МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

І.Б. КОЧЕТКОВА, Л.Ф. СУШКО

ВИЩА МАТЕМАТИКА В ФОРМУЛАХ ТА ТАБЛИЦЯХ

Частина 1

Затверджено на засіданні Вченої ради академії
як навчальний посібник-довідник. Протокол № 1 від 14.01.2013

Дніпропетровськ НМетАУ 2013

УДК 517(07)
Вища математика в формулах та таблицях. Ч.1: Навч. посібник - довідник/ І.Б. Кочеткова, Л.Ф. Сушко - Дніпропетровськ: НМетАУ, 2013.- 49 с.

Наведені основні означення, теоретичні положення та формули з розділів «Алгебра та аналітична геометрія», «Функції та границі», «Похідні та їх застосування», «Функції декількох змінних» та «Комплексні числа».

Призначений для студентів усіх напрямів.

Бібліогр.: 6 найм.

Друкується за авторською редакцією.

Відповідальний за випуск А.В. Павленко, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рецензенти: І.Ю. Гергель, канд. фіз.-мат. наук, доц. (ДНУ)
Т.С. Кагадій, д-р фіз.-мат. наук, проф. (НГУ)

Розділ 1

АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

1.1. Матриці та визначники. Системи лінійних рівнянь

Визначники

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ – визначник n-го порядку

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ – мінор елемента a_{ij}

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ –алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}

Обчислення визначників

Визначники другого порядку $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
Визначники третього порядку (розкладання за елементами першого рядка) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$
Визначники n-го порядку. Розкладання за елементами i-го рядка: $\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$. Розкладання за елементами j-го стовпця: $\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$.

Матриці та дії над ними

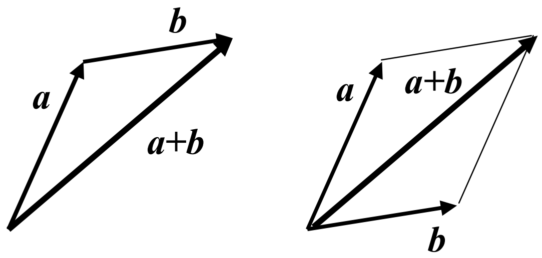
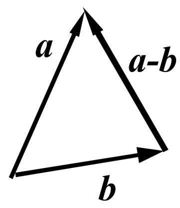
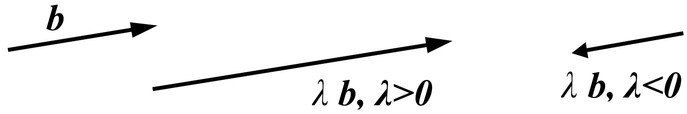
Матриця ***розмірності*** $n \times m$ $$A[n \times m] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$	Матриця n-го ***порядку*** (квадратна) $$A[n \times n] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
Сума та ***різниця*** матриць $A[n \times m] \pm B[n \times m] = C[n \times m]$, якщо $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$	***Множення*** на ***число*** $\lambda A[n \times m] = C[n \times m]$, якщо $c_{ij} = \lambda a_{ij}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$
Добуток матриць $A[n \times k] B[k \times m] = C[n \times m]$, якщо $c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} b_{lj}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$	***Обернена*** матриця (до квадратної) $B = A^{-1}$ (тобто $AB = BA = E$), якщо $b_{ij} = \dfrac{A_{ji}}{\Delta_A}$, $i, j = \overline{1,n}$ (A_{ji}–алгебраїчне доповнення елемента a_{ji}; E–одинична матриця)

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

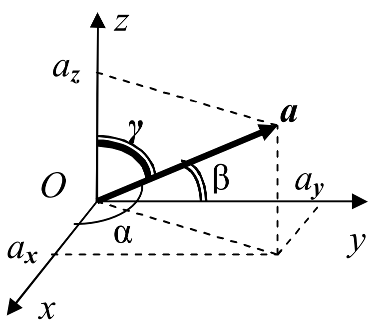
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$	
Метод Крамера розв’язування систем $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta(A)}$, $j = \overline{1,n}$ $$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$	Матричний метод $$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}B$$

