МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

О.Є. ЗАПОРОЖЧЕНКО, О.В. БІЛОВА,
Л.Ф. СУШКО, І.Б. КОЧЕТКОВА

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 2

Навчальний посібник

Затверджено на засіданні Вченої ради академії
як навчальний посібник. Протокол № 1 від 27.01.17

Дніпро НМетАУ 2017

УДК 517(07)
Вища математика. Частина 2: Навч. посібник / О.Є. Запорожченко,О.В.Білова, Л.Ф. Сушко, І.Б. Кочеткова. – Дніпро: НМетАУ, 2017. 40 с.

Наведені докладні теоретичні відомості до вивчення розділів «Вступ до математичного аналізу» та «Похідна функції однієї змінної». Теоретичні положення супроводжуються необхідними поясненнями, а також розв’язуванням типових задач. Рекомендуються завдання для самостійної роботи з відповідями.

Призначений для студентів з вадами здоров’я спеціальності 133- механічна інженерія (бакалаврський рівень).

Бібліогр.: 5 найм.

Друкується за авторською редакцією.

Відповідальний за випуск В.Л.Копорулін, канд. техн. наук, доц.

Рецензенти: Т.С. Кагадій, д-р фіз.-мат. наук, проф. (ДВНЗ НГУ)
І.Ю. Гергель, канд. фіз.-мат. наук, доц. (ДНУ)

ЗМІСТ

ВСТУП

З кожним роком зростає кількість студентів з вадами слуху, які навчаються на різних факультетах академії.

Процес навчання студентів з обмеженими можливостями має свою специфіку, яку треба враховувати під час викладання матеріалу. Мета посібника – допомогти студентам при вивченні дисципліни «Вища математика» розібратися у матеріалі та якісно його засвоїти.

До складу другої частини посібника увійшли розділи вищої математики: «Вступ до математичного аналізу» та «Похідна функції однієї змінної».

Наведено основні теоретичні положення та формули, які проілюстровано детальним розв’язанням задач різного ступеня складності. Наприкінці кожної теми надані задачі для самостійної роботи з відповідями, що дає можливість студентам перевірити себе.

Посібник може використовуватися для самостійної роботи і підготовки до різних видів контролю студентами технічних спеціальностей усіх форм навчання.

1. ВСТУП ДО МАТЕ МАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

1.1. Функція. Основні властивості функції

Означення. Якщо кожному числу x з деякої множини D за певним правилом поставлене у відповідність єдине число y, то y є ***функцією*** від x і позначається $y = f(x); \quad x \in D$.

Змінна x є ***незалежною змінною***, або ***аргументом***, а змінна y – ***залежною змінною***, або ***функцією***.

Множина D значень аргументу x, для яких функція $y = f(x)$ має дійсний зміст, є ***областю визначення*** цієї функції.

Множина E всіх чисел y, таких, що $y = f(x)$ для кожного $x \in D$, є ***множиною значень функції***.

Функція $f(x)$ є парною, якщо $f(-x) = f(x)$ і непарною, якщо $f(-x) = -f(x)$, $x \in D$.

Функція $f(x)$, яка визначена на всій числовій прямій, є ***періодичною***, якщо $f(x+T) = f(x)$. Число T називається ***періодом функції***.

Якщо функція $f(x)$ визначена на множині D і для двох довільних різних значень x_1 і x_2 аргументу з цієї множини при умові $x_1 < x_2$, маємо:

1) $f(x_1) < f(x_2)$, то функція є ***зростаючою***;
2) $f(x_1) > f(x_2)$, то функція є ***спадною***;
3) $f(x_1) \le f(x_2)$, то функція є ***неспадною***;
4) $f(x_1) \ge f(x_2)$, то функція є ***не зростаючою.***

Всі ці функції називають ***монотонними.***

Існують наступні способи визначення функції: ***аналітичний*** (у вигляді формули, ***графічний*** (у вигляді графіка), ***табличний*** (у вигляді таблиці числових значень).

1.2. Границя функції. Обчислення границь

Означення. Число A називається ***границею функції*** $f(x)$ ***в точці*** x_0, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Позначення: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Якщо кожна з функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$ має скінченну границю при $x \to x_0$, то справедливі формули, які називають ***теоремами про границі***:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x), \qquad c = const$;
2. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x);$
3. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x);$
4. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)}, \qquad \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) \neq 0$.
5. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^{\varphi(x)} = \left[\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right]^{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)}$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq 0;$ $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) \neq 0;$ одночасно.

Функція $f(x)$ називається ***нескінченно малою*** в точці x_0, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Якщо $f(x)$ – нескінченно велика в точці x_0, то пишуть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ і кажуть, що границя функції $f(x)$ в точці x_0 дорівнює нескінченності.

Якщо $y = f(x) -$ елементарна функція і x_0 належить області визначення цієї функції, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Позначимо символами 0 і ∞ нескінченно малу та нескінченно велику величини, $c = const -$ постійну величину. Обчислюючи границі частки двох функцій, будемо користуватись правилами:

$$0 \cdot c = 0; \qquad \frac{0}{c} = 0; \qquad \frac{c}{0} = \infty;$$

$$\infty \cdot c = \infty; \qquad \frac{\infty}{c} = \infty; \qquad \frac{c}{\infty} = 0.$$

Якщо $\dfrac{\infty}{\infty}, \ \dfrac{0}{0}, \ \infty - \infty, \ 0 \cdot \infty, \ 1^{\infty},$ говорять про невизначеність, якої необхідно позбутися, виконуючи різні алгебраїчні перетворення.

Зразки розв'язування задач

Приклад 1.1. Обчислити границі функції:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2-5x+4\right)=3\cdot 2^2-5\cdot 2+4=12-10+4=6;$

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x+4}=\dfrac{3^2-9}{3+4}=\dfrac{9-9}{7}=\dfrac{0}{7}=0;$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x+7}=\dfrac{5}{\infty}=0;$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x}{8}=\dfrac{\infty}{8}=\infty;$

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+3}{x-1}=\dfrac{1+3}{1-1}=\dfrac{4}{0}=\infty.$

Невизначеність типу $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

Якщо $x\to\infty$ і чисельник та знаменник дробу – многочлени, отримаємо невизначеність $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, яку розкривають, поділивши чисельник і знаменник на x^n , де $n-$найвищий степінь цих многочленів.

Приклад 1.2. Обчислити границі функції:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-5x^2+9}{7x^4+x^3-2x};$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-5x^2+9}{7x^6+x^3-2x};$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-5x^2+9}{7x^4+x^3-2x};$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{9x^4+3x-1}}{4x^2+5x}.$

Розв'язання

а) якщо в границі x прямує до ∞, отримаємо невизначеність $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$**.** Старший степінь многочленів в цьому дробі дорівнює **4.** Поділимо чисельник і знаменник дробу на x^4:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-5x^2+9}{7x^4+x^3-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^4}{x^4}-\frac{5x^2}{x^4}+\frac{9}{x^4}}{\frac{7x^4}{x^4}+\frac{x^3}{x^4}-\frac{2x}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{5}{x^2}+\frac{9}{x^4}}{7+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}}=\frac{3-0+0}{7+0-0}=\frac{3}{7}.$$

б) найвищий степінь x^6 знаходиться в знаменнику, тому поділимо чисельник і знаменник дробу на x^6:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-5x^2+9}{7x^6+x^3-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^4}{x^6}-\frac{5x^2}{x^6}+\frac{9}{x^6}}{\frac{7x^6}{x^6}+\frac{x^3}{x^6}-\frac{2x}{x^6}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x^4}+\frac{9}{x^6}}{7+\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^5}}=\frac{0-0+0}{7+0-0}=\frac{0}{7}=0.$$

