b]$ для функції $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, з цього виходить, що

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a). \qquad (**)$$

Тоді з (*) та (**) дістанемо $\int\limits_a^b f(t)dt = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Зауваження. 1. В багатьох випадках, якщо обчислюється інтеграл $\int\limits_a^b f(\psi(x))\psi'(x)dx$, замість підстановки $x = \varphi(t)$ використовують підстановку $t = \psi(x)$, $dt = \psi'(x)dx$ і отримують $\int\limits_a^b f(\psi(x))\psi'(x)dx = \int\limits_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(t)dt$.

2. При використанні заміни змінної після обчислення визначеного інтеграла до старої змінної не повертаються.

3. При заміні змінної разом з заміною змінної треба змінювати границі інтегрування.

Приклад 13.2. Обчислити інтеграли: а) $\int\limits_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}dx$; б) $\int\limits_0^3 x\sqrt{9-x^2}dx$.

Розв'язання. а) $\int\limits_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = 3\sin t, \quad t = \arcsin x/3 \\ dx = 3\cos t dt \\ x = 0 \Rightarrow t = \arcsin 0 = 0 \\ x = 3 \Rightarrow t = \arcsin 1 = \pi/2 \end{array} \right| =$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} 9\sin^2 t\sqrt{9-9\sin^2 t}\;3\cos t dt = 81\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t dt = 81\int\limits_0^{\pi/2}(\sin t\cos t)^2 dt =$$

$$= 81\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin 2t}{2}\right)^2 dt = \frac{81}{4}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 2t dt = \frac{81}{4}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4t}{2}dt = \frac{81}{8}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{81}{8}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin 4\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{81}{8}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{81\pi}{16}.$$

б) $\int\limits_0^3 x\sqrt{9-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{ll} 9 - x^2 = t, & x = 0 \Rightarrow t = 9 - 0^2 = 9 \\ dt = -2xdx, & x = 3 \Rightarrow t = 9 - 3^2 = 0 \\ xdx = -dt/2 & \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int\limits_9^0 \sqrt{t}dt =$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^9 \sqrt{t}dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^9 t^{1/2}dt = \frac{1}{2}\frac{t^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^9 = \frac{1}{9}\sqrt{t^3}\Bigg|_0^9 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{9^3} - \sqrt{0^3}\right) = 9.$$

13.4.2. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

<u>Теорема.</u> Якщо функції $u = u(x)$ та $v = v(x)$ мають неперервні похідні на відрізку $[a;b]$, то є справедливою формула

$$\int\limits_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du.$$

Доведення. За формулою похідної добутку $(uv)' = u'v + uv'$. Це означає, що функція uv є первісною для неперервної функції $u'v + uv'$. Тоді за формулою Ньютона-Лейбніца маємо :

$\int\limits_a^b (u'v + uv')dx = uv\Big|_a^b$;

$$\int_a^b vu'dx + \int_a^b uv'dx = uv\Big|_a^b \Rightarrow \int_a^b vdu + \int_a^b udv = uv\Big|_a^b \Rightarrow \int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu .$$

Ця формула називається формулою ***інтегрування частинами***.

Приклад 13.3. Обчислити інтеграли: а) $\int_0^{\pi/4} x\cos 2xdx$; б) $\int_1^e x^2 \ln xdx$.

Розв'язання.

а) $$\int_0^{\pi/4} x\cos 2xdx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos 2xdx & v = \int \cos 2xdx = \frac{1}{2}\sin 2x \end{vmatrix} =$$

$$= x\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4}\frac{1}{2}\sin 2xdx = x\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi/4} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\sin 2xdx = \frac{1}{2}x\sin 2x\Big|_0^{\pi/4} +$$

$$+\frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{4}\sin 2\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\cos 2\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\cos 0 = \frac{1}{8}\pi - \frac{1}{4}.$$

б) $$\int_1^e x^2 \ln xdx = \begin{vmatrix} u = \ln x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^2dx & v = \int x^2dx = \dfrac{x^3}{3} \end{vmatrix} = -\frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^e -$$

$$-\int_1^e \frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2dx = \frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^e - \frac{x^3}{9}\Big|_1^e = \frac{e^3}{3}\ln e - \frac{1}{3}\ln 1 -$$

$$-\frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3+1}{9}.$$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 17. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

17.1. Формула Ньютона-Лейбніца

Якщо функція неперервна на відрізку $[a,b]$ і $F(x)$ – будь-яка первісна для $f(x)$ на цьому відрізку, то має місце формула:

$$\int_a^b f(x) = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Ця формула називається формулою Ньютона-Лейбніца і використовується для обчислення визначеного інтеграла.

Приклад 17.1. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_{-2}^{3}\left(2x^3 + x^2 - 5\right)dx$;

д) $\int\limits_{0}^{ln2} e^{3x+1}$;

б) $\int\limits_{-2}^{-1}\frac{dx}{(11+5x)^3}$;

є) $\int\limits_{1}^{8}\frac{2+\sqrt[3]{x}}{x^2}dx$;

в) $\int\limits_{-1}^{7}\frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$;

ж) $\int\limits_{2}^{5}\frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$;

г) $\int\limits_{0}^{\pi/2} sin\frac{x}{2}dx$;

з) $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+2}$;

і) $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x+x^3}$.

Розв'язання. Користуючись формулою Ньютона-Лейбніца і властивостями визначеного інтеграла (п. 13.3 лекція 13) обчислимо задані інтеграли.

а) $$\int\limits_{-2}^{3}\left(2x^3 + x^2 - 5\right)dx = \left(\frac{2x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 5x\right)\Bigg|_{-2}^{3} = \frac{3^4}{2} + \frac{3^3}{3} -$$

$$-5\cdot 3 - \left(\frac{(-2)^4}{2} + \frac{(-2)^3}{3} - 5\cdot(-2)\right) = \frac{81}{2} + 9 - 15 - \left(8 - \frac{8}{3} + 10\right) = \frac{81}{2} + \frac{8}{3} - 24 = \frac{55}{6}.$$

б) $$\int\limits_{-2}^{-1}\frac{dx}{(11+5x)^3} = \int\limits_{-2}^{-1}(11+5x)^{-3}dx = \frac{1}{5}\cdot\frac{(11+5x)^{-2}}{-2}\Bigg|_{-2}^{-1} = -\frac{1}{10}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{(11+5x)^2}\Bigg|_{-2}^{-1} = -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{(11-5)^2} - \frac{1}{(11-10)^2}\right) = -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{36} - 1\right) = \frac{35}{360} = \frac{7}{72}.$$

в) $$\int\limits_{-1}^{7}\frac{dx}{\sqrt{3x+4}} = \int\limits_{-1}^{7}\left(\sqrt{3x+4}\right)^{-1/2}dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+4)^{1/2}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_{-1}^{7} = \frac{2}{3}\sqrt{3x+4}\,\Bigg|_{-1}^{7} =$$

$$=\frac{2}{3}\left(\sqrt{3\cdot 7+4}-\sqrt{3\cdot(-1)+4}\right)=\frac{2}{3}(5-1)=\frac{8}{3}.$$

г) $$\int_0^{\pi/2} \sin\frac{x}{2}dx=-2\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi/2}=-2\cos\frac{\pi}{4}+2\cos 0=-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+2=2-\sqrt{2}.$$

д) $$\int_0^{\ln 2} e^{3x+1}=\frac{1}{3}e^{3x+1}\Big|_0^{\ln 2}=\frac{1}{3}\left(e^{3\ln 2+1}-e\right)=\frac{1}{3}\left(e^{3\ln 2}\cdot e-e\right)=\frac{e}{3}\left(e^{\ln 8}-1\right)=$$

$$=\frac{e}{3}(8-1)=\frac{7}{3}e.$$

є) $$\int_1^8\frac{2+\sqrt[3]{x}}{x^2}dx=\int_1^8\left(\frac{2}{x^2}+\frac{x^{1/3}}{x^2}\right)dx=2\int_1^8\frac{dx}{x^2}+\int_1^8 x^{-5/3}dx=-\frac{2}{x}\Big|_1^8+\frac{x^{-2/3}}{-\frac{2}{3}}\Big|_1^8=$$

$$=-\frac{2}{x}\Big|_1^8-\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}}\Big|_1^8=-\frac{2}{8}+2-\frac{3}{2\sqrt[3]{8^2}}+\frac{3}{2}=-\frac{1}{4}+2-\frac{3}{8}+\frac{3}{2}=\frac{23}{8}.$$

ж) $$\int_2^5\frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}=\int_2^5\frac{dx}{\sqrt{5-\left(x^2-4x+4-4\right)}}=\int_2^5\frac{dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}}=$$

$$=\arcsin\frac{x-2}{3}\Big|_2^5=\arcsin\frac{5-2}{3}-\arcsin\frac{2-2}{3}=\arcsin 1-\arcsin 0=\frac{\pi}{2}.$$

з) $$\int_{-1}^0\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int_{-1}^0\frac{dx}{\left(x^2+2x+1\right)-1+2}=\int_{-1}^0\frac{dx}{(x+1)^2+1}=\operatorname{arctg}(x+1)\Big|_{-1}^0=$$

$$=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\frac{\pi}{4}.$$

і) $$\int_1^2\frac{dx}{x+x^3}=\int_1^2\frac{dx}{x\left(1+x^2\right)};$$

$$\frac{1}{x\left(1+x^2\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Mx+N}{1+x^2}=\frac{A+Ax^2+Mx^2+Nx}{x\left(1+x^2\right)};$$

$$1=A+Ax^2+Mx^2+Nx;$$

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & 0=A+M \\ x^1 & 0=N \\ x^0 & 1=A \end{array}\right\}\begin{array}{l} M=-1, \\ N=0, \\ A=1. \end{array} \qquad \frac{1}{x\left(1+x^2\right)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2};$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\left(1+x^2\right)} = \int_1^2 \frac{dx}{x} - \int_1^2 \frac{xdx}{1+x^2} = ln|x|\,\Big|_1^2 - \frac{1}{2}ln\left|1+x^2\right|\,\Big|_1^2 = ln2 - ln1 - \frac{1}{2}ln5 +$$

$$+\frac{1}{2}ln2 = \frac{3}{2}ln2 - \frac{1}{2}ln5 = \frac{1}{2}\left(ln2^3 - ln5\right) = \frac{1}{2}ln\frac{8}{5}.$$

17.2. Заміна змінної у визначеному інтегралі

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і $x=\varphi(t)$ – функція, неперервна зі своєю похідною першого порядку на відрізку $[\alpha;\beta]$, причому $a=\varphi(\alpha)\le\varphi(t)\le\varphi(\beta)=b$ для $\alpha\le t\le\beta$, то справедлива формула заміни змінної у визначеному інтегралі

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Із сказаного випливає, що функція $x=\varphi(t)$ на відрізку $[\alpha;\beta]$ повинна бути монотонною або, іншими словами, всі значення функції $\varphi(t)$ повинні знаходитися на відрізку $[a;b]$.

Зауважимо, що заміна змінної у визначеному інтегралі вимагає обережності і обов'язкового виконання всіх перерахованих умов, накладених на функцію $x=\varphi(t)$.

Відзначимо також, що виконавши заміну змінної у визначеному інтегралі для його обчислення, немає необхідності переходити до початкової змінної, як це робиться при знаходженні невизначеного інтеграла, а досить лише перерахувати границі інтегрування для нової змінної.

Для цього до рівності $x=\varphi(t)$ замість x підставляємо по черзі нижню границю a і верхню границю b інтегрування і розв'язуємо рівняння $a=\varphi(t)$ і $b=\varphi(t)$. Знайдені значення t і будуть відповідно нижньою α і верхньою β границями інтегрування для нової змінної інтегрування. Якщо кожне з рівнянь $a=\varphi(t)$ і $b=\varphi(t)$ задовольняє не одно, а декілька значень t, то за α і β можна прийняти будь-яке із них. Однак вільність вибору обмежується вимогою, щоб значення функції $\varphi(t)$ не виходили із відрізка $[a;b]$, на якому визначена і неперервна підінтегральна функція $f(x)$.

Застерігаємо, що невиконання всіх указаних вимог, накладених на функцію $\varphi(t)$, може привести до грубих помилок.

У багатьох випадках доводиться замість підстановки $x=\varphi(t)$ покладати, що $t=\psi(x)$. У цьому випадку новими границями інтегрування є $\alpha=\psi(a)$ і $\beta=\psi(b)$. Якщо з $t=\psi(x)$ випливає, що $x=\psi(t)$, то для функції $\varphi(t)$ повинні виконуватися всі вказані вище умови.

Приклад 17.2. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{arctg^3 x}{1+x^2}dx$;

б) $\int\limits_1^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1+ln^2 x}}$;

в) $\int\limits_1^{10} \frac{1+lg\,x}{x}dx$;

г) $\int\limits_0^{\pi/2} cos^5 x\,sin\,xdx$;

д) $\int\limits_0^{\pi/3} \frac{sin\,xdx}{1-3cos\,x}$;

є) $\int\limits_1^{2} \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$;

ж) $\int\limits_0^{ln\sqrt{3}} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$;

з) $\int\limits_1^{2} \frac{x^4dx}{16+x^{10}}$;

і) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2cos\,x}$;

к) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+3sin^2 x}$.

Розв'язання. а) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{arctg^3 x}{1+x^2}dx$.

Так як $(arctg\,x)'=\frac{1}{1+x^2}$, то в цьому інтегралі треба зробити заміну $arctg\,x=t$. Продиференціюємо цю рівність:

$$d(arctg\,x)=dt,\ (arctg\,x)'dx=dt,\ \frac{dx}{1+x^2}=dt.$$

Змінимо границі інтегрування: підставимо $x=1$ в рівність $arctg\,x=t$ і одержимо $t_1=arctg1$; $t_1=\frac{\pi}{4}$, потім підставимо $x=\sqrt{3}$ в рівність $arctg\,x=t$ і одержимо $t_2=arctg\sqrt{3}$, $t_2=\frac{\pi}{3}$.

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{arctg^3 x dx}{1+x^2} = \left| \begin{array}{l} arctg\, x = t \\ \dfrac{dx}{1+x^2} = dt \\ t_1 = arctg 1 = \pi/4 \\ t_2 = arctg\sqrt{3} = \pi/3 \end{array} \right| = \int_{\pi/4}^{\pi/3} t^3 dt = \frac{t^4}{4} \Bigg|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{\pi}{3}\right)^4 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^4 \right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi^4}{81} - \frac{\pi^4}{256} \right) = \frac{175\pi^4}{82944}.$$

$$\text{б)} \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+ln^2 x}} = \left| \begin{array}{l} ln\, x = t \\ dx/x = dt \\ t_1 = ln 1 = 0 \\ t_2 = ln\, e = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = ln\left| t + \sqrt{1+t^2} \right| \Bigg|_0^1 = ln\left|1+\sqrt{2}\right| -$$

$$- ln 1 = ln\left|1+\sqrt{2}\right|.$$

$$\text{в)} \int_1^{10} \frac{1+lg\, x}{x} dx = \left| \begin{array}{l} 1 + lg\, x = t \\ \dfrac{dx}{x\, ln 10} = dt \\ dx/x = ln 10 dt \\ t_1 = 1 + lg 1 = 1 \\ t_2 = 1 + lg 10 = 2 \end{array} \right| = ln 10 \int_1^2 t dt = ln 10 \cdot \frac{t^2}{2} \Bigg|_1^2 =$$

$$= ln 10 \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} ln 10.$$

$$\text{г)} \int_0^{\pi/2} cos^5 x\, sin\, x dx = \left| \begin{array}{l} cos\, x = t \\ - sin\, x dx = dt \\ sin\, x dx = -dt \\ t_1 = cos 0 = 1 \\ t_2 = cos \pi/2 = 0 \end{array} \right| = -\int_1^0 t^5 dt = \int_0^1 t^5 dt = \frac{t^6}{6} \Bigg|_0^1 = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}.$$

$$\text{д)}\ \int\limits_0^{\pi/3}\frac{\sin xdx}{1-3\cos x}=\left|\begin{array}{l}1-3\cos x=t\\ 3\sin xdx=dt\\ \sin xdx=dt/3\\ t_1=1-3\cos 0=-2\\ t_2=1-3\cos\pi/3=1-3/2=-1/2\end{array}\right|=\frac{1}{3}\int\limits_{-2}^{-1/2}\frac{dt}{t}=\frac{1}{3}\ln|t|\Big|_{-2}^{-1/2}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|-\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{3}\ln|-2|=-\frac{1}{3}\ln 2-\frac{1}{3}\ln 2=-\frac{2}{3}\ln 2.$$

$$\text{є)}\int\limits_1^2\frac{e^{1/x}}{x^2}dx=\left|\begin{array}{l}1/x=t\\ -1/x^2\,dx=dt\\ t_1=1/1=1\\ t_2=1/2\end{array}\right|=-\int\limits_1^{1/2}e^t dt=\int\limits_{1/2}^1 e^t dt=e^t\Big|_{1/2}^1=e-e^{1/2}=e-\sqrt{e}.$$

$$\text{ж)}\ \int\limits_0^{\ln\sqrt{3}}\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx=\left|\begin{array}{l}e^x=t\\ e^x dx=dt\\ t_1=e^0=1\\ t_2=e^{\ln\sqrt{3}}=\sqrt{3}\end{array}\right|=\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{dt}{1+t^2}=arctg\,t\Big|_1^{\sqrt{3}}=arctg\sqrt{3}-$$

$$-arctg1=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{4\pi-3\pi}{12}=\frac{\pi}{12}.$$

$$\text{з)}\int\limits_1^2\frac{x^4dx}{16+x^{10}}=\int\limits_1^2\frac{x^4dx}{16+\left(x^5\right)^2}=\left|\begin{array}{l}x^5=t\\ 5x^4dx=dt\\ x^4dx=dt/5\\ t_1=1^5=1\\ t_2=2^5=32\end{array}\right|=\frac{1}{5}\int\limits_1^{32}\frac{dt}{16+t^2}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}arctg\frac{t}{4}\Big|_1^{32}=$$

$$=\frac{1}{20}\left(arctg8-arctg\frac{1}{4}\right).$$

і) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x} = \left| \begin{array}{l} t = tg\, x/2 \\ dx = 2dt/1+t^2 \\ \cos x = 1-t^2/1+t^2 \\ t_1 = tg0 = 0 \\ t_2 = tg\,\pi/4 = 1 \end{array} \right| = \int\limits_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+\frac{2\left(1-t^2\right)}{1+t^2}} =$

$$= \int\limits_0^1 \frac{2dt}{\frac{3+3t^2+2-2t^2}{1+t^2}\cdot\left(1+t^2\right)} = \int\limits_0^1 \frac{2dt}{5+t^2} = 2\int\limits_0^1 \frac{dt}{5+t^2} = \frac{2}{\sqrt{5}} arctg \frac{t}{\sqrt{5}} \Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\left(arctg \frac{1}{\sqrt{5}} - arctg0 \right) = \frac{2}{\sqrt{5}} arctg \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

к) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+3\sin^2 x} = \left| \begin{array}{l} tgx = t \\ dx = dt/1+t^2 \\ \sin^2 x = t^2/1+t^2 \\ t_1 = tg0 = 0 \\ t_2 = tg\,\pi/4 = 1 \end{array} \right| = \int\limits_0^1 \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{3t^2}{1+t^2}} =$

$$= \int\limits_0^1 \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\cdot\frac{1+t^2+3t^2}{1+t^2}} = \int\limits_0^1 \frac{dt}{1+4t^2} = \frac{1}{2}\cdot arctg2t \Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} arctg2 - \frac{1}{2} arctg0 = \frac{1}{2} arctg2$$

17.3. Формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ неперервні разом із своїми похідними першого порядку на відрізку $[a;b]$, то справедлива формула:

$$\int\limits_a^b udv = uv \Bigg|_a^b - \int\limits_a^b vdu .$$

Застосування цієї формули мало чим відрізняється від застосування відповідної формули для невизначеного інтеграла. Тому обмежимося розв'язанням кількох прикладів.

Приклад 17.3. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_0^1 x\,e^{-x/2}dx$; г) $\int\limits_0^1 x\,arctg\,xdx$;

б) $\int\limits_0^{\pi/10}(x+3)\sin 5xdx$; д) $\int\limits_0^{e-1} ln(x+1)dx$;

в) $\int\limits_0^{1/8} arccos\,4xdx$; є) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{xdx}{\sin^2 x}$;

ж) $\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos xdx$.

Розв'язання. а) $\int\limits_0^1 x\,e^{-x/2}dx = \left| \begin{array}{l} u = x,\ du = dx \\ dv = e^{-x/2}dx,\ v = \int e^{-x/2}dx = \\ = -2e^{-x/2} \end{array} \right| = -2xe^{-x/2}\Big|_0^1 -$

$-\int\limits_0^1\left(-2e^{-x/2}\right)dx = -2e^{-1/2} + 0 + 2\int\limits_0^1 e^{-x/2}dx = \frac{-2}{\sqrt{e}} + 2\cdot(-2)e^{-x/2}\Big|_0^1 = -\frac{2}{\sqrt{e}} - 4e^{-1/2} +$

$+4e^0 = 4 - \frac{6}{\sqrt{e}}$.

б) $\int\limits_0^{\pi/10}(x+3)\sin 5xdx = \left| \begin{array}{l} u = x+3,\ du = dx \\ dv = \sin 5xdx \\ v = \int \sin 5xdx = -\frac{1}{5}\cos 5x \end{array} \right| = -\frac{1}{5}(x+3)\times$

$\times\cos 5x\Big|_0^{\pi/10} + \frac{1}{5}\int\limits_0^{\pi/10}\cos 5xdx = -\frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{10}+3\right)\cos\frac{5\pi}{10} + \frac{1}{5}(0+3)\cos 0 + \frac{1}{25}\sin 5x\Big|_0^{\pi/10} =$

$= -\frac{1}{5}\cdot\frac{\pi+30}{10}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{3}{5}\cos 0 + \frac{1}{25}\sin\frac{5\pi}{10} - \frac{1}{25}\sin 0 = -\frac{1}{5}\cdot\frac{\pi+30}{10}\cdot 0 + \frac{3}{5}\cdot 1 + \frac{1}{25}\cdot 1 -$

$-\frac{1}{25}\cdot 0 = \frac{3}{5} + \frac{1}{25} = \frac{16}{25}$.

в) $\int\limits_0^{1/8} arccos\,4xdx = \left| \begin{array}{l} u = arccos\,4x,\ du = {-4dx}\big/{\sqrt{1-16x^2}} \\ dx = dv,\ v = \int dx = x \end{array} \right| = x\,arccos\,4x\Big|_0^{1/8} -$

$$-\int_0^{1/8}\frac{-4xdx}{\sqrt{1-16x^2}}=\frac{1}{8}arccos\frac{4}{8}-0\cdot arccos\,0-\frac{1}{8}\int_8^{118}\frac{32xdx}{\sqrt{1-16x^2}}=\frac{1}{8}arccos\frac{1}{2}-0-$$

$$-\frac{1}{8}\cdot 2\sqrt{1-16x^2}\,\Bigg|_0^{1/8}=\frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{4}\sqrt{1-16\cdot\frac{1}{64}}+\frac{1}{4}=\frac{\pi}{24}-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}}+\frac{1}{4}=\frac{\pi}{24}-\frac{\sqrt{3}-2}{8}.$$

г) $$\int_0^1 x\,arctg\,xdx=\left|\begin{matrix}u=arctg\,x,\ du=dx/1+x^2\\ dv=xdx,\ v=\int xdx=x^2/2\end{matrix}\right|=\frac{x^2}{2}arctg\,x\,\Bigg|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=\frac{1}{2}arctg1-0\cdot arctg0-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}-0-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{8}-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\cdot\left(x-arctg\,x\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\left(1-arctg1-0+arctg0\right)=$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}=\frac{2\pi}{8}-\frac{1}{2}=\frac{\pi-2}{4}.$$

д) $$\int_0^{e-1}ln(x+1)dx=\left|\begin{matrix}u=ln(x+1),\ du=dx/x+1\\ dv=dv,\ v=x\end{matrix}\right|=x\,ln(x+1)\Bigg|_0^{e-1}-$$

$$-\int_0^{e-1}x\cdot dx/x+1=(e-1)ln(e-1+1)-0\,ln(0+1)=\int_0^{e-1}\frac{x+1-1}{x+1}dx=(e-1)ln\,e-$$

$$-\int_0^{e-1}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=e-1-\left(x-ln|x+1|\right)\Bigg|_0^{e-1}=e-1-\left(e-1-ln|e-1+1|-0+\right.$$

$$\left.+ln1\right)=e-1-e+1+1=1.$$

є) $$\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{xdx}{sin^2x}=\left|\begin{matrix}u=x,\ du=dx\\ dv=dx/sin^2x,\ v=\int dx/sin^2x=-ctgx\end{matrix}\right|=-x\,ctg\,x\,\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/3}+$$

$$+\int_{\pi/4}^{\pi/3}ctgxdx=-\frac{\pi}{3}ctg\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}ctg\frac{\pi}{4}+ln|sin\,x|\,\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/3}=-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}+\frac{\pi}{4}+ln\left|sin\frac{\pi}{3}\right|-$$

$$-ln\left|sin\,\pi/4\right|=-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}+\frac{\pi}{4}+ln\frac{\sqrt{3}}{2}-ln\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}+\frac{\pi}{4}+ln\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\left(9-4\sqrt{3}\right)\pi}{36}+$$

$$+\frac{1}{2}ln\frac{3}{2}.$$

ж) $\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos xdx$.

Застосовуючи двічі формулу інтегрування частинами, будемо мати:

$$\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos xdx = \left|\begin{matrix} u=e^{2x}, du=2e^{2x}dx \\ dv=\cos xdx, v=\sin x\end{matrix}\right| = e^{2x}\sin x\Big|_0^{\pi/2} - 2\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\sin xdx =$$

$$= \left|\begin{matrix} u=e^{2x}, du=2e^{2x}dx \\ dv=\sin xdx, v=-\cos x\end{matrix}\right| = e^{\pi} - 2\left(-e^{2x}\cos x\Big|_0^{\pi/2} + 2\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos xdx\right) = e^{\pi} -$$

$$-\left(-e^{2\cdot\pi/2}\cdot\cos\frac{\pi}{2} + e^0\cdot\cos 0 + 2\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos xdx\right) = e^{\pi} - 2 - 4\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos xdx.$$

Розв’язуючи далі одержане рівняння відносно шуканого інтеграла, знаходимо:

$$5\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos xdx = e^{\pi} - 2,\quad \int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos xdx = \frac{e^{\pi}-2}{5}.$$

Завдання для самостійної роботи

Обчислити інтеграли:

1. $\int\limits_0^4 \left(x^2+3\right)^2 dx$. Відповідь: $368{,}8$.

2. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{9-x^2}$. Відповідь: 6 $\frac{1}{6}\ln 5$.

3. $\int\limits_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$. Відповідь: $-5\left(\sqrt[5]{16}-1\right)$.

4. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$. Відповідь: $arctg\frac{1}{7}$.

5. $\int\limits_{-0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$. Відповідь: $\frac{\pi}{6}$.

6. $\int\limits_1^e \frac{ln^2 x}{x} dx$. Відповідь: $\frac{1}{3}$.

7. $\int\limits_1^e \frac{sin\, ln\, x}{x} dx$. Відповідь: $1 - cos 1$.

8. $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{1 + x^4}$. Відповідь: $\frac{\pi}{8}$.

9. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{cos^4 x}$. Відповідь: $\frac{4}{3}$.

10. $\int\limits_0^{1/2} \sqrt{\frac{arcsin^5 x}{1 - x^2}} dx$. Відповідь: $\frac{2}{7} \cdot \left(\frac{\pi}{6} \right)^{7/2}$.

11. $\int\limits_0^1 (1 + x) e^{2x} dx$. Відповідь: $\frac{3e^2 - 1}{4}$.

12. $\int\limits_0^1 5^{-4x} (2 - x) dx$. Відповідь: $\frac{1249 ln 5 - 156}{2500 ln^2 5}$.

13. $\int\limits_0^{\pi} x\, cos \frac{x}{2} dx$. Відповідь: $2\pi - 4$.

14. $\int\limits_1^{e^2} \sqrt{x}\, ln\, xdx$. Відповідь: $\frac{4}{9}\left(2e^3 + 1\right)$.

15. $\int\limits_0^{1/2} arctg 2xdx$. Відповідь: $\frac{\pi - 2 ln 2}{8}$.

ЛЕКЦІЯ 14. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

14.1. Невласні інтеграли з нескінченними границями або невласні інтеграли I-го роду

Нехай функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a; +\infty)$. Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x) dx$, то її називають ***невласним інтегралом I-го***

роду або ***інтегралом з нескінченною верхньою границею інтегрування*** та позначають $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Таким чином, за означенням $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^{b} f(x)dx$.

Якщо така границя існує і скінченна, то говорять, що цей невласний інтеграл збігається, якщо така границя не існує або нескінченна, то говорять, що інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ розбігається.

Аналогічно вводять поняття наступних невласних інтегралів:

$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^{b} f(x)dx$ (для функції неперервної на $(-\infty;b]$);

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^{0} f(x)dx + \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b} f(x)dx$ (для функції неперервної на $(-\infty;+\infty)$).

Останній інтеграл збігається лише у тому випадку, коли збігаються обидва інтеграли, що знаходяться у правій частині останньої формули.

Слід відмітити, що якщо неперервна функція $f(x)\geq 0$ на проміжку $[a;+\infty)$ і інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається, то він представляє площу нескінченно довгої криволінійної трапеції (рис. 14.1).

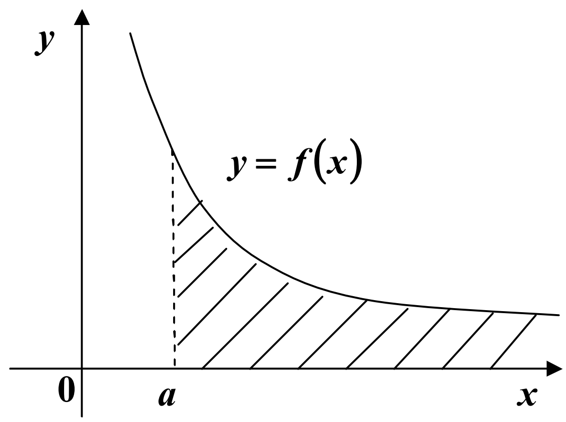


Рис. 14.1

В деяких випадках достатньо складно обчислювати невласний інтеграл, але можна перевірити збігається він чи ні користуючись наступними ознаками збіжності.

14.2. Ознаки збіжності невласних інтегралів І-го роду

Теорема 1. Якщо на проміжку $[a;+\infty)$ неперервні функції $y=f(x)$ та $y=g(x)$ задовольняють умові $0\le f(x)\le g(x)$, то із збіжності інтеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а із розбіжності інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Доведення цієї властивості виходить з властивостей визначеного інтеграла та з властивостей границь функцій.

Теорема 2. Нехай на проміжку $[a;+\infty)$ визначені невід'ємні та неперервні функції $y=f(x)$ та $y=g(x)$. До того ж $\varphi(x)$ відрізняється від нуля, коли $x\to\infty$. Якщо при цьому існує скінченна границя відношення цих функцій, коли $x\to\infty$, яка відрізняється від нуля, тобто $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k\ne 0$, то обидва інтеграли

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ та $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

Теорема 3. Нехай функція $y=f(x)$ визначена на проміжку $[a;+\infty)$. Якщо для будь-якого як завгодно великого числа $M>0$ існує таке число α, що є справедливою нерівність $0\le f(x)\le\frac{M}{x^{\alpha}}$, то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається.

Теорема 4. Нехай функція $y=f(x)$ визначена на проміжку $[a;+\infty)$. Якщо для будь-якого як завгодно великого числа $M>0$ є справедливою нерівність $f(x)\ge\frac{M}{x}$, то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ розбігається.

Означення. Якщо функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $[a;+\infty)$ і інтегровна на будь-якому проміжку $[a;b]$, де $b > a$, то інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ називається абсолютно збіжним, якщо збігається інтеграл $\int\limits_a^{b} |f(x)|dx$.

Якщо інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається, а $\int\limits_a^{b} |f(x)|dx$ розбігається, то інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ називається ***умовно збіжним***.

<u>Теорема 5.</u> Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $[a;+\infty)$ і збігається інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$, тоді збігається і інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Приклад 14.1. Дослідити на збіжність інтеграли:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{5x+16}}$; б) $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\, ln^4 x}$; в) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{cos\, 3x}{x^5}dx$; г) $\int\limits_1^{+\infty} ln\left(\frac{x^2+4}{x^2+1}\right)dx$.

Розв'язання. а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{5x+16}} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_0^{b} \frac{dx}{\sqrt{5x+16}} = \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{2}{5}\sqrt{5x+16}\Big|_0^b =$

$= \lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\sqrt{5b+16} - \frac{2}{5}\sqrt{5\cdot 0+16}\right) = \lim\limits_{b\to\infty}\left(\frac{2}{5}\sqrt{5b+16} - \frac{8}{5}\right) = \infty$ – розбігається.

б) $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\, ln^4 x} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_e^{b} \frac{dx}{x\, ln^4 x} = \begin{vmatrix} ln\, x = t & x = e \Rightarrow t = 1 \\ dt = dx/x & x = b \Rightarrow t = ln\, b \end{vmatrix} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^{ln b} \frac{dt}{t^4} =$

$= \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^{ln b} t^{-4}dt = \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{t^{-3}}{-3}\Big|_1^{ln\, b} = \lim\limits_{b\to+\infty} -\frac{1}{3t^3}\Big|_1^{ln\, b} = -\frac{1}{3}\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{ln^3 b} - 1\right) = \frac{1}{3}$ – збігається.

в) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{cos\, 3x}{x^5}dx$. При $x \geq 1$ маємо $\left|\frac{cos\, 3x}{x^5}\right| \leq \frac{1}{x^5}$.