1.2. Основи векторної алгебри

Дії над векторами

Додавання векторів 	***Віднімання*** векторів 
Множення на ***число*** 	

Вектори в декартовій системі координат

	$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k} = (a_x; a_y; a_z)$
Довжина вектора	$\lvert \bar{a} \rvert = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$
Напрямні косинуси	$\cos\alpha = \frac{a_x}{\lvert \bar{a} \rvert}$; $\cos\beta = \frac{a_y}{\lvert \bar{a} \rvert}$; $\cos\gamma = \frac{a_z}{\lvert \bar{a} \rvert}$
Зв'язок між координатами вектора і координатами точки $\overline{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$	
Дії над векторами, заданими в координатній формі: $\bar{a} + \bar{b} = (a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z)$; $\bar{a} - \bar{b} = (a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z)$; $\lambda \bar{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)$	
Умова колінеарності векторів	$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$

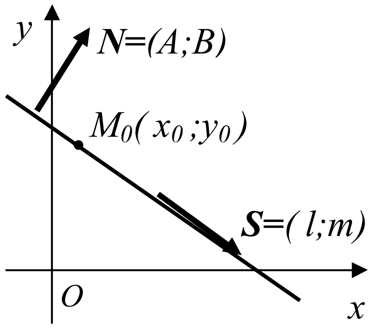
Скалярний та векторний добутки векторів

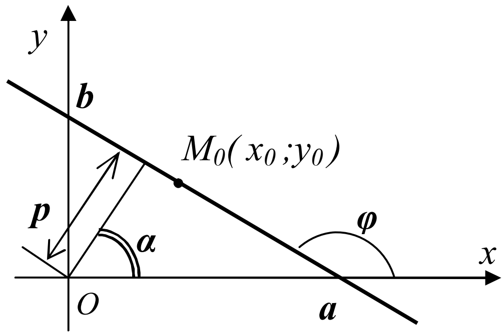
Добуток	скалярний	векторний
Позначення	$\vec{a}\cdot\vec{b}$, $(\vec{a},\vec{b})$	$\vec{a}\times\vec{b}$, $[\vec{a},\vec{b}]$
Тип величини	число	вектор
Означення	$\lvert\vec{a}\rvert\,\lvert\vec{b}\rvert\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$	$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, якщо: вектор $\vec{c}$ перпендикулярний векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$; $\lvert\vec{c}\rvert=\lvert\vec{a}\rvert\,\lvert\vec{b}\rvert\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$; трійка векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – права
Властивості	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$ $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ $\vec{a}\cdot\vec{a}=\lvert\vec{a}\rvert^2$	$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$ $\vec{a}\times\vec{a}=0$
Добутки ортів	$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$ $\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{i}=\vec{k}\cdot\vec{j}=0$	$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$ $\rightarrow+\quad \vec{i}\;\vec{j}\;\vec{k}\;\vec{i}\;\vec{j}\quad\leftarrow-$
Обчислення в ДСК	$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$	$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$
Основні задачі	довжина вектора $\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$ косинус куту між векторами $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\,\lvert\vec{b}\rvert}$ проекція вектора на інший вектор $np_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{b}\rvert}$ умова перпендикулярності $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$	площа параллелограма з сторонами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ $S=\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert$ площа трикутника $S_\Delta=\dfrac{\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert}{2}$ висота параллелограма $h_a=\dfrac{S}{\lvert\vec{a}\rvert}=\dfrac{\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert}{\lvert\vec{a}\rvert}$ висота трикутника $h_a=\dfrac{2S_\Delta}{\lvert\vec{a}\rvert}=\dfrac{\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert}{\lvert\vec{a}\rvert}$