в) в чисельнику маємо старший степінь x^5, тому поділимо чисельник і знаменник дробу на x^5:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5-5x^2+9}{7x^4+x^3-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^5}{x^5}-\frac{5x^2}{x^5}+\frac{9}{x^5}}{\frac{7x^4}{x^5}+\frac{x^3}{x^5}-\frac{2x}{x^5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{5}{x^2}+\frac{9}{x^5}}{\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^4}}=\frac{3-0+0}{0+0-0}=\frac{3}{0}=\infty.$$

г) найвищий степінь чисельника $x^2=\sqrt{x^4}$, знаменника x^2, тому поділимо чисельник і знаменник дробу на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^4+3x-1}}{4x^2+5x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{9x^4+3x-1}}{x^2}}{\frac{4x^2+5x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{9x^4}{x^4}+\frac{3x}{x^4}-\frac{1}{x^4}}}{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9+\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x^4}}}{4+\frac{5}{x}}=\frac{\sqrt{9+0-0}}{4+0}=\frac{\sqrt{9}}{4}=\frac{3}{4}.$$

Обчислюючи границі функції, можемо користуватись правилом:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nn^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_mx^m}=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad n<m;\\ \dfrac{a_n}{b_m}, & \text{якщо} \quad n=m;\\ \infty, & \text{якщо} \quad n>m.\end{cases}$$

Невизначеність типу $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

Якщо при $x\to x_0$ отримаємо, що $P_n(x)\to 0$ і $Q_m(x)\to 0$, то для обчислення $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ необхідно скоротити чисельник і знаменник на $(x-x_0)$. Для цього розкладають $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ на множники, використовуючи формули елементарної математики:

$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$;

$a^3-b^3=(a-b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)$;

$a^3+b^3=(a+b)\cdot\left(a^2-ab+b^2\right)$;

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$;

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$;

$ax^2+bx+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$, де x_1 і x_2 – корені рівняння

$ax^2+bx+c=0$, які знаходять за формулами: $D=b^2-4ac$,

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

Зразки розв'язування задач

Приклад 1.3. Обчислити границі функції:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$;

б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+2x-8}{x^2-5x+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{9x^2-6x+1}{9x^2-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^3-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{3+2x}-3}{x-3}$; є) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x+7}-\sqrt{5x+4}}{\sqrt{x+8}-3}$.

Розв'язання

а) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6} = \dfrac{3^2-9}{3^2-5\cdot 3+6} = \dfrac{9-9}{9-15+6} = \left(\dfrac{0}{0}\right).$

Для чисельника будемо використовувати формулу:

$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$;

$x^2-9=x^2-3^2=(x-3)(x+3).$

Для знаменника розв'яжемо рівняння:

$x^2-5x+6=0$, де $a=1$, $b=-5$, $c=6$.

$D=b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=25-24=1$;

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\dfrac{5\pm 1}{2}$;

$x_1=\dfrac{5+1}{2}=\dfrac{6}{2}=3;$ $x_2=\dfrac{5-1}{2}=\dfrac{4}{2}=2$;

$ax^2+bx+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$, тому $x^2-5x+6=(x-3)\cdot(x-2)$;

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+3}{x-2} = \dfrac{3+3}{3-2} = \dfrac{6}{1} = 6.$

б) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x^2+2x-8}{x^2-5x+6} = \dfrac{3\cdot(-2)^2+2\cdot(-2)-8}{(-2)^3+8} = \dfrac{12-4-8}{-8+8} = \left(\dfrac{0}{0}\right).$

Для чисельника розв'яжемо квадратне рівняння:

$3x^2+2x-8=0,$ де $a=3;$ $b=2;$ $c=-8$.

$D=b^2-4ac=2^2-4\cdot 3\cdot(-8)=4+96=100$;

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{-2\sqrt{100}}{2\cdot 3}=\dfrac{-2\pm 10}{6}$;

$x_1=\dfrac{-2+10}{6}=\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3};$ $x_2=\dfrac{-2-10}{6}=\dfrac{-12}{6}=-2$;

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),\ \text{тому}\qquad 3x^2+2x-8=3\left(x-\frac{4}{3}\right)\cdot(x+2)=$$

$$=(3x-4)\cdot(x+2).$$

Для знаменника будемо використовувати формулу $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$:

$$x^3+8=x^3+2^3=(x+2)\cdot\left(x^2-x\cdot 2+2^2\right)=(x+2)\left(x^2-2x+4\right);$$

$$\lim_{x\to-2}\frac{3x^2+2x-8}{x^3+8}=\lim_{x\to-2}\frac{(3x-4)(x+2)}{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)}=\lim_{x\to-2}\frac{3x-4}{x^2-2x+4}=$$

$$=\frac{3\cdot(-2)-4}{(-2)^2-2\cdot(-2)+4}=\frac{-6-4}{4+4+4}=\frac{-10}{12}=-\frac{5}{6}.$$

в) $$\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{9x^2-6x+1}{9x^2-1}=\frac{9\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2-6\cdot\frac{1}{3}+1}{9\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2-1}=\frac{9\cdot\frac{1}{9}-2+1}{9\cdot\frac{1}{9}-1}=\frac{1-1}{1-1}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

Для чисельника розв'яжемо квадратне рівняння:

$9x^2-6x+1=0$, де $a=9;\quad b=-6;\quad c=1$.

$$D=b^2-4ac=(-6)^2-4\cdot 9\cdot 1=36-36=0;$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{0}}{2\cdot 9}=\frac{6\pm 0}{18}=\frac{6}{18}=\frac{1}{3};$$

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)\cdot(x-x_2),\ \text{тому}\qquad 9x^2-6x+1=9\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)=$$

$$=3\cdot 3\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)=(3x-1)\cdot(3x-1).$$

Для знаменника будемо використовувати формулу $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$:

$$9x^2-1=(3x)^2-1^2=(3x-1)(3x+1);$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{9x^2-6x+1}{9x^2-1}=\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{(3x-1)(3x-1)}{(3x-1)(3x+1)}=\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{3x-1}{3x+1}=\frac{3\cdot\frac{1}{3}-1}{3\cdot\frac{1}{3}+1}=\frac{1-1}{1+1}=\frac{0}{2}=0.$$

.

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^3-1}=\dfrac{1^4-1}{1^3-1}=\dfrac{1-1}{1-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right);$

Для чисельника два рази будемо використовувати формулу $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$:

$$x^4-1=\left(x^2\right)^2-1^2=\left(x^2-1\right)\cdot\left(x^2+1\right)=(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right).$$