Розглянемо інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^5}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b x^{-5}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{x^{-4}}{-4}\Big|_1^b=\lim\limits_{b\to+\infty}-\frac{1}{4x^4}\Big|_1^b=$ $=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{4b^4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$, тобто цей інтеграл збігається, тоді збігається і інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\left|\frac{\cos 3x}{x^5}\right|dx$ за теоремою 1, а значить і інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos 3x}{x^5}dx$ за теоремою 5, причому абсолютно.

г) $\int\limits_1^{+\infty}\ln\left(\frac{x^2+4}{x^2+1}\right)dx$. Розглянемо інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$, який збігається (доведення аналогічно попередньому прикладу). Знайдемо $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{x^2+4}{x^2+1}}{1/x^2}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x^2+1}\right)}{1/x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x^2+1}}{1/x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2+1}=\{\textit{за правилом Лопіталя}\}=$$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x}{2x}=3$, тоді за теоремою 2 збігається і інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\ln\left(\frac{x^2+4}{x^2+1}\right)dx$.

14.3. Невласні інтеграли ІІ-го роду або невласні інтеграли від необмежених функцій

Нехай функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a;b]$ і має нескінченний розрив при $x=b$.

Означення. Невласним інтегралом ІІ-го роду називається границя $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$, тобто $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$.

При цьому, якщо ця границя існує і має скінченне значення, то інтеграл називається ***збіжним***, у протилежному випадку – ***розбіжним***.

Аналогічно, якщо функція $f(x)$ має нескінченний розрив у точці $x=a$, то невласний інтеграл другого роду має вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx .$$

Якщо функція $f(x)$ має розрив у деякій внутрішній точці $x = c \in [a;b]$, то невласний інтеграл II-го роду визначається формулою

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-0} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c+0}^b f(x)dx .$$

У цьому випадку $\int_a^b f(x)dx$ називається збіжним, якщо збігаються обидва невласні інтеграли у правій частині останньої рівності.

З геометричної точки зору при $f(x) \geq 0$ невласний інтеграл II-го роду $\int_a^b f(x)dx$ (при розриві у точці $x = b$) можна вважати рівним площі нескінченно високої криволінійної трапеції (рис. 14.2).

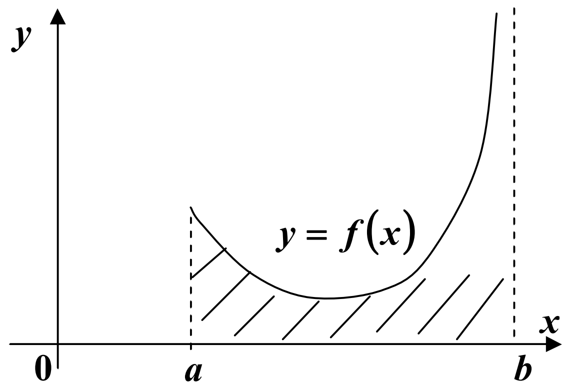


Рис. 14.2

Для невласних інтегралів другого роду також справедливі наступні ознаки збіжності.

14.4. Ознаки збіжності невласних інтегралів II-го роду

<u>Теорема 1.</u> Нехай функції $y = f(x)$ та $y = g(x)$ неперервні на проміжку $[a;b)$, а у точці b мають нескінченний розрив. Крім цього, має місце нерівність $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Тоді:

1) якщо збігається $\int_a^b g(x)dx$, то збігається і інтеграл $\int_a^b f(x)dx$;

2) якщо розбігається інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, то і інтеграл $\int_a^b g(x)dx$ також розбігається.

<u>Теорема 2.</u> Нехай функції $y = f(x)$ та $y = g(x)$ неперервні на проміжку $[a;b)$ і у точці $x = b$ мають розрив. Якщо існує границя $\lim\limits_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = k$, $0 < k < \infty$, то інтеграли $\int_a^b f(x)dx$ та $\int_a^b g(x)dx$ одночасно збігаються або одночасно розбігаються.

Означення. Невласний інтеграл ІІ-го роду $\int_a^b f(x)dx$ називається ***абсолютно збіжним***, якщо збігається інтеграл $\int_a^b |f(x)|dx$.

<u>Теорема 3.</u> Якщо збігається невласний інтеграл ІІ-го роду $\int_a^b |f(x)|dx$, то збігається і невласний інтеграл ІІ-го $\int_a^b f(x)dx$.

Приклад 14.2. Дослідити на збіжність невласні інтеграли:

а) $\int\limits_{-4}^{-1}\frac{dx}{x+1}$; б) $\int\limits_0^1\frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha \in R$; в) $\int\limits_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}cos^2\left(\frac{1}{x^2}\right)dx$.

Розв'язання. а) $\int\limits_{-4}^{-1}\frac{dx}{x+1}$.

Підінтегральна функція неперервна на проміжку $[-4;-1)$. У точці $x = -1$ вона має нескінченний розрив.

$$\int_{-4}^{-1}\frac{dx}{x+1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-4}^{-1-\varepsilon}\frac{dx}{x+1}=\lim_{\varepsilon\to 0} ln|x+1|\Big|_{-4}^{-1-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(ln|-1-\varepsilon+1|-ln|-4+1|\right)=$$

$=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(ln\,\varepsilon-ln\,3\right)=-\infty$. Інтеграл розбігається.

б) $\int\limits_0^1\frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha\in R$.

Підінтегральна функція неперервна на проміжку $(0;1]$, а у точці $x=0$ функція має нескінченний розрив. Отже, це невласний інтеграл II-го роду.

$$I=\int_0^1 x^{-\alpha}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 x^{-\alpha}dx=\begin{cases}\dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_\varepsilon^1, & \alpha\neq 1\\ ln|x|\Big|_\varepsilon^1, & \alpha=1\end{cases}=-\frac{1}{\alpha-1}\lim_{\varepsilon\to 0}\begin{cases}1-\varepsilon^{-\alpha+1}, \alpha<1\\ 1-{}^{1}\!/_{\varepsilon^{\alpha-1}}, \alpha>1\\ -ln|\varepsilon|, \quad \alpha=1\end{cases}=$$

$$=\frac{1}{1-\alpha}\begin{cases}1, & \alpha<1\\ \infty, & \alpha>1\\ \infty, & \alpha=1\end{cases}.$$

Таким чином, $\int\limits_0^1\frac{dx}{x^\alpha}$ збігається при $\alpha<1$, та розбігається при $\alpha\geq 1$.

в) $\int\limits_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}cos^2\left(\frac{1}{x^2}\right)dx$.

Підінтегральна функція неперервна на проміжку $(0;1]$, а у точці $x=0$ має розрив, тому $\int\limits_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}cos^2\left(\frac{1}{x^2}\right)dx$ – невласний інтеграл II-го роду.

Зрозуміло, що $0\leq\frac{1}{\sqrt{x}}cos^2\frac{1}{x^2}\leq\frac{1}{\sqrt{x}}$.

З попереднього приклада маємо, що $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$ – збігається, тоді за теоремою 1 збігається і інтеграл $\int\limits_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}cos^2\frac{1}{x^2}dx$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 18. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

При розгляданні визначених інтегралів передбачалося, що проміжок інтегрування скінченний і підінтегральна функція обмежена на цьому проміжку. Якщо ж ці умови не виконуються, то говорять про невласні інтеграли, які є узагальненням визначеного інтеграла для цих випадків.

18.1. Невласні інтеграли з нескінченними проміжками інтегрування (І роду)

Основні поняття про невласні інтеграли І роду наведені в лекції 14. Зауважимо, що при розгляді невласного інтеграла, насамперед, необхідно встановити, чи буде він збіжним. Питання про збіжність може бути вирішено або безпосереднім обчисленням невласного інтеграла, або за допомогою ознак збіжності.

Приклад 18.1. Обчислити інтеграл або довести його розбіжність: $\int\limits_1^{\infty} e^{-2x}dx$.

Розв'язання. Маємо згідно з п. 14.1. (лекція 14):

$$\int\limits_1^{\infty} e^{-2x}dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{b} e^{-2x}dx = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Bigg|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-2b} - \left(-\frac{1}{2}e^{-2}\right)\right) =$$

$$= \left\{-\frac{1}{2}e^{-2b} = -\frac{1}{2e^{2b}} \to 0,\ \textit{якщо}\ b \to +\infty\right\} = \frac{1}{2}e^{-2}.$$

Границя скінченна, отже, даний інтеграл збігається.

Приклад 18.2. Обчислити інтеграл або довести його розбіжність: $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{(4+x)^3}}$.

Розв'язання. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{(4+x)^3}} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b}\frac{dx}{\sqrt{(4+x)^3}} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b}(4+x)^{-3/2}dx =$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{(4+x)^{-1/2}}{-1/2}\Bigg|_0^b = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{2}{\sqrt{4+x}}\right)\Bigg|_0^b = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{2}{\sqrt{4+b}}+\frac{2}{\sqrt{4}}\right) =$$

$$= \left\{\frac{2}{\sqrt{4+b}} \to 0,\ \textit{якщо}\ b \to +\infty\right\} = 1.$$

Границя скінченна, отже, інтеграл збігається.

Приклад 18.3. Обчислити інтеграл або довести його розбіжність: $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{5+2x}$.

Розв'язання. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{5+2x} = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^{b} \frac{dx}{5+2x} = \lim\limits_{b\to\infty} \frac{1}{2} ln|5+2x|\Bigg|_1^b =$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2} ln|5+2b| - \frac{1}{2} ln\,7\right) = \{ln|5+2b| \to \infty,\ \textit{якщо}\ b \to \infty\} = \infty.$$

Границя нескінченна, отже, інтеграл розбігається.

Приклад 18.4. Обчислити інтеграл або довести його розбіжність:

$$\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{(3x+2)^5}.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{(3x+2)^5} = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{-1} \frac{dx}{(3x+2)^5} = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{-1}(3x+2)^{-5}dx = \lim_{a\to-\infty}\frac{(3x+2)^{-4}}{3\cdot(-4)}\Bigg|_a^{-1} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{12(3x+2)^4}\right)\Bigg|_a^{-1} = \lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{12(3\cdot(-1)+2)^4} - \left(-\frac{1}{12(3a+2)^4}\right)\right) = -\frac{1}{12}.$$

Границя скінченна, інтеграл збігається.

Приклад 18.5. Обчислити інтеграл або довести його розбіжність: $\int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x\,ln^3 x}$.

Розв'язання. $\int\limits_{e^2}^{\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_{e^2}^{b}\frac{dx}{x\ln^3 x}=\left|\begin{array}{l}\ln x=t\\ dx/x=dt\\ t_1=\ln e^2=2\\ t_2=\ln b\end{array}\right|=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_{2}^{\ln b}\frac{dt}{t^3}=$

$$=\lim_{b\to\infty}\int\limits_{2}^{\ln b}t^{-3}dt=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{t^{-2}}{-2}\right)\Bigg|_2^{\ln b}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2t^2}\right)\Bigg|_2^{\ln b}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2\ln^2 b}-\left(-\frac{1}{2\cdot 2^2}\right)\right)=$$

$$=\left\{-\frac{1}{2\ln^2 b}\to 0,\ \text{якщо } b\to\infty\right\}=\frac{1}{8}.$$

Границя скінченна, інтеграл збігається.

Приклад 18.6. Обчислити інтеграл або довести його розбіжність:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}.$$

Розв'язання. Маємо: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+5}+\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}=$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+5}++\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{dx}{x^2+2x+5}.$$

Обчислимо окремо невизначений інтеграл:

$$\int\frac{dx}{x^2+2x+5}=\int\frac{dx}{\left(x^2+2x+1\right)-1+5}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+4}=\frac{1}{2}\,arctg\,\frac{x+1}{2}+C.$$

Повертаємось до границь:

$$\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2}\Bigg|_a^0+\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2}\Bigg|_0^b=\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2}arctg\frac{1}{2}-\frac{1}{2}arctg\frac{a+1}{2}\right)+$$

$$+\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}arctg\frac{b+1}{2}-\frac{1}{2}arctg\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}arctg\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}arctg\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}+$$

$$+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

Отже, оскільки обидва інтеграли збігаються, то і заданий інтеграл теж збігається.

Приклад 18.7. Обчислити інтеграл або довести його розбіжність:

$\int\limits_{0}^{\infty} x\sin x dx$.

Розв'язання. Для знаходження даного інтеграла скористаємось формулою інтегрування частинами.

$$\int\limits_{0}^{\infty} x\sin x dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_{0}^{b} x\sin x dx = \begin{vmatrix} u = x, du = dx \\ dv = \sin x dx, v = -\cos x \end{vmatrix} = \lim_{b\to\infty}\left(-x\cos x\Big|_{0}^{b} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{0}^{b}\cos x dx \right) = \lim_{b\to\infty}\left(-b\cos b + 0 + \sin x\Big|_{0}^{b} \right) = \lim_{b\to\infty}\left(-b\cos b + \sin b \right).$$

Оскільки отримана границя не існує, то інтеграл розбігається.

Приклад 18.8. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_{a}^{\infty}\frac{dx}{x^p}$, $a > 0$.

Розв'язання. Розглянемо три випадки:

1) $p > 1$, тоді $\int\limits_{a}^{\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\int\limits_{a}^{b}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\int\limits_{a}^{b} x^{-p}dx = \lim_{b\to\infty}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_{a}^{b} = \frac{1}{-p+1}\times$

$\times\lim_{b\to\infty}\left(b^{-p+1} - a^{-p+1}\right) = \frac{1}{-p+1}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^{p-1}} - \frac{1}{a^{p-1}}\right) = \frac{1}{(p-1)a^{p-1}}$,

так як $p > 1$, то $p - 1 > 0$ і $\frac{1}{b^{p-1}} \to 0$ при $b \to \infty$. Таким чином при $p > 1$ інтеграл $\int\limits_{a}^{\infty}\frac{dx}{x^p}$ збігається і дорівнює $\frac{1}{(p-1)a^{p-1}}$.

2) $p < 1$, тоді $\int\limits_{a}^{\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\int\limits_{a}^{b}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\int\limits_{a}^{b} x^{-p}dx = \lim_{b\to\infty}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_{a}^{b} = \frac{1}{-p+1}\times$

$\times\lim_{b\to\infty}\left(b^{-p+1} - a^{-p+1}\right) = \infty$,

так як $p < 1$, то $-p + 1 > 0$ і $b^{-p+1} \to \infty$ при $b \to \infty$. Таким чином інтеграл $\int\limits_{a}^{\infty}\frac{dx}{x^p}$ розбігається.

3) $p = 1$, тоді $\int\limits_{a}^{\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\int\limits_{a}^{b}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\int\limits_{a}^{b}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\ln x\Big|_{a}^{b} = \lim_{b\to\infty}\left(\ln b - \ln a\right) = \infty$.

При $p = 1$ інтеграл $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^p}$ розбігається.

Приклад 18.9. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\sin 2x dx}{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 3}}$.

Розв'язання. Оскільки $\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 3} > \sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}}$, $|\sin 2x| \le 1$, то $0 \le \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 3}} \le \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}$.

Інтеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^{\frac{4}{3}}}$ – збігається, так як $p = \frac{4}{3} > 0$ (приклад 18.8).

Отже, за ознакою порівняння інтеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\sin 2x dx}{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 3}}$ також збігається.

Приклад 18.10. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^2}}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1 + x^2}}$ при $x \to \infty$ є нескінченно малою величиною порядку $\frac{1}{x^2}$. Вибираємо $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Оскільки інтеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2}(p = 2 > 1)$ збігається, то за ознакою порівняння в граничній формі (лекція 14, п. 14.2, теорема 2) маємо $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x\sqrt{1 + x^2}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = 1$.

Отже, інтеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^2}}$ збігається.

18.2. Невласні інтеграли від необмежених функцій (ІІ роду)

Основні поняття про невласні інтеграли ІІ роду наведені в лекції 14 (п. 14.3, 14.4).

Приклад 18.11. Обчислити інтеграл або установити його розбіжність: $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ не визначена у точці $x=2$, причому при $x\to 2$ функція $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ необмежено зростає. Таким чином, маємо невласний інтеграл від необмеженої функції.

За означенням (лекція 14, п. 14.3)) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{2-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} =$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^{2-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin\frac{2-\varepsilon}{2} - \arcsin 0\right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Границя скінченна, отже, інтеграл збігається.

Приклад 18.12. Дослідити на збіжність невласний інтеграл: $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $\frac{1}{(x-a)^\alpha}$ необмежена в околі точки $x=a$. На будь-якому ж відрізку $(a+\varepsilon, b]$ вона інтегрована, так як є неперервною функцією.

Розглянемо випадки:

а) $\alpha \neq 1$. За означенням невласного інтеграла маємо:

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{1-\alpha}\cdot (x-a)^{1-\alpha}\Big|_{a+\varepsilon}^b = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{\varepsilon\to 0}\left((b-a)^{1-\alpha} - \right.$$

$$\left. -\varepsilon^{1-\alpha}\right) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(b-a)^{1-\alpha}, \alpha<1, \textit{інтеграл збігається} \\ +\infty, \alpha>1, \textit{інтеграл розбігається} \end{cases}.$$

б) $\alpha = 1$. $\int\limits_a^b \frac{dx}{x-a} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-a} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} ln|x-a| \Big|_{a+\varepsilon}^{b} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} (ln(b-a) - ln\,\varepsilon) =$

$= +\infty$, інтеграл розбігається.