Мішаний добуток векторів

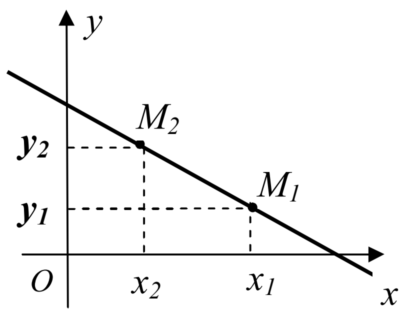
Позначення	$\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ або $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$
Означення	$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$
Властивості	$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}$
Обчислення у ДСК	$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$
Основні задачі	умова компланарності трьох векторів $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$ орієнтація трійки векторів: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}>0$ − права трійка ; $\vec{a}\vec{b}\vec{c}<0$ − ліва трійка об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ $V_{паралелепіпеда}=\left\lvert\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right\rvert$ об'єм піраміди, побудованої на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ $V_{піраміди}=\frac{1}{6}\left\lvert\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right\rvert$ висота паралелепіпеда $h=\frac{V_{паралелепіпеда}}{S_{грані}}=\frac{\left\lvert\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right\rvert}{\left\lvert\vec{a}\times\vec{b}\right\rvert}$ висота піраміди $h=\frac{3V_{піраміди}}{S_{грані}}=\frac{\left\lvert\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right\rvert}{\left\lvert\vec{a}\times\vec{b}\right\rvert}$

1.3. Прямі на площині





Основні види рівняння прямої

Найпростіше рівняння $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$	Рівняння з кутовим коефіцієнтом $y=kx+b$, $k=tg\varphi$
Загальне рівняння $Ax+By+C=0$	Рівняння прямої, яка проходить у заданному напряму (рівняння в'язки) $y-y_0=k(x-x_0)$
Рівняння у відрізках на осях $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (перехід: $Ax+By=-C \quad \vert :(-C)$)	Нормальне рівняння $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ (перехід: $Ax+By+C=0 \quad \vert \cdot \mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$)
Канонічне рівняння $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$	Рівняння прямої, яка проходить через дві точки $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$; $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 
Рівняння координатних осей	<u>*Ox*</u>: $y=0$; <u>*Oy*</u>: $x=0$

Найпростіші задачі

Умова паралельності прямих	$k_2 = k_1$ або $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$
Умова перпендикулярності прямих	$k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$ або $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$
Кут між прямими (гострий)	$tg\phi = \left\| \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right\| = \left\| \dfrac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} \right\|$
Відстань від точки M до прямої	$d(M) = \left\| x_M \cos\alpha + y_M \sin\alpha - p \right\|$ або $d(M) = \dfrac{\left\| A x_M + B y_M + C \right\|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

1.4. Криві другого порядку

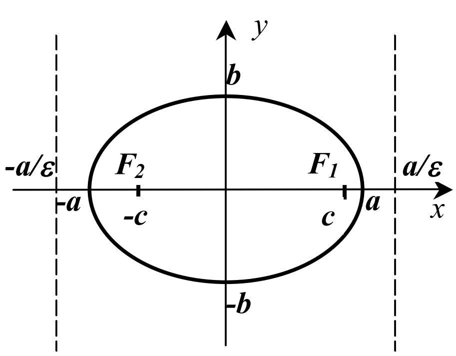
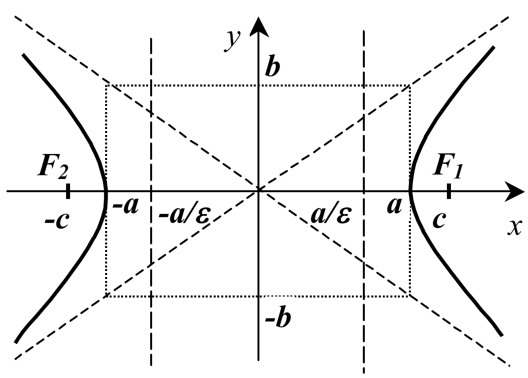
Класифікация кривих,

осі симетрії яких паралельні координатним осям

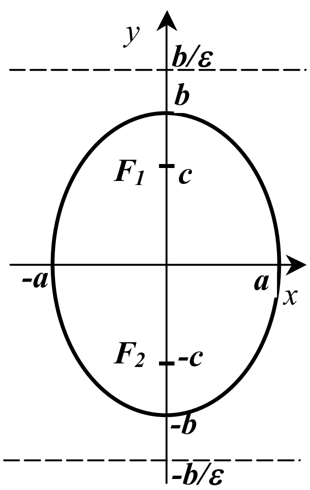
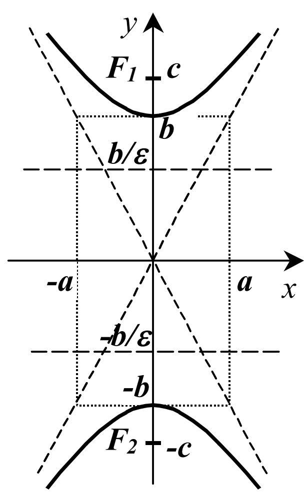
$$\underline{A x^2 + B y^2 + C x + D y + E = 0}$$