Для знаменника будемо використовувати формулу $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$:

$$x^3-1=x^3-1=(x-1)\left(x^2+x\cdot 1+1^2\right)=(x-1)\left(x^2-x+1\right).$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)\left(x^2+1\right)}{x^2+x+1}=$$

$$=\frac{(1+1)\left(1^2+1\right)}{1^2+1+1}=\frac{2\cdot 2}{3}=\frac{4}{3}.$$

д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3+2x}-3}{x-3}=\dfrac{\sqrt{3+2\cdot 3}-3}{3-3}=\dfrac{\sqrt{9}-3}{0}=\dfrac{3-3}{0}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{3+2x}-3\right)\cdot\left(\sqrt{3+2x}+3\right)}{(x-3)\cdot\left(\sqrt{3+2x}+3\right)}=\left|(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2\right|=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{3+2x}\right)^2-3^2}{(x-3)\cdot\left(\sqrt{3+2x}+3\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{3+2x-9}{(x-3)\left(\sqrt{3+2x}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2x-6}{(x-3)\left(\sqrt{3+2x}+3\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)}{(x-3)\left(\sqrt{3+2x}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2}{\sqrt{3+2x}+3}=\frac{2}{\sqrt{3+2\cdot 3}+3}=\frac{2}{3+3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+7}-\sqrt{5x+4}}{\sqrt{x+8}-3}=\dfrac{\sqrt{2\cdot 1+7}-\sqrt{5\cdot 1+4}}{\sqrt{1+8}-3}=\dfrac{3-3}{3-3}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{2x+7}-\sqrt{5x+4}\right)\left(\sqrt{2x+7}+\sqrt{5x+4}\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{\left(\sqrt{2x+7}+\sqrt{5x+4}\right)\ \left(\sqrt{x+8}-3\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\left(\left(\sqrt{2x+7}\right)^2 - \left(\sqrt{5x+4}\right)^2\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{\left(\sqrt{2x+7}+\sqrt{5x+4}\right)\cdot\left(\left(\sqrt{x+8}\right)^2 - 3^2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(2x+7-5x-4)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{\left(\sqrt{2x+7}+\sqrt{5x+4}\right)\cdot(x+8-9)} = \lim_{x\to 1} \frac{(3-3x)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{\left(\sqrt{2x+7}+\sqrt{5x+4}\right)(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-3(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{\left(\sqrt{2x+7}+\sqrt{5x+4}\right)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{-3\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{\left(\sqrt{2x+7}+\sqrt{5x+4}\right)} =$$

$$= \frac{-3\left(\sqrt{1+8}+3\right)}{\sqrt{2\cdot 1+7}+\sqrt{5\cdot 1+4}} = \frac{-3(3+3)}{3+3} = \frac{-3\cdot 6}{6} = -3.$$

Перша важлива границя

Теорема. Границя відношення синуса нескінченно малого аргументу до цього ж аргументу дорівнює 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1; \qquad \lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1; \qquad \lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\alpha(x)}{\sin\alpha(x)} = 1.$$

Зразки розв'язування задач

Приклад 1.4. Обчислити границі функції:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 4x}{\sin 3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+\sin 7x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 3x-\sin x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 6x}{x^2}$; є) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{5x^2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{arctg5x}$;　　　з) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot tgx$.

Розв'язання

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\frac{\sin(5\cdot 0)}{0}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}=5\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg4x}{\sin 3x}=\frac{tg(4\cdot 0)}{\sin(3\cdot 0)}=\frac{tg0}{\sin 0}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot tg4x}{x\cdot\sin 3x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin 3x}\cdot\frac{tg4x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{3\sin 3x}\cdot\frac{4tg4x}{4x}=\frac{4}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{tg4x}{4x}=\frac{4}{3}\cdot 1\cdot 1=\frac{4}{3}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\sin 7x}{x}=\frac{\sin 0+\sin 0}{0}=\frac{0+0}{0}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}+\frac{\sin 7x}{x}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2\sin 2x}{2x}+\frac{7\sin 7x}{7x}\right)=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}+7\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}=2\cdot 1+7\cdot 1=2+7=9$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin 3x-\sin x}=\left|\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right|=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2\sin\frac{3x-x}{2}\cdot\cos\frac{3x+x}{2}}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos 2x}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{\cos 0}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{2}$.

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 6x}{x^2}=\frac{\cos 0-\cos 0}{0^2}=\frac{1-1}{0}=\left(\frac{0}{0}\right)=$

$=\left|\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right|=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{4x+6x}{2}\cdot\sin\frac{4x-6x}{2}}{x^2}=-2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x\cdot\sin(-x)}{x^2}=$

$=-2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x\cdot(-\sin x)}{x^2}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}=2\lim\limits_{x\to}\frac{5\sin 5x}{5x}\cdot 1=$

$$= 2 \cdot 5 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 10 \cdot 1 = 10;$$

е) $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 6x}{5x^2} = \frac{1 - \cos 0}{5 \cdot 0^2} = \frac{1-1}{0} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left| 1 - \cos\alpha = 2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right| =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{6x}{2}}{5x^2} = \frac{2}{5} \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 3x}{x^2} = \frac{2}{5} \cdot \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin 3x}{x}\right)^2 = \frac{2}{5} \lim_{x \to 0} \left(\frac{3 \sin 3x}{3x}\right)^2 =$$

$$= \frac{2 \cdot 9}{5} \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2 = \frac{18}{5} \cdot 1^2 = \frac{18}{5};$$

ж) $$\lim_{x \to 0} \frac{2x}{arctg 5x} = \frac{2 \cdot 0}{arctg(5 \cdot 0)} = \left(\frac{0}{0}\right) = 2 \lim_{x \to 0} \frac{x}{arctg 5x} =$$

$$= \left| \begin{array}{l|l} arctg 5x = t & x \to 0 \\ 5x = tgt & t = arctg 0 \Rightarrow \\ x = \frac{1}{5} \cdot tgt & t \to 0 \end{array} \right| = 2 \lim_{t \to 0} \frac{\frac{1}{5} \cdot tgt}{t} = \frac{2}{5} \lim_{t \to 0} \frac{tgt}{t} = \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{2}{5};$$

з) $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot tgx = (0 \cdot \infty) = \left| \begin{array}{l} x - \frac{\pi}{2} = t; -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -t; \\ x = t + \frac{\pi}{2}; \\ x \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \to 0 \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{t \to 0} (-t) \cdot tg\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \lim_{t \to 0} (-t) \cdot (-ctgt) = \lim_{t \to 0} \frac{t}{tgx} = 1.$$

Друга важлива границя

Обчислюючи границю від ***степенево-показникової функції*** використовують наступне правило: якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b,$ а $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \infty$, то

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^{\varphi(x)} = b^{\infty} = \begin{cases} \infty, & b > 1; \\ 0, & 0 < b < 1. \end{cases}$$

Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 1,$ а $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \infty,$ виникає невизначеність (1^{∞}), якої позбуваються, застосовуючи ***другу важливу границю***:

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e; \qquad \lim_{\alpha(x) \to 0} (1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e;$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e; \qquad e \approx 2{,}71.$$

Корисними будуть такі твердження:

$\lim\limits_{x \to \infty} \ln x = \ln \infty = \infty;$ $\quad \lim\limits_{x \to \infty} e^{x} = e^{\infty} = \infty;$

$\lim\limits_{x \to e} \ln x = \ln e = 1;$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = e^{-\infty} = 0;$

$\lim\limits_{x \to 1} \ln x = \ln 1 = 0;$ $\quad \lim\limits_{x \to 1} e^{x} = e^{1} = e;$

$\lim\limits_{x \to +0} \ln x = \ln(+0) = -\infty;$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} e^{x} = e^{0} = 1.$

Зразки розв'язування задач

Приклад 1.5. Обчислити границі функції:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin 4x}{x}\right)^{3x+2};$ $\quad$ б) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{3x - 4}{8x + 1}\right)^{x-3};$

в) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 2x)^{\frac{4}{x}};$ $\quad$ г) $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 5)^{\frac{x}{x^2 - 4}};$

д) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{4x + 1}{4x + 9}\right)^{x^2+3};$ $\quad$ є) $\lim\limits_{x \to \infty} x \cdot \ln\left(1 + \dfrac{2}{x}\right).$

Розв'язання

а) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin 4x}{x}\right)^{3x+2} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{4 \sin 4x}{4x}\right)^{3x+2} = \lim\limits_{x \to 0} (4 \cdot 1)^{3x+2} = 4^{3 \cdot 0 + 2} = 4^{2} = 16;$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{8x+1}\right)^{x-3}=\left(\dfrac{3}{8}\right)^{\infty}=0$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{4}{x}}=(1+2\cdot 0)^{\frac{4}{0}}=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{\frac{2x}{1}\cdot\frac{4}{x}}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\cdot 4}{1\cdot x}}=e^{2\cdot 4}=e^{8}$.

г) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{x}{x^2-4}}=(3\cdot 2-5)^{\frac{2}{4-4}}=\left(1^{\infty}\right)=$

$$=\left|\begin{array}{l} x-2=t,\quad t\to 0,\\ x=t+2,\\ x^2-4=(t+2)^2-4=t^2+4t+4-4=t^2+4t \end{array}\right|=$$

$$=\lim_{t\to 0}(3(t+2)-5)^{\frac{t+2}{t^2+4t}}=\lim_{t\to 0}(3t+6-5)^{\frac{t^2+2}{t^2+4t}}=\lim_{x\to 0}(1+3t)^{\frac{t^2+2}{t^2+4t}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+3t)^{\frac{1}{3t}}\right]^{\cdot\frac{3t}{1}\cdot\frac{t^2+2}{t^2+4t}}=\lim_{t\to 0}e^{\frac{3t\left(t^2+2\right)}{t(t+4)}}=\lim_{t\to 0}e^{\frac{3\left(t^2+2\right)}{t+4}}=e^{\frac{3(0+2)}{0+4}}=e^{\frac{3\cdot 2}{4}}=e^{\frac{3}{2}};$$

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x+9}\right)^{x+3}=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4x+1}{4x+9}-1\right)^{x+3}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4x+1-4x-9}{4x+9}\right)^{x+3}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-8}{4x+9}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-8}{4x+9}\right)^{\frac{4x+9}{-8}}\right]^{\cdot\frac{-8}{4x+9}\cdot(x+3)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-8x-24}{4x+9}}=e^{-\frac{8}{4}}=e^{-2};$$

є) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)=(\infty\cdot 0)=\lim\limits_{x\to\infty}ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}=\left(1^{\infty}\right)=ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}=$

$$=ln\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{\cdot 2}=ln\,e^2=2\,ln\,e=2\cdot 1=2.$$

1.3. Односторонні (однобічні) границі

Означення. Число A називають ***границею функції*** $y = f(x)$ ***зліва*** (лівою границею) в точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $x \in (x_0 - \delta;\, x_0)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Позначення: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = A$.

Означення. Число B називають ***границею функції*** $y = f(x)$ ***справа*** (правою границею) в точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $x \in (x_0;\, x_0 + \delta)$ виконується нерівність $|f(x) - B| < \varepsilon$.

Позначення. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 + 0) = B$.

Ліва і права границі функції називаються ***односторонніми (однобічними) границями.***

Зразки розв'язування задач

Приклад 1.6. Обчислити односторонні границі функції:

а) $\lim\limits_{x \to 2+0} \dfrac{2x+7}{x-2} = \dfrac{2(2+0)+7}{2+0-2} = \dfrac{4+0+7}{+0} = \dfrac{11}{+0} = \infty$;

б) $\lim\limits_{x \to 3-0} \dfrac{4x+1}{x-3} = \dfrac{4(3-0)+1}{3-0-3} = \dfrac{12-0+1}{-0} = \dfrac{13}{-0} = -\infty$;

в) $\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{3x+1}{x^2-1}$

Односторонні границі можна обчислити методом заміни змінної.

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{3x+1}{x^2-1} = \left| \begin{array}{l} x = 1-0 \\ x = 1-\alpha \\ \alpha \to 0 \end{array} \right| = \lim_{\alpha \to 0} \frac{3(1-\alpha)+1}{(1-\alpha)^2-1} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{3-3\alpha+1}{1-2\cdot\alpha+\alpha^2-1} =$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \frac{4-3\alpha}{\alpha^2-2\alpha} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{4-3\alpha}{\alpha(\alpha-2)} = -\lim_{\alpha \to 0} \frac{4-3\alpha}{\alpha(2-\alpha)} = -\frac{4-3\cdot 0}{0\cdot(2-0)} = -\frac{4}{0} = -\infty.$$

1.4. Неперервність і точки розриву функції

Означення. Функція $y = f(x)$ називається ***неперервною в точці*** x_0, якщо виконуються наступні умови:

1) функція визначена в точці x_0, тобто існує число $f(x_0)$;

2) існують односторонні границі при $x \to x_0$;

3) односторонні границі функції дорівнюють одна одній і значенню функції в точці x_0: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

Якщо не виконується хоча б одна з цих умов, то функція має ***розрив*** в точці x_0, а саме точка x_0 називається ***точкою розриву функції***.

Означення. Якщо функція визначена в точці x_0 і існують скінченні односторонні границі, але $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, то розрив функції в точці x_0 є ***розривом першого роду***, а також x_0 – ***точкою розриву першого роду.***

Величина $\delta = \left| \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \right|$ є ***стрибком функції*** (рис. 1.1).

Означення. Якщо існують скінченні односторонні границі і $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$, то розрив функції в точці x_0 є усувним, а точка x_0 – точкою усувного розриву (рис. 1.2).

Означення. Якщо хоча б одна з односторонніх границь не існує, або дорівнює нескінченності, то розрив функції в точці x_0 є ***розривом другого роду***, а точка x_0 – ***точкою розриву другого роду*** (рис. 1.3).

Функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, якщо вона неперервна в кожній внутрішній точці цього відрізка, а також у точці a справа і точці b зліва.

Всі елементарні функції неперервні в області свого визначення.

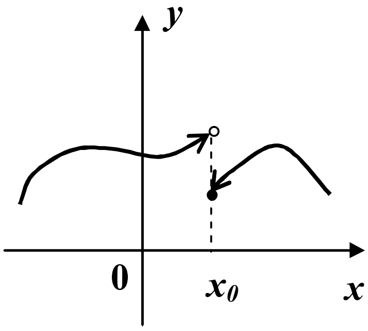


Рис.1.1

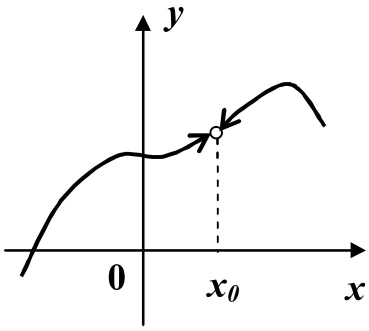


Рис.1.2

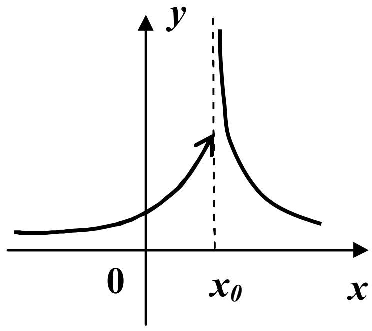


Рис.1.3

Зразки розв'язування задач

Приклад 1.7. Дослідити функції на неперервність

а) $y=\dfrac{x^2-x}{x-1}$.

Розв'язання

Область визначення функції: $x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq 1$.

$D(y): x\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

Обчислимо односторонні границі:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2-x}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{x(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}x=1;$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}x=1.$$

$\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)\neq f(1)$, отже точка $x=1$ є точкою усувного розриву.

б) $y=arctg\dfrac{1}{x-2}$.