Зокрема, $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ при $\alpha < 1$ збігається; при $\alpha \ge 1$ розбігається.

Приклад 18.13. Обчислити інтеграл або установити його розбіжність: $\int\limits_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}} dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}$ необмежена в околі точки $x = 1$. Даний інтеграл є невласним, але можна помітити, що після заміни змінної у даному невласному інтегралі одержимо визначений інтеграл.

$$\int\limits_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}} dx = \left| \begin{array}{l} x-1 = t^2 \\ dx = 2tdt \\ t_1 = 0, t_2 = 1 \end{array} \right| = \int\limits_0^1 \frac{t^2+1-2}{t} \cdot 2tdt = 2\int\limits_0^1 (t^2-1)dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Big|_0^1 =$$

$$= 2\left(\frac{1}{3} - 1\right) = -\frac{4}{3}.$$

Отже, даний інтеграл збігається.

Приклад 18.14. Обчислити інтеграл або установити його розбіжність: $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{ln\,x}}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{ln\,x}}$ необмежена в околі точки $x = 1$. На будь-якому ж відрізку $[1+\varepsilon, e]$ вона інтегрована, так як є неперервною. Тому за означенням:

$$\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{ln\,x}} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{1+\varepsilon}^e \frac{dx}{x\sqrt{ln\,x}} = \left| \begin{array}{l} ln\,x = t \\ dx/x = dt \\ t_1 = ln(1+\varepsilon) \\ t_2 = ln\,e = 1 \end{array} \right| = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{ln(1+\varepsilon)}^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} 2\sqrt{t} \Big|_{ln(1+\varepsilon)}^1 =$$

$= \lim\limits_{\varepsilon \to 0} 2\left(\sqrt{1} - \sqrt{ln(1+\varepsilon)}\right) = 2$. Отже, даний інтеграл збігається.

Приклад 18.15. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}$ або установити його розбіжність.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3} = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$ не існує в точках $x = 1 \in [0;2]$ і $x = 3 \neq [0;2]$. При $x \to 1$ функція $f(x) \to \infty$. Отже, маємо:

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3} + \int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3} = \lim\limits_{e \to 0} \int\limits_0^{1-e} \frac{dx}{x^2 - 4x + 3} +$$

$$+ \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}.$$

Обчислюючи першу границю, отримаємо:

$$\lim\limits_{e \to 0} \int\limits_0^{1-e} \frac{dx}{x^2 - 4x + 3} = \lim\limits_{e \to 0} \int\limits_0^{1-e} \frac{dx}{(x^2 - 4x + 4) - 4 + 3} = \lim\limits_{e \to 0} \int\limits_0^{1-e} \frac{dx}{(x-2)^2 - 1} =$$

$$= \lim\limits_{e \to 0} \frac{1}{2} ln\left|\frac{x-2-1}{x-2+1}\right| \Bigg|_0^{1-e} = \frac{1}{2} \lim\limits_{e \to 0} ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right| \Bigg|_0^{1+e} = \frac{1}{2} \lim\limits_{e \to 0}\left(ln\left|\frac{-\varepsilon - 2}{-\varepsilon}\right| - ln 3\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim\limits_{e \to 0}\left(ln\left|1 + \frac{2}{\varepsilon}\right| - ln 3\right) = \infty.$$

Так як одержана границя нескінченна, то перший інтеграл розбігається. Другий інтеграл обчислювати не потрібно, бо на підставі означення (лекція 14, п. 14.3) невласний інтеграл розбігається, якщо принаймні один із інтегралів розбігається. Таким чином, вихідний інтеграл розбігається.

Приклад 18.16. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt[3]{1 - x^3}}$.

Розв'язання. $x = 1$ – особлива точка. Порівняємо даний інтеграл зі збіжним інтегралом $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} \left(\alpha = \frac{1}{3} < 1\right)$, тоді:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{\dfrac{e^x}{\sqrt[3]{1-x^3}}}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}}}=\lim_{x\to 1-0}\frac{e^x\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{1-x}\,\sqrt[3]{1+x+x^2}}=\lim_{x\to 1-0}\frac{e^x}{\sqrt[3]{1+x+x^2}}=\frac{e}{\sqrt[3]{3}}$$

Звідси випливає збіжність розглянутого інтеграла.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити невласні інтеграли або установити їх розбіжність:

а) $\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{3+2x}$. Відповідь: розбігається.

б) $\int\limits_1^{\infty}\frac{e^{4/x}}{x^2}dx$. Відповідь: $\frac{e^4-1}{4}$.

в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}arctg\frac{x}{3}dx$. Відповідь: розбігається.

г) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+18}$. Відповідь: $\frac{\pi}{3}$.

д) $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^2(x+1)}$. Відповідь: $1-ln2$.

є) $\int\limits_2^{3}\frac{dx}{\sqrt[4]{x^2-4}}$. Відповідь: $\frac{3}{2}\sqrt[4]{125}$.

ж) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}$. Відповідь: $14\frac{4}{7}$.

з) $\int\limits_1^{e}\frac{dx}{x\,ln^5x}$. Відповідь: розбігається.

і) $\int\limits_0^{\pi/2}sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$. Відповідь: розбігається.

2. Дослідити на збіжність невласні інтеграли:

а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{x^{13}dx}{\left(x^5+x^3+1\right)^3}$. Відповідь: збігається.

б) $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{arctg\,x}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}$. Відповідь: збігається.

в) $\int\limits_0^{1} \dfrac{cos^2\,xdx}{\left(1-x\right)^2}$. Відповідь: розбігається.

г) $\int\limits_0^{1} \dfrac{dx}{\sqrt{x}-sin\,x}$. Відповідь: збігається.

ЛЕКЦІЯ 15. ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА (ЧАСТИНА 1)

15.1. Площа плоскої фігури

15.1.1. Обчислення площі плоскої фігури у декартовій системі координат

1. Розглянемо криволінійну трапецію, обмежену відрізком $[a;b]$ на осі Ox, прямими $x=a$, $x=b$ і графіком неперервної невід'ємної функції $y=f(x)$ (рис. 15.1).

Площа такої трапеції дорівнює

$$S=\int\limits_a^b f(x)dx \ . \tag{15.1}$$

Доведення. Візьмемо будь-яке $x\in[a;b]$ та будемо вважати, що $S=S(x)$.

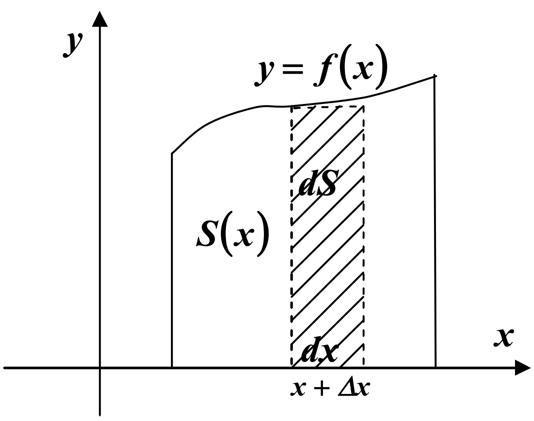


Рис. 15.1

Надамо аргументу x приріст $\Delta x=dx$ $\left(x+\Delta x\in[a;b]\right)$. При цьому функція $S=S(x)$ отримає приріст ΔS, який представляє собою площу елементарної криволінійної трапеції.

Диференціал площі ds – це головна частина приросту ΔS при $\Delta x\to 0$ він дорівнює площі прямокутника з основою dx та висотою y: $ds=ydx$.

Проінтегруємо останню рівність на відрізку $[a;b]$ і отримаємо:

$$S=\int_a^b ydx=\int_a^b f(x)dx.$$

2. Площа криволінійної трапеції, обмеженої відрізком $[a;b]$ на осі Ox, прямими $x=a$, $x=b$ і графіком неперервної недодатної функції $y=f(x)$, де $f(x)\le 0$, дорівнює:

$$S=-\int_a^b f(x)dx. \qquad (15.2)$$

Доведення. Розглянемо допоміжну функцію $y=-f(x)$ (рис. 15.2). Ця функція невід'ємна на $[a;b]$, а площа S_1 дорівнює площі S. Тоді, за попереднім висновком, маємо $S=\int_a^b -f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$.

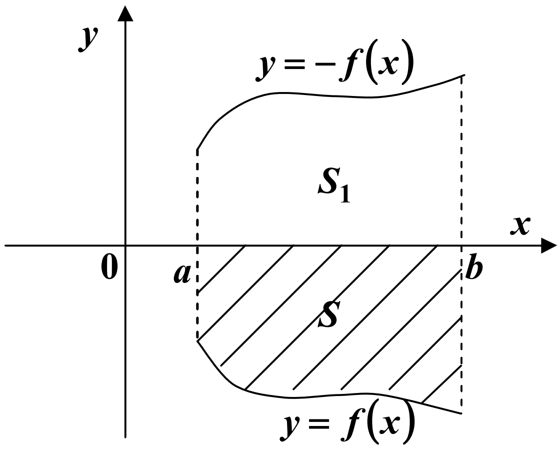


Рис. 15.2

3. Площа криволінійної трапеції, обмеженої відрізком $[c;d]$ на осі Oy, прямими $y=c$, $y=d$ і графіком неперервної невід'ємної функції $x=g(y)$ (рис. 15.3), дорівнює $S=\int_d^c g(y)dy$.

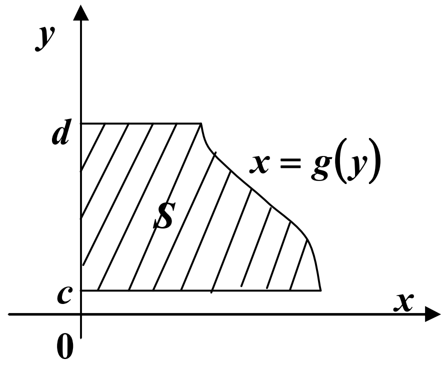


Рис. 15.3.

Доведення. Доведення проводиться аналогічно пункту 1 даного параграфа.

4. Площа плоскої фігури, обмеженої відрізком $[a;b]$ на осі Ox, прямими $x=a$, $x=b$ і графіком неперервної функції $y=f(x)$ (рис. 15.4), дорівнює:

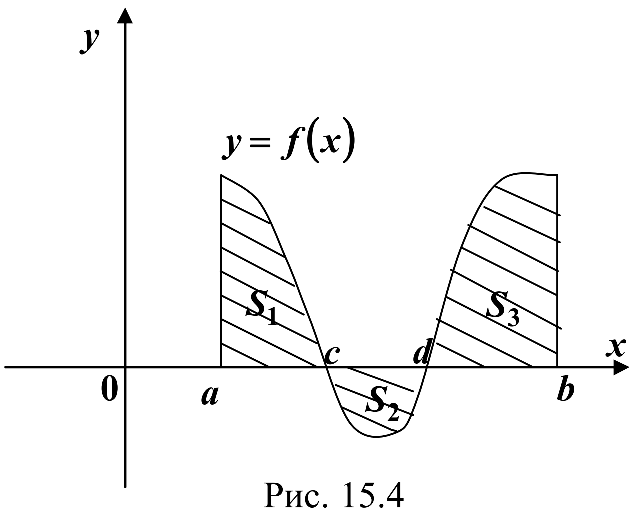


Рис. 15.4

$$S=\int_a^b |f(x)|dx. \qquad (15.3)$$

Доведення. Якщо знак функції $y=f(x)$ на відрізку $[a;b]$ змінюється, то можна цей відрізок розбити на декілька відрізків, на яких функція $f(x)$ буде зберігати певний знак, обчислити площу кожної з отриманих фігур S_1, S_2, S_3, а потім знайти площу всієї фігури за формулою $S=S_1+S_2+S_3$.

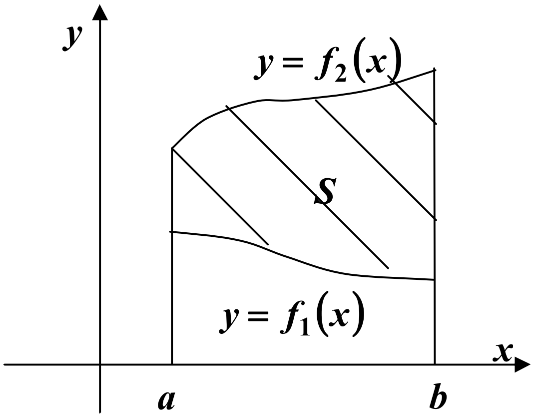


Рис. 15.5

5. Площа плоскої фігури, обмеженої прямими $x=a$, $x=b$ та графіками функцій $y=f_1(x)$ і $y=f_2(x)$ (рис. 15.5), дорівнює:

$$S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx. \qquad (15.4)$$

Доведення. Площу цієї фігури можна розглядати як різницю між площами S_2 та S_1, які обчислюються згідно з пунктом 1 цього параграфа.

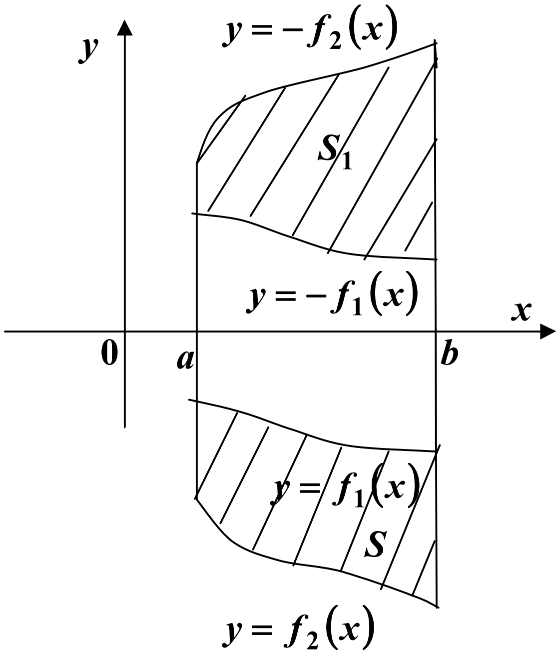


Рис. 15.6

6. Площа плоскої фігури, обмеженої прямими $x=a$, $x=b$ та графіками функцій $y=f_2(x)$, $y=f_1(x)$, де $f_2(x)<f_1(x)\le 0$ дорівнює

$$S=\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]dx. \qquad (15.5)$$

Доведення. Розглянемо допоміжні функції $y=-f_1(x)$; $y=-f_2(x)$ (рис.15.6). Отримаємо фігуру, площа якої дорівнює S_1 та обчислюється за формулою із п.5:

$$S_1=\int_a^b (-f_2(x)-(-f_1(x)))dx$$ або

$$S_1=\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]dx.$$

Але $S_1=S$, тому $S=\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]dx$.

7. Розглянемо фігуру, симетричну відносно осі Oy. Нехай вона обмежена лініями: прямими $x=-a$, $x=a$; кривою $y=f(x)$ та відрізком осі Ox (рис.15.7). Функція $y=f(x)$ є парною на $[-a;a]$.

Оскільки функція $y=f(x)$ парна, то її графік є симетричним відносно осі Oy. Таким чином, маємо дві однакові фігури з однаковими площами зліва та справа від осі Oy. Отже, достатньо знайти S_1 за формулою

$$S_1=\int_0^a f(x)dx$$,а тоді

$$S=2S_1=2\int_0^a f(x)dx. \qquad (15.6)$$

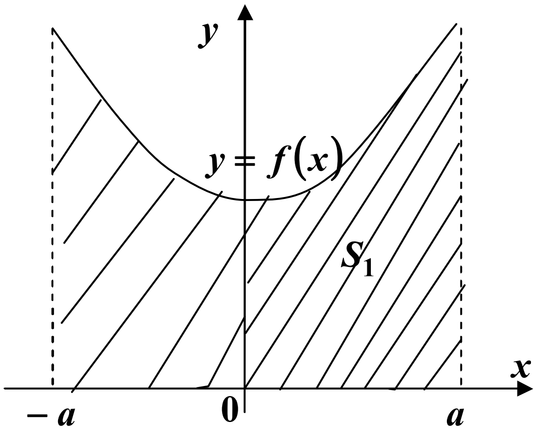


Рис. 15.7

8. Площа плоскої фігури, обмеженої прямими $y = c$, $y = d$ та графіками функцій $x = g_1(y)$ і $x = g_2(y)$ (рис. 15.8), обчислюється за формулою:

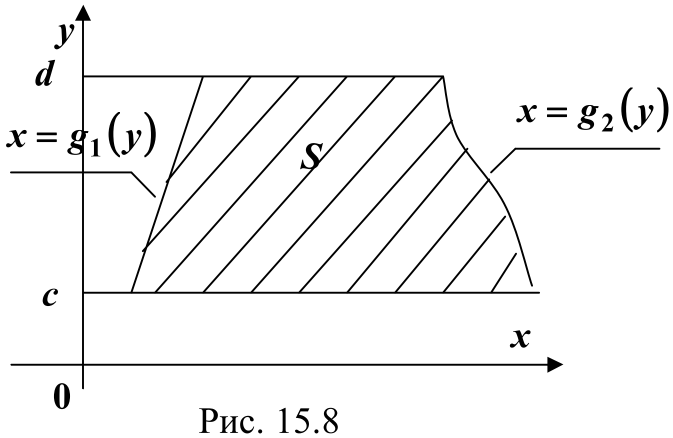


Рис. 15.8

$$S = \int_c^d [g_2(y) - g_1(y)]dy. \quad (15.7)$$

Ця формула отримана на основі пунктів 3 та 5 цього параграфа.