Розв'язання

Область визначення функції: $x-2\neq 0 \Rightarrow x\neq 2$.

$D(y): x\in(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

Обчислимо односторонні границі:

$$\lim_{x\to 2-0} arctg\frac{1}{x-2} = arctg\frac{1}{2-0-2} = arctg\left(\frac{1}{-0}\right) = arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{x\to 2+0} arctg\frac{1}{x-2} = arctg\frac{1}{2+0-2} = arctg\frac{1}{+0} = arctg\infty = \frac{\pi}{2}.$$

Односторонні границі є скінченними, але $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2+0} f(x)$, отже точка $x = 2$ – точка розриву І роду. Стрибок функції $\delta = \left|-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right| = |-\pi| = \pi$.

Приклад 1.8 Дослідити функції на неперервність та побудувати схематичний графік:

а) $y = \dfrac{x+1}{x-2}$;

Розв'язання

Область визначення функції: $x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

$D(f): x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

Обчислимо односторонні границі:

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{x+1}{x-2} = \frac{2-0+1}{2-0-2} = \frac{3}{-0} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 2+0} \frac{x+1}{x-2} = \frac{2+0+1}{2+0-2} = \frac{3}{+0} = \infty.$$

Обидві односторонні границі дорівнюють нескінченності, отже точка $x = 2$ є точкою розриву другого роду.

З'ясуємо, як веде себе функція за умови $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x-2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{2}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1;$$

$y \to 1$, якщо $x \to \infty$, тому $y = 1$ – рівняння горизонтальної асимптоти.

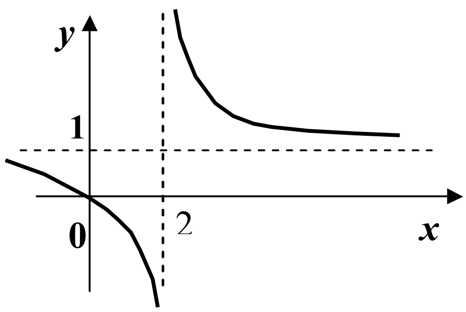
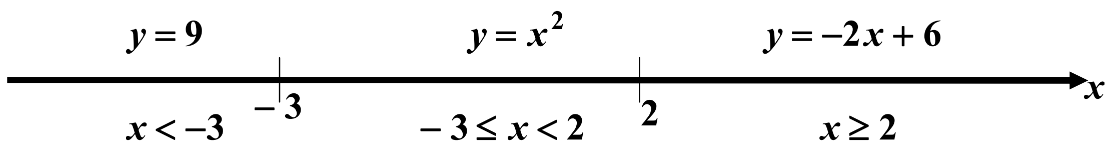


Рис.1.4

б) $f(x)=\begin{cases} 9, & x<-3, \\ x^2, & -3\le x<2, \\ -2x+6, & x\ge 2. \end{cases}$

Розв'язання

Для більшої наглядності нанесемо на числову вісь:



Необхідно дослідити функцію на неперервність в точках $x=-3$ і $x=2$.

$\lim\limits_{x\to -3-0} f(x)=\lim\limits_{x\to -3-0} 9=9$;

$\lim\limits_{x\to -3-0} f(x)=\lim\limits_{x\to -3+0} x^2=(-3+0)^2=9$;

$\lim\limits_{x\to -3-0} f(x)=\lim\limits_{x\to -3+0} f(x)=f(-3)=9$, отже функція неперервна в точці $x_0=-3$.

$\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-0} x^2=(2-0)^2=4$;

$\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+0}(-2x+6)=(-2\cdot(2+0)+6)=-4+6=2$.

Односторонні границі скінченні, але не є рівними, отже $x=2-$ точка розриву першого роду. Стрибок функції $\delta=|\,2-4\,|=|-2\,|=2$.

Схематичний графік функції має вигляд:

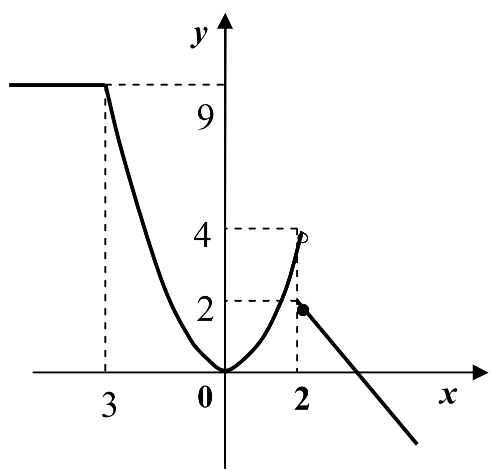


Рис.1.5

Завдання для самостійної роботи

Обчислити границі функції:

1. $\lim\limits_{x\to} \dfrac{14x^2+2x+5}{7x^3-x^2+x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{14x^3+2x+5}{7x^3-x^4+x}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{14x^3+2x^5+5}{7x^3-x^4+x}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^3+3x}-2}{x^2+x+1}$; 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)$; 6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+3}{5x-1}$;

7. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}$; 6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{3x^2-2x-8}$; 9. $\lim\limits_{x\to 0,5} \dfrac{4x^2-1}{2x^2-5x+2}$;

10. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{3+2x}-3}{x-3}$; 11. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{\sqrt{x+8}-3}$; 12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{\sin 5x}$;

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg 4x}{x^2-7x}$; 14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2}{1-\cos x}$; 15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{tgx-\sin x}$;

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 7x-\cos 3x}{1-\cos 2x}$; 17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 6x}{2x}$; 18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3arctgx}{\sqrt{4+x}-2}$;

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{4x}$; 20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x-5}\right)^{3x-1}$; 21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+7}{x^3+2}\right)^{\frac{x^2+1}{5}}$;

22. $\lim\limits_{x\to 1}(4x-3)^{\frac{x}{x^3-1}}$; 23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-2x)}{x}$; 24. $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\left(\ln x-\ln(x+2)\right)$.

Відповіді:

1. 2. ***2.*** 0. ***3.*** ∞. ***4.*** 0. ***5.*** 0. ***6.*** 1. ***7.*** 1/3. ***8.*** 6/5. ***9.*** $-4/3$. ***10.*** 1/3. ***11.*** 0. ***12.*** 4/5. ***13.*** $-4/7$. ***14.*** 4. ***15.*** 2. ***16.*** -10. ***17.*** 3. ***18.*** 12. ***19.*** e^{12}. ***20.*** e^6. ***21.*** e. ***22.*** e^{-4}. ***23.*** -2. ***24.*** -2.

2. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

2.1. Означення похідної

Розглянемо функцію $y = f(x)$, що визначена у деякому проміжку. Якщо аргумент x отримав приріст Δx, то функція y отримає приріст Δy, що дорівнює

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Означення. Похідною функції $y = f(x)$ у точці x називається границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx, коли цей приріст Δx прямує до нуля.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Похідну функції $y = f(x)$ позначають також іншими символами, наприклад $y', y'_x, \frac{dy}{dx}$.

Приклад. Знайти похідну функції $y = x^2$, використовуючи означення.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

2.2. Механічний та геометричний зміст похідної

Розглянемо прямолінійний рух матеріальної точки. Якщо закон руху $S = S(t)$, то швидкістю точки у момент часу t є $v(t) = S'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$. Отже швидкість руху є перша похідна шляху за часом. У цьому полягає механічний зміст похідної.

Розглянемо в прямокутній системі координат деяку криву, що задана рівнянням $y = f(x)$ і має в точці $M(x_0; y_0)$ не вертикальну дотичну (рис.2.1).

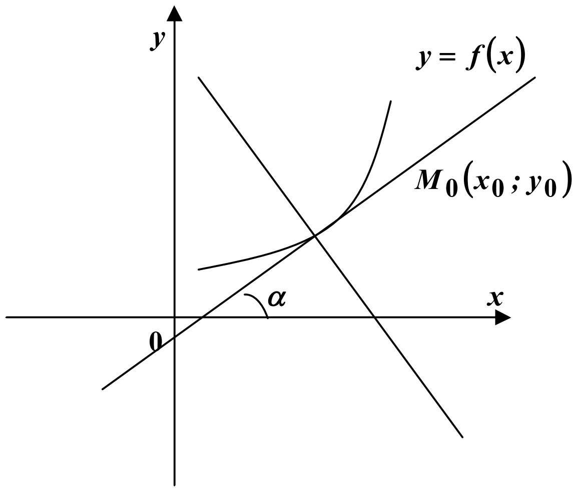


Рис. 2.1

Кутовий коефіцієнт цієї дотичної або тангенс кута α, що утворює дотична до кривої в даній точці з додатним напрямом осі $0x$, – це похідна $f'(x_0)$ в цій точці: $k = tg\alpha = f'(x_0)$. У цьому полягає ***геометричний зміст похідної.***

2.3. Таблиця похідних деяких елементарних функцій. Основні правила диференціювання

За означенням похідної можливо отримати формули для знаходження похідних деяких елементарних функцій:

1. $y = x, \quad y' = 1$;
2. $y = x^n, \quad y' = n \cdot x^{n-1}$;
3. $y = \sin x, \quad y' = \cos x$;
4. $y = \cos x, \quad y' = -\sin x$;
5. $y = tgx, \quad y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
6. $y = ctgx, \quad y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
7. $y = a^x, \quad y' = a^x \cdot \ln a$;
8. $y = e^x, \quad y' = e^x$;
9. $y = \log_a x, \quad y' = \dfrac{1}{x \ln a}$;
10. $y = ln\, x, \quad y' = \dfrac{1}{x}$;
11. $y = arcsin\, x, \quad y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
12. $y = arccos\, x, \quad y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
13. $y = arctgx, \quad y' = \dfrac{1`}{1+x^2}$;
14. $y = arcctgx, \quad y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Також при знаходженні похідних використовують основні правила диференціювання.

Правило 1. Похідна від сталої функції дорівнює нулю.

$$y = c, \qquad y' = 0.$$

Правило 2. Похідна від добутку сталої функції на диференційовану знаходиться за формулою:

$$y(x) = c \cdot u(x), \qquad y'(x) = c \cdot u'(x).$$

Правило 3. ***Похідна алгебраїчної суми двох диференційованих функцій дорівнює алгебраїчної сумі похідних доданків***

$$y(x) = u(x) \pm v(x), \qquad y'(x) = u'(x) \pm v'(x).$$

Правило 4. Похідна добутку двох диференційованих функцій знаходиться за формулою

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'.$$

Правило 5. Похідна частки двох диференційованих функцій знаходиться за формулою

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Зразки розв'язування задач

Знайти похідні функцій:

Приклад 1. $y = 3 + 4x - 5x^2 + \dfrac{4}{x} - \dfrac{5}{x^3} + 6\sqrt[3]{x^2} - \dfrac{8}{\sqrt[4]{x}}$.

Розв'язання

$$y' = (3)' + (4x)' - \left(5x^2\right)' + \left(4x^{-1}\right)^1 - \left(5x^{-3}\right) + \left(6x^{\frac{2}{3}}\right)' - \left(8x^{-\frac{1}{4}}\right)' =$$

$$= 4 - 5 \cdot 2x + 4(-1)x^{-2} - 5(-3)x^{-4} + 6 \cdot \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - 8\left(-\frac{1}{4}\right)x^{-\frac{5}{4}} =$$

$$= 4 - 10x - \frac{4}{x^2} + \frac{15}{x^4} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{\sqrt[4]{x^5}}.$$

Приклад 2. $y = x^3 \sin x$.

Розв'язання

$$y' = \left(x^3\right)' \sin x + x^3(\sin x)' = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x.$$

Приклад 3. $y=\dfrac{3\ln x+5}{4x-2e^x}$.

Розв'язання

$$y'=\frac{(3\ln x+5)'(4x-2e^x)-(3\ln x+5)(4x-2e^x)'}{(4x-2e^x)^2}=$$

$$=\frac{\frac{3}{x}\cdot(4x-2e^x)-(3\ln x+5)(4-2e^x)}{(4x-2e^x)^2}.$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти похідні функцій:

Приклад 1. $y=3-4x+\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{5}{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{4}{\sqrt[5]{x}}$.

Відповідь: $y'=-4+\dfrac{2x}{3}+\dfrac{20}{x^5}+\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}-\dfrac{4}{5\sqrt[5]{x^6}}$.

Приклад 2. $y=\dfrac{x}{m}+\dfrac{m}{x}+\dfrac{x^2}{n^2}+\dfrac{n^2}{x^2}$.

Відповідь: $y'=\dfrac{1}{m}-\dfrac{m}{x^2}+\dfrac{2x}{n^2}-\dfrac{2n^2}{x^3}$.

Приклад 3. $y=(x^2-5x)\sin x$.

Відповідь: $y=(2x-5)\sin x+(x^2-5x)\cos x$.

Приклад 4. $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Відповідь: $y'=\dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$.

2.4. Похідна від складної функції

Розглянемо складну функцію y від x $y=F(u)$, де $u=\varphi(x)$.

Якщо функція $u = \varphi(x)$ має у точці x похідну $u'_x = \varphi'(x)$, функція $y = F(u)$ має при відповідному значенні u похідну $y'_u = F'(u)$, то складна функція $y = F[\varphi(x)]$ має у точці x похідну, яка дорівнює

$$y'_x = F'_u(u) \cdot \varphi'(x) = y'_u \cdot u'_x .$$

Зразки розв'язування задач

Приклад 1. $y = \sin 3x$.

Розв'язання

$$y' = \cos 3x \cdot (3x)' = \cos 3x \cdot 3 .$$

Приклад 2. $y = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$.

Розв'язання

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 4x + 5}} \cdot \left(x^2 + 4x + 5\right)' = \frac{2x + 4}{2\sqrt{x^2 + 4x + 5}} = \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} .$$

Приклад 3. $y = tg^3 5x$.

Розв'язання

$$y' = 3(tg5x)^2 \cdot (tg5x)' = 3tg^2 5x \cdot \frac{1}{\cos^2 5x} \cdot 5 .$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти похідні функцій:

Приклад 1. $y = \ln(1 - 6x)$.

Відповідь: $y' = \dfrac{-6}{1 - 6x}$.

Приклад 2. $y = \sqrt[3]{1 - tgx}$.

Відповідь: $y' = -\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1 - tgx)^2} \cdot \cos^2 x}$.

Приклад 3. $y = ctg^4 2x$.

Відповідь: $y' = -\dfrac{8ctg^3 2x}{sin^2 2x}$.

Приклад 4. $y = log_3 arcsin\dfrac{x}{2}$.

Відповідь: $y' = \dfrac{1}{2\,ln\,3\,arcsin\dfrac{x}{2}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}}$.

Приклад 5. $y = x \cdot e^{ctg3x}$.

Відповідь: $y' = e^{ctg3x}\left(1 - \dfrac{3x}{sin^2 3x}\right)$.

Приклад 6. $y = \dfrac{sin\,5x}{3^{1-x^3}}$.