Приклад 15.1. Обчислити площу фігури, що обмежена лініями $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$.

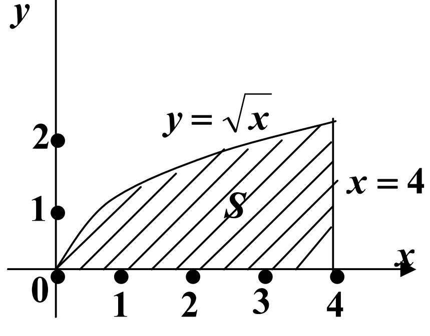


Рис. 15.9.

Розв'язання. $S = \int_a^b f(x)dx = \int_0^4 \sqrt{x}dx =$

$$\int_0^4 \sqrt{x}dx = \int_0^4 x^{1/2}dx = \frac{x^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^4 = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Bigg|_0^4 =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{4^3} = \frac{16}{3} \text{ (кв. од.)}$$

Приклад 15.2. Обчислити площу фігури, що обмежена лініями $y=-10+x^2$, $y=0$.

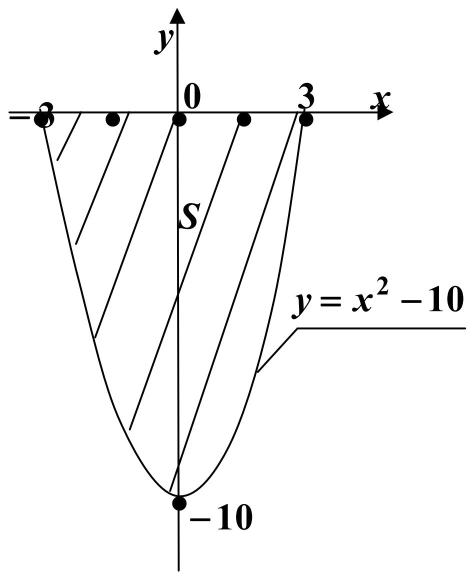


Рис. 15.10

Розв'язання. З рис. 15.10 видно, що фігура симетрична відносно осі Oy, тому можна знайти лише площу половини цієї фігури, що розташована правіше осі Oy, за формулою:

$$\frac{S}{2}=-\int_0^a f(x)dx.$$

Знайдемо точки перетину кривої $y=x^2-10$ та прямої $y=0$: $x^2-10=0 \Rightarrow x^2=10 \Rightarrow x=\pm\sqrt{10}$.

Отже, $\frac{S}{2}=-\int_0^{\sqrt{10}}(x^2-10)dx=\int_0^{\sqrt{10}}(10-x^2)dx=\left(10x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{10}}=10\sqrt{10}-.$

$-\frac{10\sqrt{10}}{3}=\frac{20\sqrt{10}}{3}$. Тоді $S=\frac{40\sqrt{10}}{3}$ (кв. од.)

Приклад 15.3. Обчислити площу фігури, що обмежена лініями $y=\cos x$, $y=0$, $x=0$, $x=\pi$.

Розв'язання. Фігура, площу якої треба знайти, представлена на рис. 15.11. Видно, що функція $y=\cos x$ на проміж- ку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ є додатньою, а на $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$ – від'ємною. Тому, для обчислення площі цієї фігури треба застосувати формулу

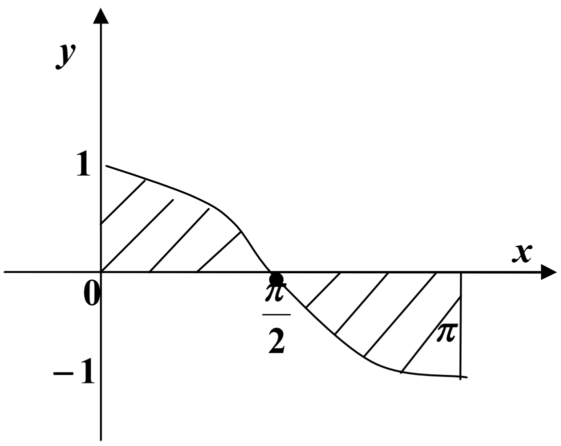


Рис.15.11

$$S=\int_a^b|f(x)|dx=\int_0^{\pi}|\cos x|dx.$$

Маємо: $|\cos x| = \begin{cases} \cos x, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ -\cos x, & \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$.

Отже, $\int\limits_0^{\pi} |\cos x|\, dx = \int\limits_0^{\pi/2} \cos x dx + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} -\cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \sin x \Big|_{\pi/2}^{\pi} =$

$= \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) - \left(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 0 - (0 - 1) = 2$ (кв. од.)

Приклад 15.4. Обчислити площу фігури, що обмежена лініями $y = e^x$, $y = -x^2$, $x = 0$, $x = 1$.

Розв'язання. Фігура представлена на рис. 15.12. Видно, що площу її треба обчислювати за формулою:

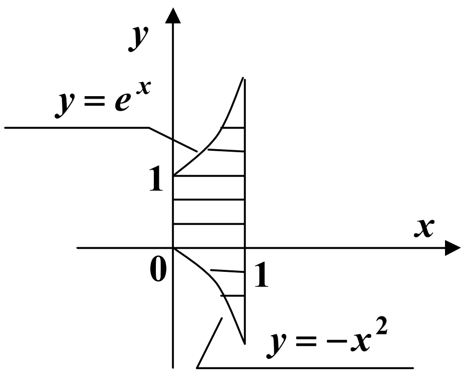


Рис. 15.12

$$S = \int\limits_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx = \int\limits_0^1 \left(e^x - \left(-x^2\right)\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(e^x + x^2\right)dx = \left(e^x + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \left(e + \frac{1}{3}\right) - \left(e^0 + 0\right) =$$

$$= e + \frac{1}{3} - 1 = e - \frac{2}{3} \text{ (кв. од.)}$$

Приклад 15.5. Обчислити площу фігури, що обмежена лініями $y^2 = 2x$, $y^2 = 6 - x$.

Розв'язання. Фігура представлена на рис. 15.13. За рисунком видно, що для обчислення площі цієї фігури доцільно застосовувати формулу $\frac{S}{2} = \int\limits_0^{\alpha} [g_2(y) - g_1(y)]dy$, враховуючи те, що фігура симетрична відносно осі Ox.

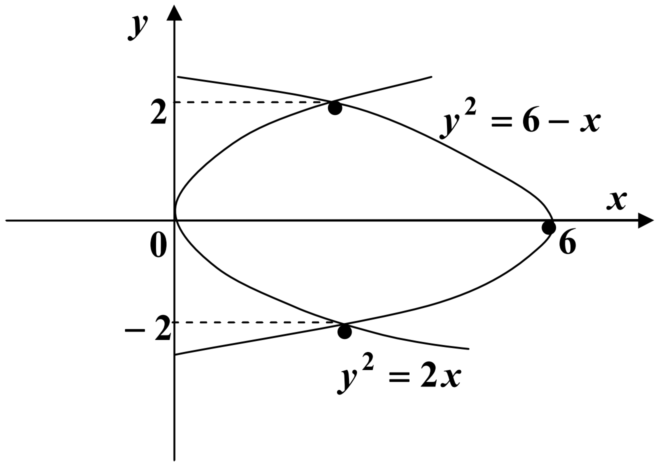


Рис.15.13

Знайдемо ординати точок перетину двох парабол:

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ y^2 = 6 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = {y^2}/{2} \\ x = 6 - y^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = 6 - y^2 \Rightarrow y^2 = 12 - 2y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y^2 = 12; \quad y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2.$$

Отже, $\dfrac{S}{2} = \int\limits_0^2 \left(6 - y^2 - \dfrac{y^2}{2}\right) dy = \int\limits_0^2 \left(6 - \dfrac{3}{2} y^2\right) dy = \left(6y - \dfrac{3}{2}\dfrac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 =$

$= \left(6y - \dfrac{y^3}{2}\right)\Bigg|_0^2 = 12 - \dfrac{8}{2} = 8$ (кв. од.)

15.1.2. Площа плоскої фігури, що обмежена лініями, рівняння яких задані в параметричній формі

Нехай плоска фігура обмежена прямими $x = a$, $x = b$, відрізком $[a;b]$ осі Ox та кривою $y = f(x)$, що задана у параметричному вигляді, а саме $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$. При цьому $t \in [\alpha;\beta]$ і $\varphi(\alpha) = a$, $\psi(\beta) = b$. Площа криволінійної трапеції у цьому випадку знаходиться за формулою

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Будемо вважати, що функції $x = \varphi(t)$ і $y = \psi(t)$ неперервні, які мають на відрізку$[\alpha;\beta]$ неперервні похідні x'_t та y'_t. Зробимо заміну змінної у останньому інтегралі: $x = \varphi(t)$; $dx = \varphi'(t)dt$.

Тоді треба замінити і границі: при $x = a \quad \Rightarrow \quad t = \alpha$,

при $x = b \quad \Rightarrow \quad t = \beta$.

Остаточно отримаємо:

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\varphi'(t)\,dt. \tag{15.8}$$

Аналогічно можна отримати формулу, коли криволінійна трапеція прилягає до осі Oy.

Приклад 15.6. Обчислити площу фігури, що обмежена еліпсом:

$x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

Розв'язання. Оскільки еліпс – симетрична фігура відносно осей Ox та Oy (рис. 15.14), достатньо знайти площу тієї його частини, що розташована у першій чверті.

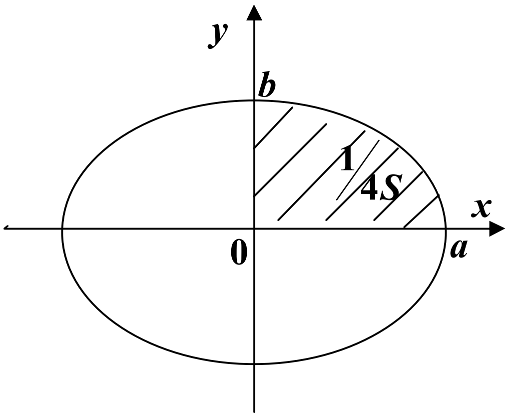


Рис. 15.14

Ця площа буде складати $\frac{1}{4}$ від всієї площі еліпса. У першій чверті x змінюється від 0 до a, а t змінюється від $\frac{\pi}{2}$ до 0. Отже, $\frac{S}{4}=\int_{\pi/2}^{0} b\sin t\cdot(a\cos t)'\,dt=$

$$=\int_{\pi/2}^{0} b\sin t(-a\sin t)\,dt=-\int_{\pi/2}^{0} ab\sin^2 t\,dt=$$

$$=ab\int_{0}^{\pi/2}\sin^2 t\,dt=\frac{ab}{2}\int_{0}^{\pi/2}(1-\cos 2t)\,dt=\frac{ab}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{0}^{\pi/2}=$$

$$=\frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)==\frac{\pi ab}{4}.$$

Тоді, $S=\pi ab$ (кв. од.)

15.1.3. Обчислення площі криволінійної трапеції в полярних координатах

Нехай в полярній системі координат на відрізку $[\alpha,\beta]$ задана неперервна функція $\rho=f(\varphi)$. Потрібно визначити площу ***криволінійного сектора***, обмеженого промінями $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ і графіком функції $\rho=f(\varphi)$ (рис. 15.15).

Сегмент $[\alpha;\beta]$ розіб'ємо на частинні сегменти точками розподілу $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < ... < \varphi_n = \beta$ і довжини отриманих сегментів позначимо $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, ..., \Delta\varphi_n$. Через точки розподілу проведемо промені, внаслідок чого весь криволінійний сектор буде поданий у вигляді суми часткових криволінійних секторів. У кожному частинному секторі виберемо будь-яким чином проміжні точки $c_1, c_2, ..., c_n$ і обчислимо значення функції у цих точках: $f(c_1); f(c_2), ..., f(c_n)$. Кожен криволінійний сектор замінимо круговим сектором з центральним кутом $\Delta\varphi_i$ і радіусом, що дорівнює значенню функції в проміжній точці. Обчислимо суму S_n площ кругових секторів, що приблизно дорівнює площі S криволінійного сектора.

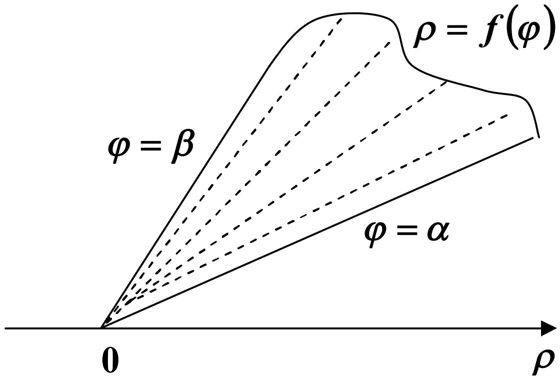


Рис. 15.15

$$S \approx S_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f^2(c_i)\Delta\varphi_i .$$

Дана сума є інтегральною сумою. Якщо необмежено збільшити кількість точок розбиття і, таким чином, отримати, що величина кожного частинного сегменту прямує до нуля $(\lambda \to 0)$, то буде слушною рівність:

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f^2(c_i)\Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)d\varphi, \text{ де } \lambda = \max \Delta\varphi_i,\ 1 \le i \le n .$$

Таким чином, площа криволінійного сектора у полярній системі координат дорівнює:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)d\varphi . \qquad (15.9)$$

Приклад 15.7. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції $\rho = a\cos 3\varphi$.

Розв'язання. Графіком цієї функції є "трипелюсткова роза" (рис. 15.16), яка має три однакові пелюстки, що є симетричними.

Тому достатньо обчислити площу половини одного пелюстка, що є однією шостою площі всієї фігури:

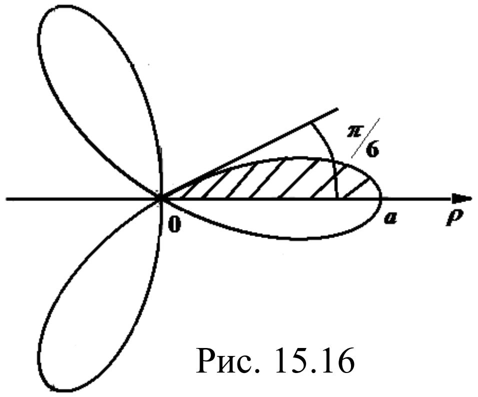


Рис. 15.16

$$\frac{S}{6}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/6}(a\cos 3\varphi)^2 d\varphi=\frac{1}{2}a^2\int_0^{\pi/6}\cos^2 3\varphi\, d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}a^2\int_0^{\pi/6}\frac{1+\cos 6\varphi}{2}d\varphi=\frac{1}{2}a^2\left(\frac{1}{2}\varphi+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{12}\sin 6\varphi\right)\Big|_0^{\pi/6}=\frac{1}{2}a^2\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{6}+\frac{1}{12}\sin\pi\right)=$$

$$=\frac{\pi a^2}{24}.$$

Отже, $S=\dfrac{\pi a^2}{4}$ (кв. од.)

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 19. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА (ЧАСТИНА 1)

19.1. Обчислення площі плоскої фігури

Приклад 19.1. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

а) $y=4-x^2$, $y=0$;

б) $y=2^x$, $y=8$, $x=1$, $x=2$;

в) $y=2x-x^2$, $x+y=0$;

г) $y=\dfrac{4}{x}$, $y=4x$, $y=0$, $x=4$.

Розвя'зання. а) Фігура обмежена параболою $y=4-x^2$ і віссю Ox (рис.19.1). Так як парабола симетрична відносно осі Oy, то знайдемо половину площі і подвоємо результат.

Площу даної фігури обчислюємо за формулою (15.1):

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

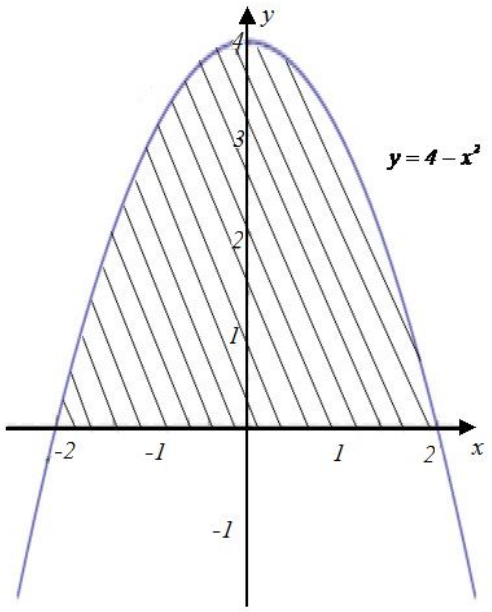


Рис. 19.1

$$\frac{1}{2}S=\int_0^2\left(4-x^2\right)dx=\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=8-\frac{8}{3}=$$

$$=\frac{24-8}{3}=\frac{16}{3}\ \text{(кв. од.)}$$

$$S=\frac{16}{3}\cdot 2=\frac{32}{3}\ \text{(кв. од.)}$$

б) Побудуємо дані лінії і визначимо фігуру, площу якої треба знайти (рис.19.2).

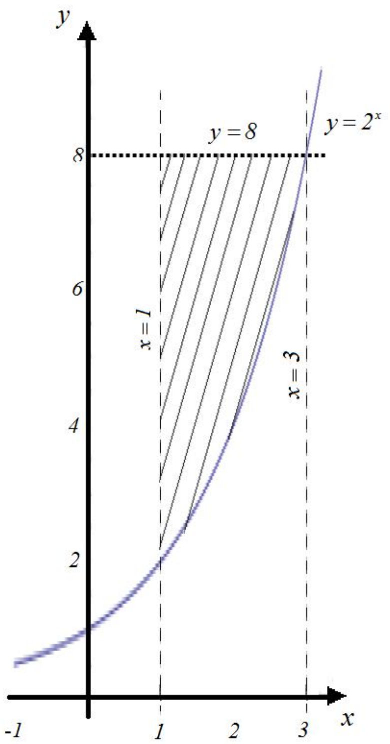


Рис. 19.2

Площу даної фігури обчислюємо за формулою (15.4):

$$S=\int_a^b\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx\,.$$

$$S=\int_1^2\left(8-2x\right)dx=\left(8x-\frac{2^x}{ln\,2}\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=\left(8\cdot 2-\frac{2^2}{ln\,2}-8+\frac{2}{ln\,2}\right)=8-\frac{2}{ln\,2}\ \text{(кв. од.)}$$

в) Побудуємо фігуру, площу якої треба знайти (рис.19.3). Рівняння $y=2x-x^2$ визначає параболу, а рівняння $x+y=0$ пряму лінію.

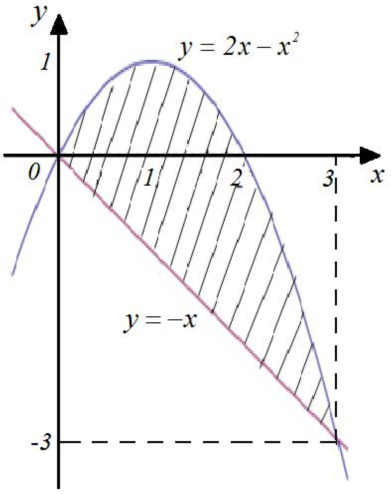


Рис. 19.3

Канонічне рівняння параболи $y-1=-(x-1)^2$, $(1;1)$ – вершина параболи. Знайдемо точки перетину параболи і прямої. Для чого розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y=2x-x^2, \\ x+y=0, \end{cases} \Leftrightarrow \quad 2x-x^2=-x \quad \Leftrightarrow \quad ,$$

$$x^2-3x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-3)=0 \;\; x=0,\; x=3.$$

Точки перетину параболи і прямої: $(0;0)$; $(3;-3)$.

Знайдемо площу фігури, використовуючи формулу (15.4).

$$S=\int_0^3\left(2x-x^2-(-x)\right)dx=\int_0^3\left(3x-x^2\right)dx=\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3=\frac{3\cdot 9}{2}-\frac{27}{3}=13{,}5-$$

$-9=4{,}5$ (кв. од._

г) Побудуємо дані лінії (рис. 19.4). Знайдемо точки перетину гіперболи $y=\frac{4}{x}$ з прямою $y=4x$:

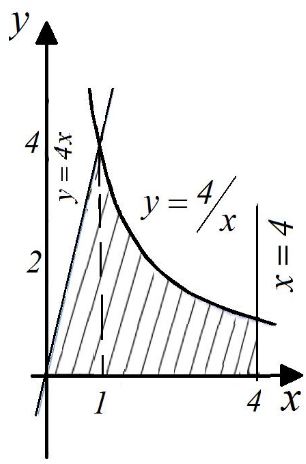


Рис. 19.4

$$\begin{cases} y=\frac{4}{x}, \\ y=4x; \end{cases} \quad \frac{4}{x}=x, \quad 4x^2=4, \quad x^2=1, \quad x=\pm 1.$$

Як бачимо, фігура розташована у І чверті, тому оберемо $x=1$. На відрізку $[0;4]$ фігура зверху обмежена спочатку графіком функції $y=4x(a\le x\le 1)$, а потім графіком $y=\frac{4}{x}$ $(1\le x\le 4)$. Тому площу всієї фігури знайдемо як суму двох площ, кожну з яких обчислюємо за формулою (15.1):

$$S_1=\int_0^1 4x\,dx=\frac{4x^2}{2}\Bigg|_0^1=2 \text{ (кв. од.)}$$

$$S_2=\int_1^4\frac{4}{x}dx=4\,ln|x|\Bigg|_1^4=4\,ln4-4\,ln1=4\,ln4 \text{ (кв. од.)}$$

$S = S_1 + S_2 = 2 + 4\,ln 4 = 2(1 + 4\,ln 2)$ (кв. од.)

Приклад 19.2. Знайти площу фігури, обмеженої однією аркою циклоїди $x = a(t - sin\,t)$, $y = a(1 - cos\,t)$, $a > 0$ і віссю Ox.

Розвя'зання. Знайдемо точки перетину циклоїди з віссю Ox. Якщо $y = 0$, то $cos\,t = 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$ (для однієї арки циклоїди), $x(0) = 0$, $x(2\pi) = 2\pi\,a$. Криву зображено на рис 19.5.

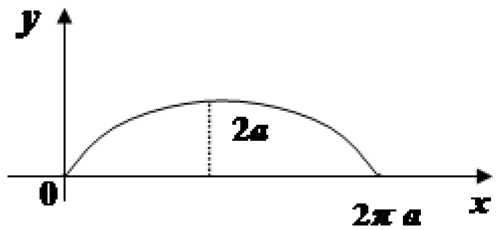


Рис. 19.5

Площу фігури знаходимо за формулою (15.8).

$$S = \int_0^{2\pi} y(t)x'(t)dt = \int_0^{2\pi} a(1 - cos\,t)\cdot a(1 - xost)dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - cos\,t)^2\,dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2cos\,t + cos^2\,t\right)dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2t + \frac{1 + cos\,2t}{2}\right)dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2cos\,t + \frac{1}{2}cos\,2t\right)dt = a^2\left(\frac{3}{2}t - 2\,sin\,t + \frac{1}{4}sin\,2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= a^2\left(\frac{3}{2}\cdot 2\pi - 2\,sin\,2\pi + \frac{1}{4}sin\,4\pi - \frac{3}{2}\cdot 0 + 2\,sin\,0 - \frac{1}{4}sin\,0\right) = 3\pi a^2 \text{ (кв. од.)}$$

Приклад 19.3. Знайти площу, обмежену кардіоїдою $\rho = a(1 + cos\,\varphi)$.

Розвя'зання. Криву $\rho = a(1 + cos\,\varphi)$ зображено на рис 19.6.

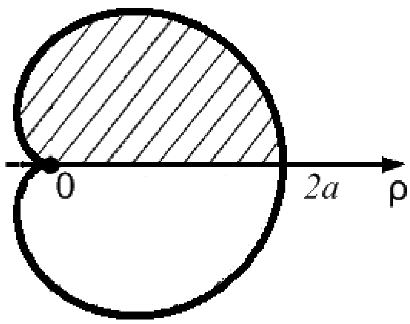


Рис. 19.6

Враховуючи симетрію фігури відносно полярної осі, знайдемо половину шуканої площі. Прослідкуємо, як змінюється кут φ, коли радіус-вектор описує цю площу.

При $\varphi = 0$, $\rho = a(1 + cos\,0) = 2a$.

Нехай $\rho = 0$, тоді $a(1 + cos\varphi) = 0$, $cos\varphi = -1$, $\varphi = \pi$.

За формулою (15.9):

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1 + cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2}a^2\int_0^{\pi}\left(1 + 2cos\varphi + cos^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}a^2\int_0^{\pi}\left(1 + 2cos\varphi + \frac{1 + cos2\varphi}{2}\right)d\varphi = \frac{1}{2}a^2\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2} + 2cos\varphi + \frac{cos2\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}a^2\left(\frac{3}{2}\varphi + 2sin\varphi + \frac{sin2\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{2}a^2\left(\frac{3}{2}\pi + 2sin\pi + \frac{sin2\pi}{4} - 0\right) = \frac{3}{4}\pi a^2 \text{ (кв. од.)}$$

$$S = 2\cdot\frac{3}{4}\pi a^2 = \frac{3}{2}\pi a^2 \text{ (кв. од.)}$$

Приклад 19.4. Обчислити площу, обмежену лемніскатою Бернуллі $\rho^2 = 2a^2 cos2\varphi$.

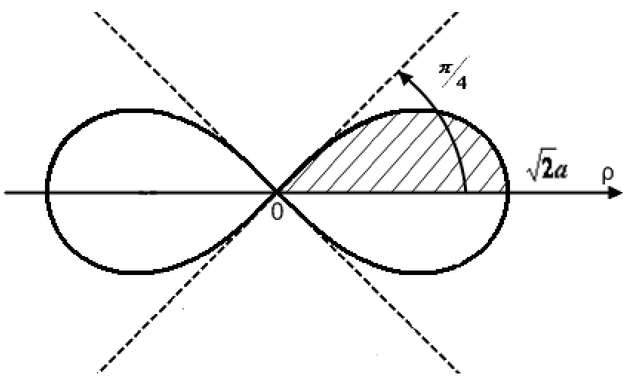


Рис. 19.7

Розв'язання. Криву зображено на рис.19.7. Прослідкуємо, як змі-нюється кут φ, коли радіус-вектор точки на лемніскаті описує чверть шуканої площі.

При $\varphi = 0$, $\rho = a\sqrt{2}$. Визначимо, чому дорівнює кут φ, коли радіус-вектор дорівнюватиме 0.

Підставляючи $\rho = 0$ в рівняння кривої, отримаємо: $2a^2 cos2\varphi = 0$, $cos2\varphi = 0$, $2\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, звідки $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Таким чином, на чверті площі полярний кут змінюється в межах від 0 до $\dfrac{\pi}{4}$. Тоді за формулою (15.9):

$$\frac{S}{4}=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/4}2a^2\cos 2\varphi\, d\varphi = a^2\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi\left|_{0}^{\frac{\pi}{4}}\right.=\frac{a^2}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=\frac{a^2}{2}.$$

Вся площа $S=4\cdot\frac{a^2}{2}=2a^2$ кв. од.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

а) $y=\sqrt{x}$, $y=3$, $x=1$, $x=4$;

б) $y=x^2+2x$, $y=x+2$;

в) $y=x=8-y^2$, $x=y^2$;

г) $xy=3$, $x+y=4$.

2. Знайти площу фігури, обмеженої:

а) астроїдою $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$;

б) кардіоїдою $x=a(2\cos t-\cos 2t)$, $y=a(2\sin t-\sin 2t)$.

3. Знайти площу фігури, обмеженої:

а) двопелюстковою розою $\rho=a\sin 2\varphi$;

б) п'ятипелюстковою розою $\rho=a\cos 5\varphi$;

в) лініями $\rho=4\cos^3\varphi$, $\rho=2(\rho\ge 2)$.

ЛЕКЦІЯ 16. ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА (ЧАСТИНА 2)

16.1. Довжина дуги кривої

16.1.1. Обчислення довжини дуги у декартовій системі координат

Нехай в декартовій системі координат на площині задана неперервна на $[a;b]$ крива рівнянням $y=f(x)$, що має на $[a;b]$ неперервну похідну.

Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на часткові відрізки точками розподілу: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Через ці точки проведемо вертикальні прямі і за їх допомогою дугу AB розіб'ємо на часткові дуги точками $M_1, M_2, ..., M_{n-1}$.

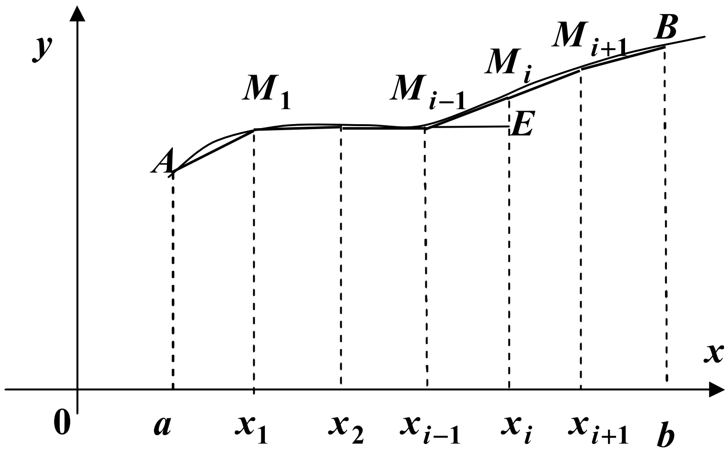


Рис. 16.1

У кожну дугу впишемо хорду, що сполучає кінці дуги, завдяки чому одержимо ламану $AM_1M_2...M_{n-1}B$. Позначимо довжини часткових дуг відповідно $\Delta l_1, \Delta l_2, ..., \Delta l_n$. Тоді довжина ламаної $l_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta l_i$.

Означення. Довжиною l дуги AB називається границя, до якої прямує довжина вписаної в неї ламаної, якщо число ланок ламаної необмежено збільшується, а довжина її найбільшої ланки прямує до нуля, тобто,

$$l = \lim_{\Delta l \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i , \quad \Delta l = \max \Delta l_i , \ 1 \le i \le n .$$

Розглянемо одну ланку ламаної. З точки M_{i-1} проведемо відрізок $M_{i-1}E = \Delta x_i$ паралельно осі Ox. Введемо позначення $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$, де $i = 1,2,...n$. З прямокутного трикутника $M_{i-1}M_iE$ випливає, що

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i .$$

Розглянемо відношення: $\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$.

Функція $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$ задовольняє умовам теореми Лагранжа, звідки

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f'(c_i)(x_i - x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(c_i), \text{ де } c_i \in (x_{i-1}; x_i).$$

Тепер довжину ламаної можна подати у вигляді $l_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \Delta x_i$, де записана сума є інтегральною сумою. Отже, довжина дуги AB може бути знайдена як границя інтегральної суми $l = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \Delta x_i =$ $= \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$.

Таким чином, довжина дуги кривої $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ обчислюється за формулою:

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \qquad (16.1)$$

Приклад 16.1. Знайти довжину дуги кривої, що задана рівнянням $y = ln(cos\, x)$, де $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

Розв'язання. $y' = \frac{1}{cos\, x}(-sin\, x) = -tgx$.

Отримаємо: $l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int\limits_0^{\pi/3} \sqrt{1 + tg^2}\, dx = \int\limits_0^{\pi/3} \frac{dx}{cos\, x} =$

$$= ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\Bigg|_0^{\pi/3} = ln\left|tg\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - ln\, tg\frac{\pi}{4} = ln\, tg\frac{5\pi}{12} \text{ (лін. од.)}$$

16.1.2. Обчислення довжини дуги кривої, що задана у параметричній формі

Нехай крива задана у параметричній формі: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ де $t \in [\alpha; \beta]$.

$\varphi(t)$, $\psi(t)$ – диференційовані на відрізку $[\alpha;\beta]$ функції і мають на ньому неперервні в $[\alpha;\beta]$ похідні $\varphi'(t)$ та $\psi'(t)$, причому $\varphi'(t)\neq 0$. За цих умов існує похідна $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

Скористаємось формулою з попереднього пункту: $l=\int\limits_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

Розглянемо $\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=\sqrt{\left[1+(f'(x))^2\right](dx)^2}=\sqrt{(dx)^2+(f'(x)dx)^2}=$
$=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$.

Оскільки $x=\varphi(t)$; $y=\psi(t)$, то $dx=\varphi'(t)dt$, $dy=\psi'(t)dt$.

Тоді, $l=\int\limits_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt$.

Отже, для параметрично заданої кривої довжина дуги кривої обчислюється за формулою:

$$l=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt. \qquad (16.2)$$

Приклад 16.2. Знайти довжину дуги кривої, що задана рівнянням
$\begin{cases}x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t\\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t\end{cases}$, де $t\in[0;2\pi]$.

Розв'язання. $x'=2t\sin t+(t^2-2)\cos t+2\cos t-2t\sin t=(t^2-2+2)\cos t=$
$=t^2\cos t$;

$y'=-2t\cos t+(2-t^2)(-\sin t)+2t\cos t+2\sin t=(2-t^2)(-\sin t)+2\sin t=$
$=\sin t(t^2-2+2)=t^2\sin t$.

Отже, $l=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{(t^2\cos t)^2+(t^2\sin t)^2}\,dt=$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{t^4\cos^2 t+t^4\sin^2 t}\,dt=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{t^4(\cos^2 t+\sin^2 t)}\,dt=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{t^4}\,dt=\int\limits_0^{2\pi}t^2dt=\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{2\pi}=$$

$=\dfrac{8\pi^3}{3}$ (лін. од.)

16.1.3. Обчислення довжини дуги кривої, заданої у полярній системі координат

Нехай неперервна крива $\rho = f(\varphi)$ задана у полярній системі координат, де $\varphi \in [\alpha ; \beta]$.