Відповідь: $y' = \dfrac{5\,cos\,5x + 3\,ln\,3x^2 \cdot sin\,5x}{3^{1-x^3}}$.

2.5. Неявна функція та її диференціювання

Розглянемо значення двох змінних, що зв'язані між собою рівнянням $F(x, y) = 0$.

У такому випадку кажуть, що задана неявна функція y від x.

Для того, щоб знайти похідну такої функції треба:

а) продиференціювати ліву та праву частини рівняння по x, враховуючи, що y залежить від x,

б) розв'язати отримане рівняння відносно y'_x.

Зразки розв'язування задач

Приклад 1. $x^2 + y^2 - a^2 = 0$.

Розв'язання

а) $\left(x^2\right)'_x + \left(y^2\right)'_x - \left(a^2\right)'_x = (0)'_x$, б) $y \cdot y'_x = -x, \quad y'_x = -\dfrac{x}{y}.$

Приклад 2. $xy - \sin x = \cos y$.

Розв'язання

а) $(x)'_x \cdot y + x \cdot (y)'_x - \cos x = -\sin y \cdot y'_x,$

$1 \cdot y + x \cdot y'_x - \cos x + \sin y \cdot y'_x = 0,$

б) $y'_x(x + \sin y) = \cos x - y,$

$$y'_x = \frac{\cos x - y}{x + \sin y}.$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти похідні неявних функцій:

Приклад 1. $y = x^3 - 4y^5 - b^3$.

Відповідь: $y' = \dfrac{3x^2}{1 + 20y^4}$.

Приклад 2. $x^2 y + \cos 3x = \cos 3y$.

Відповідь: $y' = \dfrac{3\sin 3x - 2xy}{x^2 + 3\sin 3y}$.

Приклад 3. $x \sin(1 + 2y) = ay^2$.

Відповідь: $y' = \dfrac{\sin(1 + 2y)}{2(ay - x\cos(1 + 2y))}$.

2.6. Метод логарифмічного диференціювання для знаходження похідної степенево-показникової функції

Розглянемо степенево-показникову функцію $y = [u(x)]^{\varphi(x)}$. Щоб знайти похідну цієї функції треба:

а) прологарифмувати ліву та праву частину рівняння за основою e

$$\ln y = \ln\left([u(x)]^{\varphi(x)}\right) = \varphi(x) \cdot \ln u(x);$$

б) продиференціювати по x

$$(\ln y)'_x=\varphi'(x)\cdot \ln u(x)+\varphi(x)\cdot(\ln u(x))',$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'_x=\varphi'(x)\cdot \ln u(x)+\varphi(x)\cdot\frac{1}{u(x)}\cdot u'(x);$$

в) знайти з рівняння y'_x

$$y'_x=y\cdot\left(\varphi'(x)\cdot \ln u(x)+\frac{\varphi(x)\cdot u'(x)}{u(x)}\right)=[u(x)]^{\varphi(x)}\cdot\left(\varphi'(x)\cdot \ln u(x)+\frac{\varphi(x)\cdot u'(x)}{u(x)}\right).$$

Зразки розв'язування задач

Приклад. Знайти похідну функції

1. $y=\left(x^2+3\right)^{\cos 2x}$.

Розв'язання

а) $\ln y=\ln\left(\left(x^2+3\right)^{\cos 2x}\right)=\cos 2x\cdot\ln\left(x^2+3\right);$

б) $\frac{1}{y}\cdot y'_x=(\cos 2x)'\cdot\ln\left(x^2+3\right)+\cos 2x\cdot\left(\ln\left(x^2+3\right)\right)',$

$$\frac{y'_x}{y}=-\sin 2x\cdot 2\cdot\ln\left(x^2+3\right)+\cos 2x\cdot\frac{1}{x^2+3}\cdot 2x;$$

в) $y'_x=\left(x^2+3\right)^{\cos 2x}\cdot\left(-2\sin 2x\cdot\ln\left(x^2+3\right)+\frac{2x\cdot\cos 2x}{x^2+3}\right).$

2. $y=\frac{(x+1)^3\sqrt{3x+4}}{(x-5)^2\cdot e^{2x}}$.

а) $\ln y=\ln\left(\frac{(x+1)^3\sqrt{3x+4}}{(x-5)^2\cdot e^{2x}}\right)=\ln(x+1)^3+\ln\sqrt{3x+4}-\ln(x-5)^2-$

$$-\ln\left(e^{2x}\right)=3\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(3x+4)-2\ln(x-5)-2x;$$

б) $\frac{1}{y}\cdot y'_x=3\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(3x+4)}-2\cdot\frac{1}{x-5}-2;$

в) $y'_x=\frac{(x+1)^3\sqrt{3x+4}}{(x-5)^2\cdot e^{2x}}\cdot\left(\frac{3}{x+1}+\frac{1}{2(3x+4)}-\frac{2}{x-5}-2\right).$

Завдання для самостійної роботи

Знайти похідні функцій методом логарифмічного диференціювання.

Приклад 1. $y = x^{\frac{1}{x}}$.

Відповідь: $y' = \dfrac{x^{\frac{1}{x}}(1 - \ln x)}{x^2}$.

Приклад 2. $y = (\cos 4x)^{x^2+5}$.

Відповідь: $y' = (\cos 4x)^{x^2+5}\left(2x \ln\cos 4x - \dfrac{4(x^2+5)\sin 4x}{\cos 4x}\right)$.

Приклад 3. $y = \dfrac{x^2 e^{4x}}{\sqrt{5-2x}}$.

Відповідь: $y' = \dfrac{x^2 e^{4x}}{\sqrt{5-2x}}\left(\dfrac{2}{x} + 4 + \dfrac{1}{5-2x}\right)$.

Приклад 4. $y = x^5(a+3x)^2(a-2x)^3$.

Відповідь: $y' = x^5(a+3x)^2(a-2x)^3\left(\dfrac{5}{x} + \dfrac{6}{a+3x} - \dfrac{6}{a-2x}\right)$.

2.7. Похідні та диференціали вищих порядків

Розглянемо диференційовану функцію $y = f(x)$ на відрізку $[a,b]$.

Означення. Диференціалом функції $y = f(x)$ називається $dy = f'(x)dx$.

Означення . Другою похідною функції називається
$y'' = f''(x) = (y')' = (f'(x))'$. Аналогічно $y''' = (y'')', \ldots y^{(n)} = (y^{n-1})'$.

Означення. Другим диференціалом функції $y = f(x)$ називається
$d^2 y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)' dx = f''(x)\cdot(dx)^2$.

Аналогічно $d^3 y = f'''(x)\cdot(\Delta x)^3 \ldots d^{(n)} y = y^{(n)}\cdot(dn)^n$.

Звідки $y'' = \dfrac{d^2 y}{dx^2}$, $y''' = \dfrac{d^3 y}{dx^3}, \dots y^{(n)} = \dfrac{d^{(n)} y}{dx^n}$.

Зразки розв'язування задач

Приклад 1. Знайти похідні та диференціали усіх порядків функції $y = 15x^2 - 8x + 1$.

Розв'язання

$y' = 30x - 8;\quad dy = (30x - 8)dx$,

$y'' = 30;\quad dy = 30(dx)^2$,

$y''' = y^{IV} = \dots y^{(n)} = 0,\quad d^{(n)}y = 0,\quad n = 3,4,5,\dots$.

Приклад 2. Знайти другу похідну та другий диференціал функції $y = \arcsin\sqrt{x}$.

Розв'язання

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}},$$

$$y'' = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x-x^2\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{2x-1}{4\sqrt{\left(x-x^2\right)^3}},$$

$$d^2y = \frac{(2x-1)(dx)^2}{4\sqrt{\left(x-x^2\right)^3}}.$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти другі похідні та другі диференціали функцій.

Приклад 1. $y = \sqrt[4]{x^3}$.

Відповідь: $y'' = -\dfrac{3}{16\sqrt[4]{x^5}}$, $d^2y = -\dfrac{3(dx)^2}{16\sqrt[4]{x^5}}$.

Приклад 2. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Відповідь: $y'' = \dfrac{-a^2}{\left(a^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, $d^2 y = -\dfrac{a^2 (dx)^2}{\left(a^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

Приклад 3. $y = e^{\frac{1}{x}}$.

Відповідь: $y'' = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}(1+2x)}{x^4}$, $d^2 y = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}(1+2x)(dx)^2}{x^4}$.

Приклад 4. $y = arctg\, x^2$.

Відповідь: $y'' = \dfrac{2-6x^4}{\left(1+x^4\right)^2}$, $d^2 y = \dfrac{\left(2-6x^4\right)(dx)^2}{\left(1+x^4\right)}$.

2.8. Перша та друга похідні параметрично заданої функції

Розглянемо функцію y від x, що задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \qquad t_1 \le t \le t_2.$$

Якщо функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – диференційовані, функція $x = \varphi(t)$ має обернену диференційовану функцію, то маємо формулу для обчислення похідної y від x

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Позначивши $\dfrac{y'_t}{x'_t}$ через $F(t)$, для другої похідної маємо:

$$y''_{xx} = \frac{F'_t}{x'_t}.$$

Зразки для розв'язування задач

Знайти y'_x, y''_{xx} для функцій:

Приклад 1. $\begin{cases} x = 3t^2 + 2 \\ y = 5 - 4t^3 \end{cases}.$

Розв'язання

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-12t^2}{6t} = -2t = F(t),$$

$$y''_{xx} = \frac{F'_t}{x'_t} = \frac{-2}{6t} = -\frac{1}{3t}.$$

Приклад 2. $\begin{cases} x = a\,cos^3\,t \\ y = a\,sin^3\,t \end{cases}.$

Розв'язання

$$y'_X = \frac{3a\,sin^2 \cdot cos\,t}{3a\,cos^2\,t(-sin\,t)} = -\frac{sin\,t}{cos\,t} = -tgt = F(t),$$

$$y''_{XX} = \frac{\left(-\frac{1}{cos^2\,t}\right)}{3a\,cos^2\,t(-sin\,t)} = \frac{1}{3a\,cos^4\,t\,sin\,t}.$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти y'_x, y''_{xx} функцій, заданих параметрично.

Приклад 1. $\begin{cases} x = \sqrt{1 - t^2} \\ y = \arcsin t \end{cases}.$

Відповідь: $y'_x = -\frac{1}{t}$; $y''_{xx} = -\frac{\sqrt{1 - t^2}}{t^3}$.

Приклад 2. $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \ln\left(t^3 + 1\right) \end{cases}.$

Відповідь: $y'_x = \frac{3t^3}{t^3 + 1}$; $y''_{xx} = \frac{9t^3}{\left(t^3 + 1\right)^2}$.

Приклад 3. $\begin{cases} x = a\cos 2t \\ y = a\sin t \end{cases}$.

Відповідь: $y'_x = -\dfrac{1}{4\sin t}$; $y''_{xx} = -\dfrac{1}{16a\sin^3 t}$.

Приклад 4. $\begin{cases} x = arctg\sqrt{t} \\ y = \ln(t+1) \end{cases}$.

Відповідь: $y'_x = 2\sqrt{t}$; $y''_{xx} = 2(t+1)$.

2.9. Друга похідна неявно заданої функції

При визначенні другої похідної неявно заданої функції диференціюємо за змінною x вираз, що задає першу похідну цієї функції з урахуванням того, що змінна y не є незалежною. Безпосередньо після диференціювання отримуємо для другої похідної вираз, що містить x, y та y'; цей вираз перетворюється з урахуванням явного виразу першої похідної y' через змінні x, y. Бажано також спростити отриманий вираз для другої похідної з урахуванням рівняння, що задає розглядувану функцію (якщо є така можливість).

Зразки для розв'язування задач

Знайти другі похідні для функцій:

Приклад 1. $a^2x^2 + b^2y^2 = c^2$.

Розв'язання

$$a^2 \cdot 2x + b^2 \cdot 2y\, y' = 0,$$

$$y' = -\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{x}{y},$$

$$y'' = -\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{1 \cdot y - x \cdot y'}{y^2} = -\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y - x \cdot \left(-\dfrac{a^2}{b^2} \cdot \dfrac{x}{y}\right)}{y^2} =$$

$$= -\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{\frac{b^2y^2 + a^2x^2}{b^2y}}{y^2} = -\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^2y^2 + a^2x^2}{b^2y^3} = -\frac{a^2}{b^4} \cdot \frac{b^2y^2 + a^2x^2}{y^3}.$$

З урахуванням того, що $a^2x^2 + b^2y^2 = c^2$, отримаємо остаточно

$$y'' = -\frac{a^2c^2}{b^4} \cdot \frac{1}{y^3}.$$

Приклад 2. $\quad y = tg(x + y).$

Розв'язання

$$y' = \frac{1}{\cos^2(x + y)} \cdot (1 + y'),$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2(x + y)} + \frac{y'}{\cos^2(x + y)},$$

$$y'\left(1 - \frac{1}{\cos^2(x + y)}\right) = \frac{1}{\cos^2(x + y)},$$

$$y' \cdot \left(-\frac{\sin^2(x + y)}{\cos^2(x + y)}\right) = \frac{1}{\cos^2(x + y)},$$

$$y' = -\frac{1}{\sin^2(x + y)}.$$

З урахуванням того, що $tg(x + y) = y$ (за умовою) та $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{1 + tg^2\alpha}{tg^2\alpha}$,

отримаємо остаточно

$$y' = -\frac{1 + y^2}{y^2}.$$

Тоді

$$y'' = -\frac{2yy' \cdot y^2 - (1 + y^2) \cdot 2yy'}{y^4} = -\frac{2yy' \cdot (y^2 - 1 - y^2)}{y^4} = \frac{2y'}{y^3} = -\frac{2(1 + y^2)}{y^5}.$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти другі похідні неявно заданих функцій.

Приклад 1. $y^2 = 2px$

Відповідь. $y'' = -\frac{p^2}{y^3}$

Приклад 2. $x^2 - y^2 = 9$

Відповідь. $y'' = -\frac{9}{y^3}$

ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик В.П., Юрик І І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2005. – 648 с.

2. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін. За ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. – К.: Видавництво А.С.К., 2003. – 480 с.

3. Тріщ Б.М. Основи вищої математики. – Львів: ЛНУ, 2008. – 403 с.

4. Письменный Д.Г. Конспект лекций по высшей математике полный курс / Дмитрий Письменный. – 7-е изд. М.: Айрис - пресс. 2008. – 608 с.

5. Клепко В.Ю, Голець В.Л. Вища математика в прикладах і задачах. – 2-ге видання. – К.: Центр учбової літератури, 2009. – 594 с.

Навчальне видання

Запорожченко Олена Євгенівна
Білова Оксана Вікторівна
Сушко Лариса Федорівна
Кочеткова Інна Борисівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 2

Навчальний посібник

Тем. план 2017, поз.

Підписано до друку. Формат 60х84 1/16. Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид. арк.. Умов. друк. арк.. Тираж пр. Замовлення №
Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпро-5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