Скористаємось формулами, що пов'язують декартові і полярні координати: $\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = f(\varphi)\cos\varphi \\ y = f(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$, тобто, ці формули можна розглядати, як функцію, задану параметрично.

Тоді маємо: $l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\Big(\big(f(\varphi)\cos\varphi\big)'\Big)^2 + \Big(\big(f(\varphi)\sin t\big)'\Big)^2}\, dt$.

Спростимо останній вираз:

$\big(f(\varphi)\cos\varphi\big)' = f'(\varphi)\cos\varphi - f(\varphi)\sin\varphi$;

$\big(f(\varphi)\sin\varphi\big)' = f'(\varphi)\sin\varphi + f(\varphi)\cos\varphi$;

$\Big[\big(f(\varphi)\cos\varphi\big)'\Big]^2 = \big(f'(\varphi)\cos\varphi - f(\varphi)\sin\varphi\big)^2 = \big(f'(\varphi)\big)^2 \cdot \cos^2\varphi - 2f'(\varphi)\times$

$\times f(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi + f^2(\varphi)\sin^2\varphi$;

$\Big[\big(f(\varphi)\sin\varphi\big)'\Big]^2 = \big(f'(\varphi)\sin\varphi + f(\varphi)\cos\varphi\big)^2 = \big(f'(\varphi)\big)^2 \cdot \sin^2\varphi + 2f'(\varphi)\times$

$\times f(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi + f^2(\varphi)\cos^2\varphi$;

$\Big[\big(f(\varphi)\cos\varphi\big)'\Big]^2 + \Big[\big(f(\varphi)\sin\varphi\big)'\Big]^2 = \big(f'(\varphi)\big)^2 \cdot \cos^2\varphi - 2f'(\varphi)f(\varphi)\cos\varphi\times$

$\times\sin\varphi + f^2(\varphi)\sin^2\varphi + \big(f'(\varphi)\big)^2\sin^2\varphi + 2f'(\varphi)f(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi + f^2(\varphi)\cos^2\varphi =$

$= \big(f'(\varphi)\big)^2\big(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\big) + \big(f(\varphi)\big)^2\big(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\big) = \big(f'(\varphi)\big)^2 + \big(f(\varphi)\big)^2$.

Остаточно маємо формулу:

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\big(f'(\varphi)\big)^2 + \big(f(\phi)\big)^2}\, d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}\, d\varphi . \qquad (16.3)$$

Приклад 16.3. Знайти довжину дуги кривої, що задана рівнянням $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$ $(a > 0)$.

Розв'язання. Необхідно з'ясувати, яких значень набуває φ. Будемо виходити з припущення, що $sin^3\dfrac{\varphi}{3} \geq 0$, тоді $sin\dfrac{\varphi}{3} \geq 0$.

$$2\pi n \leq \frac{\varphi}{3} \leq \pi + 2\pi n, \qquad 6\pi n \leq \varphi \leq 3\pi + 6\pi n.$$

Будемо розглядати $\varphi \in [0;3\pi]$.

Застосуємо формулу $l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}\, d\varphi$.

$$\begin{cases} \rho = a\, sin^3\dfrac{\varphi}{3}, \\ \rho' = 3a\, sin^2\dfrac{\varphi}{3} cos\dfrac{\varphi}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = a\, sin^2\dfrac{\varphi}{3} cos\dfrac{\varphi}{3}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho^2 = a^2\, sin^6\dfrac{\varphi}{3}, \\ (\rho')^2 = a^2\, sin^4\dfrac{\varphi}{3} cos^2\dfrac{\varphi}{3}, \end{cases}$$

тоді $$l = \int\limits_0^{3\pi} \sqrt{a^2\, sin^6\frac{\varphi}{3} + a^2\, sin^4\frac{\varphi}{3} cos^2\frac{\varphi}{3}}\, d\varphi = a\int\limits_0^{3\pi} \sqrt{sin^4\frac{\varphi}{3}\left(sin^2\frac{\varphi}{3} + cos^2\frac{\varphi}{3}\right)}\, d\varphi =$$

$$= a\int\limits_0^{3\pi} \sqrt{sin^4\frac{\varphi}{3}}\, d\varphi = a\int\limits_0^{3\pi} sin^2\frac{\varphi}{3}\, d\varphi = a\int\limits_0^{3\pi} \frac{1 - cos\dfrac{2\varphi}{3}}{2}\, d\varphi = \frac{a}{2}\left(\varphi - \frac{3}{2} sin\frac{2\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{3\pi} =$$

$$= \frac{a}{2}\left(3\pi - \frac{3}{2} sin 2\pi\right) = \frac{3a\pi}{2} \text{ (лін. од.)}$$

16.2. Об'єм тіла обертання

16.2.1. Обчислення об'єму тіла за площею паралельних перетинів

Нехай є деяке тіло V у просторі, а також відомі площі S поперечних перетинів цього тіла площинами, перпендикулярними деякій осі, наприклад, осі Ox: $S = S(x)$; $x \in [a;b]$.

Задача полягає в обчисленні об'єму тіла V.

Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ точками розподілу $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ на часткові відрізки і через точки розподілу проведемо січні площини, що мають рівняння $x = x_0, x = x_1, ..., x = x_n$. Ці площини розбивають усе тіло V на "елементарні" слої. У кожному з частинних відрізків $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$, виберемо довільним чином точки $c_1, c_2, ..., c_n$. Кожен частинний шар довільної форми замінимо на циліндрове тіло, твірні якого паралельні осі Ox, а направляюча співпадає з контуром перетину тіла площиною $x = c_i \left(i = 1,2,..,n\right)$. Об'єм такого тіла може бути знайдений за формулою $S\left(c_i\right) \Delta x_i \left(i = 1,2,...,n\right)$, а їх сума має вигляд $V_n = \sum_{i=1}^{n} S\left(c_i\right) \Delta x_i$.

При $n \to \infty$ об'єм V заданого тіла є границею інтегральної суми V_n:

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} S\left(c_i\right) \Delta x_i = \int_a^b S\left(x\right) dx, \text{ або } V = \int_a^b S\left(x\right) dx.$$

16.2.2. Об'єм тіла обертання

Розглянемо деяку криволінійну трапецію в декартовій системі координат, що обмежена прямими $x = a$, $x = b$, відрізком осі Ox та графіком функції $y = f\left(x\right)$. Будемо обертати цю трапецію навколо осі Ox і отримаємо тіло у просторі. Треба обчислити об'єм цього тіла.

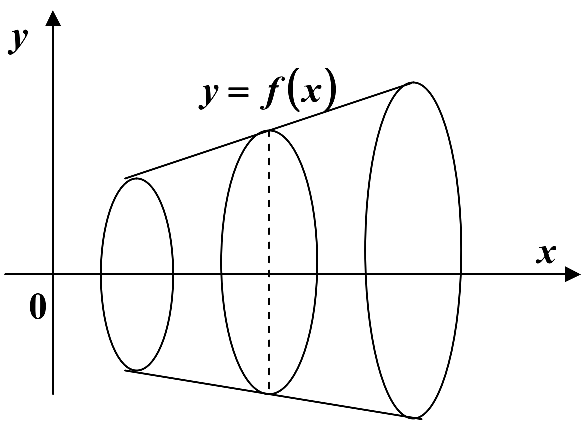


Рис. 16.2

Переріз цього тіла площиною, що перпендикулярна осі Ox і проведена через довільну точку x осі Ox $\left(x \in \left[a;b\right]\right)$, є коло з радіусом $y = f\left(x\right)$. Це означає, що $S\left(x\right) = \pi y^2$.

Тоді,

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx. \qquad (16.4)$$

Приклад 16.4. Обчислити об'єм тіла, отриманого обертанням плоскої фігури, що обмежена лініями $y = x^2 + 1$, $y = x$, $x = 1$, $x = 3$, навколо осі Ox.

Розв'язання. $V_{Ox} = \pi \int_1^3 \left[f_2^2\left(x\right) - f_1^2\left(x\right)\right] dx = \pi \int_1^3 \left[\left(x^2 + 1\right)^2 - \left(x\right)^2\right] dx =$

$$= \pi\int_1^3 \left(x^4 + 2x^2 + 1 - x^2\right)dx = \pi\int_1^3 \left(x^4 + x^2 + 1\right)dx = \pi\left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= \pi\left[\left(\frac{243}{5} + \frac{27}{3} + 3\right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 1\right)\right] = \pi\,\frac{729 + 135 + 75 - 3 - 5 - 15}{15} = \frac{886\pi}{15}$$ (куб. од).

16.3. Площа поверхні тіла обертання

Розглянемо криволінійну трапецію, що обмежена лініями $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$. Функція $y = f(x)$ неперервна і має неперервну похідну на $[a;b]$.

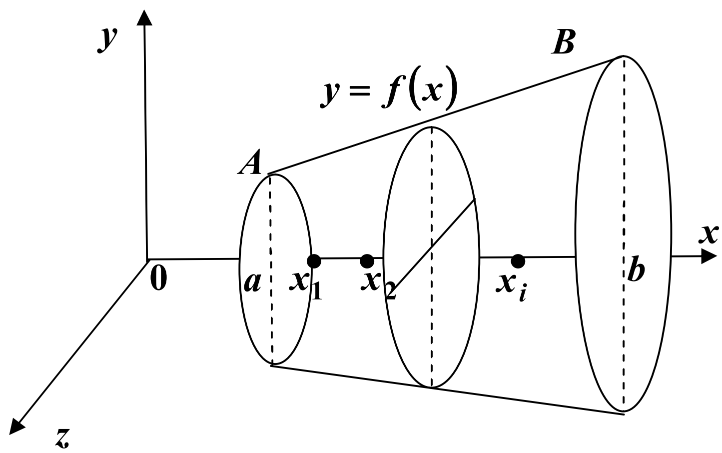


Рис. 16.3

Будемо обертати цю трапецію навколо осі Ox та отримаємо тіло у просторі, площу поверхні якого треба визначити. Розіб’ємо відрізок $[a;b]$ точками розподілу $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ на частинні відрізки з відповідними довжинами $\Delta x_1; \Delta x_2; ...; \Delta x_n$.

Через точки розподілу проведемо паралельні осі Oy прямі, які дугу AB розіб’ють на частинні дуги. У кожну частинну дугу впишемо хорду. Кожна хорда при обертанні утворює конус, площу поверхні якого можна знайти за формулою:

$$\Delta P_i = 2\pi\,\frac{y_{i-1} + y_i}{2}\,\Delta l_i \quad (i = 1,2,...,n),$$

де Δl_i – довжина частинної хорди.

З пункту 16.1.1 маємо:

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\,\Delta x_i, \quad c_i \in [x_{i-1}; x_i].$$

Площа поверхні, яку утворює при обертанні вся ламана, що вписана в дугу AB, дорівнює:

$$P_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i=2\pi\sum_{i=1}^{n}\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\sqrt{1+\left(f'(c_i)\right)^2}\,\Delta x_i\,.$$

Сума P_n є інтегральною сумою. При переході до границі, коли $n\to\infty$, площа S_n наближається до значення площі поверхні тіла обертання:

$$P=\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}2\pi\sum_{i=1}^{n}\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\sqrt{1+\left(f'(c_i)\right)^2}\,\Delta x_i=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx\,;$$

$$P_{Ox}=2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+\left(y'_x\right)^2}\,dx\,. \qquad (16.4)$$

Якщо крива задана у параметричному вигляді $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}$ $t\in[\alpha;\beta]$, то для площі поверхні тіла обертання навколо осі Ox маємо відповідну формулу:

$$P_{Ox}=2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\left(\varphi'_t\right)^2+\left(\psi'_t\right)^2}\,dt\,. \qquad (16.5)$$

Якщо крива задана у полярній системі координат, то відповідна формула набуває вигляду:

$$P=2\pi\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho(\varphi)\sin\varphi\sqrt{\rho^2(\varphi)+\left(\rho'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi\,. \qquad (16.6)$$

Приклад 16.5. Обчислити площу поверхні обертання плоскої фігури, що обмежена лініями $y=\sqrt{2x}$, $y=0$, $x=0$, $x=4$, навколо осі Ox.

Розв'язання. $y'=\left(\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}}\right)'=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2x}}$.

$(y')^2=\frac{1}{2x}$.

$$P_{Ox}=2\pi\int_0^4\sqrt{2x}\sqrt{1+\frac{1}{2x}}\,dx=2\pi\int_0^4\sqrt{2x}\sqrt{\frac{2x+1}{2x}}\,dx=2\pi\int_0^4\sqrt{2x+1}\,dx=$$

$$=2\pi\int_0^4(2x+1)^{\frac{1}{2}}dx=2\pi\cdot\frac{1}{2}\frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4=\frac{2\pi}{3}\sqrt{(2x+1)^3}\Bigg|_0^4=\frac{2\pi}{3}\left(\sqrt{9^3}-\sqrt{13}\right)=$$

$=\frac{2\pi\cdot 26}{3}=\frac{52\pi}{3}$ (кв. од.)

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 20. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА (ЧАСТИНА 2)

20.1. Обчислення довжини дуги кривої

Приклад 20.1. Обчислити довжину дуги кривої $y=(x-1)^{3/2}$ між точками $A(2;-1)$, $B(5;-8)$.

Розвя'зання. Знайдемо $y'=\frac{3}{2}(x-1)^{1/2}$. Підставимо в формулу (16.1) і отримаємо:

$$l=\int_{x_A}^{x_B}\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_2^5\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}(x-1)^{1/2}\right)^2}dx=\int_2^5\sqrt{1+\frac{9}{4}(x-1)}dx=$$

$$=\int_2^5\sqrt{\frac{4+9x-9}{4}}dx=\frac{1}{2}\int_2^5\sqrt{9x-5}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\frac{(9x-5)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_2^5=\frac{1}{27}\sqrt{(9x-5)^3}\Bigg|_2^5=$$

$$=\frac{1}{27}\left((9\cdot5-5)^3-(9\cdot2-5)^3\right)=\frac{1}{27}\left(\sqrt{40^3}-\sqrt{13^3}\right)\approx 7{,}67 \text{ (лін. од.)}$$

Приклад 20.2. Обчислити довжину дуги кривої $y=\frac{e^x}{4}+e^{-x}$, $0\le x\le ln 2$.

Розвя'зання. Знаходимо $y'=\frac{e^x}{4}-e^{-x}$ і підставляємо у формулу (16.1):

$$l=\int_0^{ln 2}\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_0^{ln 2}\sqrt{1+\left(\frac{e^x}{4}+e^{-x}\right)^2}dx=\int_0^{ln 2}\sqrt{1+\left(\frac{e^x}{4}+\frac{1}{e^x}\right)^2}dx=$$

$$=\int_0^{ln 2}\sqrt{1+\frac{e^{2x}}{16}-2\frac{e^x}{4}\cdot\frac{1}{e^x}+\frac{1}{e^{2x}}}dx=\int_0^{ln 2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{e^{2x}}{16}+\frac{1}{e^{2x}}}dx=\int_0^{ln 2}\sqrt{\frac{8e^{2x}+e^{4x}+16}{16e^{2x}}}dx=$$

$$=\int_0^{ln 2}\sqrt{\frac{\left(e^{2x}+4\right)^2}{16e^{2x}}}dx=\int_0^{ln 2}\frac{e^{2x}+4}{4e^x}dx=\int_0^{ln 2}\left(\frac{e^x}{4}+\frac{1}{e^x}\right)dx=\int_0^{ln 2}\left(\frac{e^x}{4}+e^{-x}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{e^x}{4}-e^{-x}\right)\Bigg|_0^{ln 2}=\frac{e^{ln 2}}{4}-e^{-ln 2}-\frac{e^0}{4}+e^0=\frac{1}{4}\cdot2-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4} \text{ (лін. од.)}$$

Приклад 20.3. Обчислити довжину астроїди $x^{2/3}+y^{2/3}=2^{3/2}$.

Розвя'зання. Астроїда зображена на рис. 20.1. Користуючись симетрією, обчислимо довжину дуги, що розташована у першій чверті. Вона становить чверть від всієї довжини астроїди.

Знайдемо y':

$$\frac{2}{3}\cdot x^{-1/3}+\frac{2}{3}\cdot y^{-1/3}\cdot y'=0;$$

$$y'=-\frac{x^{-1/3}}{y^{-1/3}}=-\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}.$$

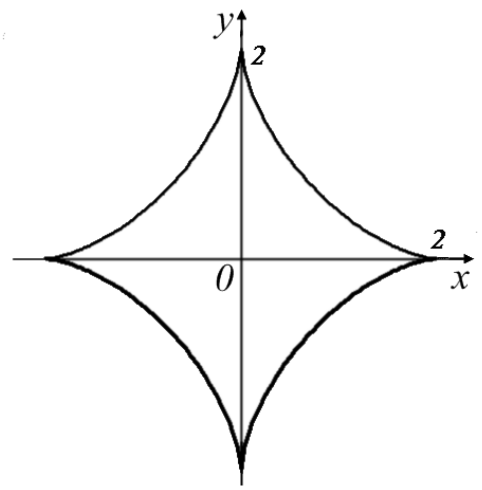


Рис. 20.1

Підставляємо у формулу (16.1) та отримуємо:

$$\frac{l}{4}=\int_0^2\sqrt{1+\left(-\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}\right)^2}dx=\int_0^2\sqrt{1+\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}dx=$$

$$=\int_0^2\sqrt{\frac{x^{2/3}+y^{2/3}}{x^{2/3}}}dx=\int_0^2\sqrt{\frac{2^{2/3}}{x^{2/3}}}dx=\int_0^2\frac{2^{1/3}}{x^{1/3}}=2^{1/3}\int_0^2 x^{-1/3}dx=2^{1/3}\cdot\frac{x^{2/3}}{2/3}\Bigg|_0^2=3\cdot\frac{2^{1/3}\cdot 2^{2/3}}{2}=$$

$=3$ (лін.од.)

$l=4\cdot 3=12$ (лін.од.)

Приклад 20.4. Обчислити довжину дуги кривої $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$, де $0\le t\le 2\pi$.

Розвя'зання. Скористаємось формулою (16.2). Знайдемо: $x'_t=a(1-\cos t)$, $y'_t=a\sin t$.

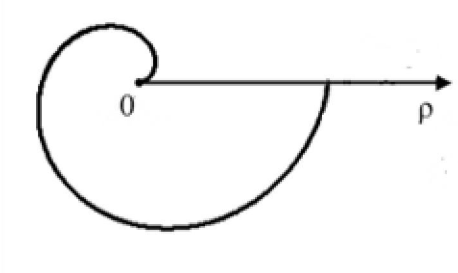
$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{(a(1-\cos t))^2+(a\sin t)^2}dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t)}dt=$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=$$

$$= -2a \cdot 2cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -4a(cos\pi - cos0) = 8a \text{ (лін. од.)}$$

Приклад 20.5. Знайти довжину дуги кривої $\rho = a\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $a \ge 0$ (виток спіралі Архімеда).

Розвя'зання. Задана крива зображена на рис. 20.2. Для обчислення довжини дуги кривої скористаємось формулою (16.3):



$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}\, d\varphi = a\int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1}\, d\varphi .$$

Рис. 20.2

Обчислимо інтеграл:

$$I = \rho\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi = \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{1+\varphi^2},\, du = \dfrac{\varphi d\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} \\ dv = d\varphi,\, v = \varphi \end{array} \right| = \varphi\sqrt{1+\varphi^2} - \int \frac{\varphi^2 d\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} =$$

$$= \varphi\sqrt{1+\varphi^2} - \rho\left(\frac{\varphi^2+1}{\sqrt{1+\varphi^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}} \right) d\varphi = \varphi\sqrt{1+\varphi^2} - \int \sqrt{1+\varphi^2}\, d\varphi +$$

$$+ ln\left|\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\right| ;$$

$$2I = \varphi\sqrt{1+\varphi^2} + ln\left|\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\right| ;$$

$$I = \frac{1}{2}\left(\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + ln\left|\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\right| \right);$$

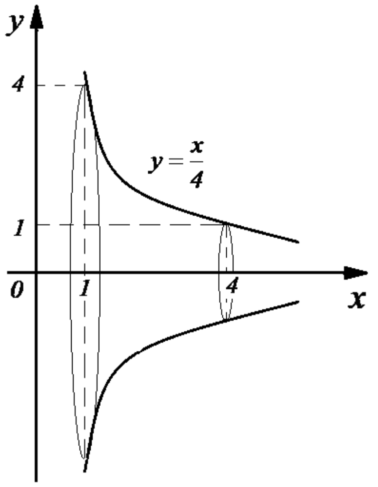
$$l = \frac{a}{2}\left(\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + ln\left|\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\right| \right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{a}{2}\left(2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + ln\left|2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right| \right)$$

(лін.од).

20.2. Обчислення об'єму тіл обертання

Приклад 20.6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена лініями $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$ та $y = 0$.

Розвя'зання. Побудуємо криволінійну трапецію, яка обертається навколо осі $\boldsymbol{Ox}$: $y=\dfrac{4}{x}$ (гіпербола), $x=1$, $x=4$ та $y=0$ (прямі) (рис. 20.3).



Як видно з рисунка, границі інтегрування $x_1=1$, $x_2=4$.

Застосовуємо формулу (16.4) і отримуємо:

$$V_{ox}=\pi\int_1^4\left(\frac{4}{x}\right)^2dx=16\pi\int_1^4 x^{-2}dx=16\pi\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right)\Bigg|_1^4=$$

$$=6\pi\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^4=16\pi\left(-\frac{1}{4}+1\right)=16\pi\cdot\frac{3}{4}=12\pi$$

(куб.од.)

Приклад 20.7. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі $\boldsymbol{Ox}$ фігури, що обмежена лініями $2y=x^2$, $2x+2y-3=0$.

Розвя'зання. Побудуємо криволінійну трапецію, що обертається навколо осі $\boldsymbol{Ox}$: $2y=x^2$ (парабола з вершиною у точці $O(0;0)$), $2x+2y-3=0$ (пряма) (рис. 20.4). Знайдемо точки перетину параболи з прямою:

$$\begin{cases}2y=x^2, \\ 2x+2y-3=0;\end{cases}\qquad \begin{matrix}x^2=3-2x, & x^2+2x-3=0, \\ x_1=-3, & x_2=1.\end{matrix}$$

Для обчислення об'єму використовуємо формулу: $V_{ox}=\pi\int_a^b\left(y_2^2-y_1^2\right)dx$:

$$V_{ox}=\pi\int_{-3}^{1}\left(\left(\frac{3-2x}{2}\right)^2-\left(\frac{x^2}{2}\right)2\right)dx=\pi\int_{-3}^{1}\left((1{,}5-x)^2-\frac{x^4}{4}\right)dx=$$

$$=\pi\int_{-3}^{1}(x-1{,}5)^2dx-\frac{\pi}{4}\int_{-3}^{1}x^4dx=\frac{\pi(x-1{,}5)^3}{3}\Bigg|_{-3}^{1}-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_{-3}^{1}=\frac{\pi(-0{,}5)^3}{3}-$$

$$-\frac{\pi(-4{,}5)^3}{3}-\frac{\pi}{20}-\frac{243\pi}{20}=\frac{91}{3}\pi-\frac{61}{5}\pi=\frac{272}{15}\pi=18\frac{2}{15}\text{ (куб. од.)}$$

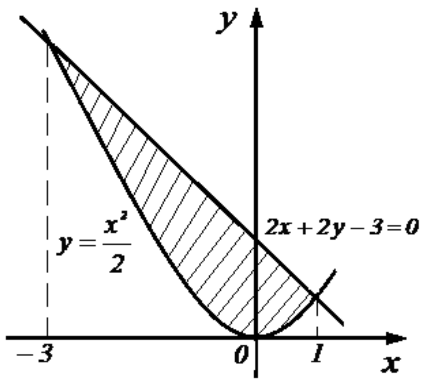


Рис. 20.4

Приклад 20.8. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy плоскої фігури, що обмежена лініями $y = x^2$, $y = x^3$.

Розвя'зання. Обмежена даними лініями фігура (рис. 20.5) при обертанні навколо осі Oy утворює тіло, об’єм якого можна знайти за формулою:

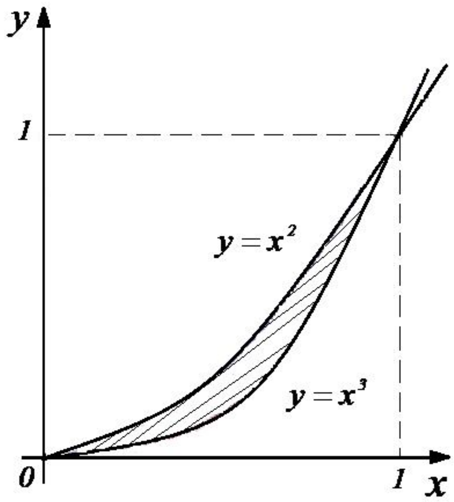


Рис. 20.5

$$V_{oy} = 2\pi\int_a^b x(y_2 - y_1)dx.$$

$$V_{oy} = 2\pi\int_0^1 x\left(x^2 - x^3\right)dx = 2\pi\int_0^1 \left(x^3 - x^4\right)dx =$$

$$= 2\pi\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} - 0\right) = 2\pi\cdot\frac{1}{20} =$$

$= 0{,}1\pi$ (куб. од.)

20.3. Обчислення площі поверхні тіла обертання

Приклад 20.9. Крива обертається навколо осі Ox. Обчисліть площу поверхні обертання, якщо $f(x) = \sin x$, $x \in [0;\pi]$.

Розвя'зання. Для обчислення площі поверхні обертання скористуємося формулою (16.4):

$$P_{ox} = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Знайдемо $f'(x) = \cos x$, тоді $\sqrt{1 + (f')^2} = \sqrt{1 + \cos^2 x}$.

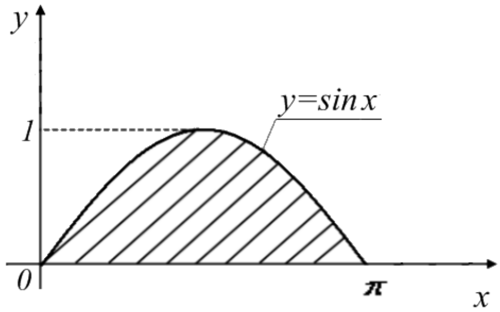


Рис. 20.6

$$P_{ox} = 2\pi \int_0^{\pi} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t, -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \\ t_1 = \cos 0 = 1 \\ t_2 = \cos \pi = -1 \end{array} \right| = -2\pi \int_1^{-1} \sqrt{1 + t^2} dt =$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + t^2} dt.$$

Нехай $\int \sqrt{1 + t^2} dt = I$, тоді:

$$I = \int \sqrt{1 + t^2} dt = \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{1 + t^2}, du = \dfrac{tdt}{\sqrt{1 + t^2}} \\ dv = dt, v = t \end{array} \right| = t\sqrt{1 + t^2} - \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{1 + t^2}} =$$

$$= t\sqrt{1 + t^2} - \int \frac{(t^2 + 1) - 1}{\sqrt{1 + t^2}} dt = t\sqrt{1 + t^2} - \int \sqrt{1 + t^2} dt = \int \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} dt = t\sqrt{1 + t^2} - I +$$

$+ \ln\left|t + \sqrt{1 + t^2}\right|$. Звідки:

$$2I = t\sqrt{1 + t^2} + \ln\left|t + \sqrt{1 + t^2}\right|, \quad I = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1 + t^2} + \ln\left|t + \sqrt{1 + t^2}\right|\right).$$

Повертаємося до обчислення площі поверхні:

$$P_{ox} = \frac{2\pi}{2}\left(t\sqrt{1 + t^2} + \ln\left|t + \sqrt{1 + t^2}\right|\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \pi\left(\sqrt{2} + \ln\left|1 + \sqrt{2}\right|\right) + \sqrt{2} -$$

$$- \ln\left|-1 + \sqrt{2}\right| = \pi\left(2\sqrt{2} + \ln\left|\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}\right|\right) = \pi\left(2\sqrt{2}\right) + \ln\left|\frac{\left(1 + \sqrt{2}\right)\left(1 + \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(1 + \sqrt{2}\right)}\right| =$$

$$=\pi\left(2\sqrt{2}+\ln\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}{1}\right)=2\pi\left(\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$$ (кв. од.)

Приклад 20.10. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням кардіоїди $\rho=2a(1-\cos\varphi)$ навколо полярної осі.

Розвя'зання. Кардіоїда зображена на рис. 20.7. Для обчислення площі поверхні використовуємо формулу:

$$P=2\pi\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho(\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi)+\left(\rho'(\varphi)\right)^2}\sin\varphi d\varphi .$$

Знаходимо $\rho'=2a\sin\varphi$,

$$\rho^2+\left(\rho'\right)^2=4a^2(1-\cos\varphi)^2+4a^2\sin^2\varphi=4a^2\left(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=$$
$$=4a^2(2-2\cos\varphi)=8a^2(1-\cos\varphi).$$

$$P=2\pi\int_0^{\pi}2a(1-\cos\varphi)\sqrt{8a^2(1-\cos\varphi)}\sin\varphi d\varphi=8\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{\pi}\sqrt{(1-\cos\varphi)^3}\times$$

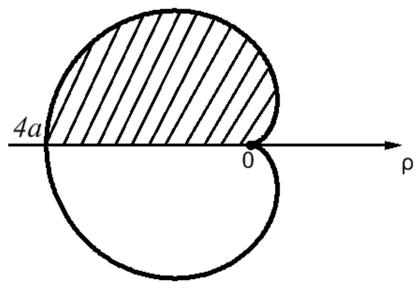


Рис. 20.7

$$\times\sin\varphi d\varphi=\left|\begin{array}{l}1-\cos\varphi=t\\ \sin\varphi d\varphi=dt\\ t_1=1-\cos 0=0\\ t_2=1-\cos\pi=2\end{array}\right|=8\sqrt{2}\pi a^2\int_0^2\sqrt{t^3}dt=$$

$$=8\sqrt{2}\pi a^2\int_0^2 t^{3/2}dt=8\sqrt{2}\pi a^2\times\left.\frac{t^{5/2}}{5/2}\right|_0^2=$$

$$=\frac{16\sqrt{2}}{5}\pi a^2\left.\sqrt{t^5}\right|_0^2=\frac{128}{5}\pi a^2$$ (кв. од.)

Приклад 20.11. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox кривої: $x=t^2+1$, $y=\frac{t}{3}\left(3-t^2\right)$, $0\le t\le\sqrt{3}$.

Розвя'зання. Для обчислення площі поверхні використовуємо формулу (16.5): $P_{ox}=2\pi\int_{t_1}^{t_2}y(t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left[y'(t)\right]^2}dt$.

Знаходимо: $x' = 2t$, $y' = \left(t - \dfrac{t^3}{3}\right)' = 1 - t^2$.

$$x'^2 + y'^2 = 4t^2 + \left(1 - t^2\right)^2 = 4t^2 + 1 - 2t^2 + t^4 = t^4 + 2t^2 + 1 = \left(t^2 + 1\right)^2.$$

$$S_{ox} = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t}{3}\left(3 - t^2\right)\sqrt{\left(t^2 + 1\right)^2}\,dt = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(t - \frac{t^3}{3}\right)\left(t^2 + 1\right)dt =$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(t^3 + t - \frac{t^5}{3} - \frac{t^3}{3}\right)dt = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{2t^3}{3} + t - \frac{t^5}{3}\right)dt = 2\pi\left(\frac{2t^4}{3\cdot 4} + \frac{t^2}{2} - \frac{t^6}{3\cdot 6}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= 2\pi\left(\frac{\left(\sqrt{3}\right)^4}{6} + \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{2} - \frac{\left(\sqrt{3}\right)^6}{18}\right) = 2\pi \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{9}{3} + 3 - \frac{27}{9}\right) = 3\pi \text{ (кв. од.)}$$

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити довжину дуги кривої:

а) $y = ln\left(x^2 - 1\right)$, $2 \le x \le 3$;

б) $y = \sqrt{1 - x^2} + arcsin\, x$, $0 \le x \le \dfrac{7}{9}$;

в) $y = ln\, sin$, $\dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$;

г) $x = 4\left(cos\, t + t\, sin\, t\right)$, $y = 4\left(sin\, t - t\, cos\, t\right)$, $0 \le t \le 2$;

д) $x = t^2$, $y = t - \dfrac{t^3}{3}$, $0 \le t \le \sqrt{3}$;

є) $\rho = a\, cos^3 \dfrac{\varphi}{3}$, $0 \le \varphi \le 3\pi$;

ж) $\rho = 1 + cos\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

2. Обчислити об’єми тіл, утворених обертанням плоских фігур навколо координатних осей:

а) $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$, $V_{ox} - ?$;

б) $y^2 = 1 - x$, $x = 0$, $V_{ox} - ?$;

в) $y = 2x - x^2$, $y = 2 - x$, $V_{ox} - ?$;

г) $y = x$, $x + y = 2$, $x = 0$, V_{oy} $-?$.

3. Обчислити площі поверхонь тіл, утворених обертанням кривих навколо відповідної осі:

а) $y^2 = 4 + x$, $0 \le x \le 2$, P_{ox} $-?$;

б) $y = \ln x$, $0 \le y \le \ln 2$, P_{oy} $-?$;

в) $x = t^2$, $y = t\left(\frac{1}{3} - t^2\right)$, $0 \le t \le \frac{1}{\sqrt{3}}$, P_{ox} $-?$.

4. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо полярної осі кривої $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. Навч. посібник. – К.: А.С.К. 2005. – 648 с.
2. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник у 2 ч. Ч.1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення. – 3-тє вид., випр. – К.: Техніка, 2003. – 600 с.
3. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін. За ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. – К.: Видавництво А.С.К., 2003. – 480 с.
4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / 7-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 608 с.

Навчальне видання

Щербина Ірина Володимирівна
Пасічник Ірина Володимирівна
Бас Тетяна Петрівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 4

Навчальний посібник

Тем. план 2015, поз. 404

Підписано до друку 14.12.2015. Формат 60x84 1/16. Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид. арк. 4,53. Умов. друк. арк. 4,47. Тираж 100 пр. Замовлення № 231.

Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпропетровськ-5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