Ознака	**Назва лінії**
$A = B$	Коло
$A \neq B$, знаки A і B однакові	Еліпс
Знаки A і B різні	Гіпербола
$A = 0$ або $B = 0$	Парабола

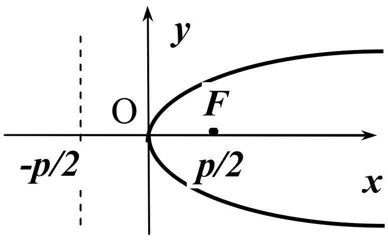
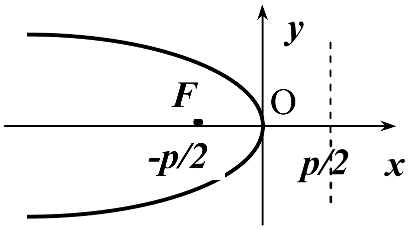
Эліпс і гіпербола з фокусами на осі Ох

Крива	Эліпс	Гіпербола
Рівняння	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>b$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
Піввісі (**2*a*, 2*b*** –вісі*)*	***a*** –велика ***b*** –мала	***a*** – дійсна ***b*** – уявна
Відстань від центра до фокусів	$c=\sqrt{a^2-b^2}$	$c=\sqrt{a^2+b^2}$
Координати фокусів	$F_1(c;\,0);\ F_2(-c;\,0)$	$F_1(c;\,0);\ F_2(-c;\,0)$
Ексцентри-ситет	$\varepsilon=\frac{c}{a}\quad(\varepsilon<1)$	$\varepsilon=\frac{c}{a}\quad(\varepsilon>1)$
Рівняння директрис	$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}\quad\left(x=\pm\frac{a^2}{c}\right)$	$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}\quad\left(x=\pm\frac{a^2}{c}\right)$
Рівняння асимптот	—	$y=\pm\frac{b}{a}x$
Відстані від точки М до фокусів	$F_1M=r_1=a-\varepsilon\,x_M$ $F_2M=r_2=a+\varepsilon\,x_M$	$F_1M=r_1=\lvert a-\varepsilon\,x_M\rvert$ $F_2M=r_2=\lvert a+\varepsilon\,x_M\rvert$
Рисунок		

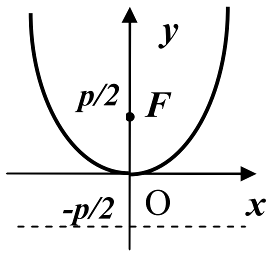
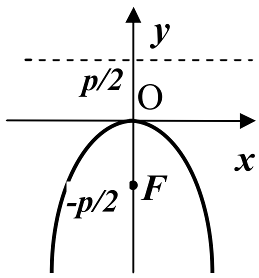
Эліпс і гіпербола з фокусами на осі Oy

Крива	Эліпс	Гіпербола
Рівняння	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ a<b$	$-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$
Піввісі **(2*a*, 2*b*** –вісі***)***	***a*** – мала ***b*** – велика	***a*** – уявна ***b*** –дійсна
Відстань від центра до фокусів	$c=\sqrt{b^2-a^2}$	$c=\sqrt{a^2+b^2}$
Координати фокусів	$F_1(0;c);F_2(0;\ -c)$	$F_1(0;c);F_2(0;\ -c)$
Ексцентри-ситет	$\varepsilon=\dfrac{c}{b}\quad(\varepsilon<1)$	$\varepsilon=\dfrac{c}{b}\quad(\varepsilon>1)$
Рівняння директрис	$x=\pm\dfrac{b}{\varepsilon}\quad\left(x=\pm\dfrac{b^2}{c}\right)$	$x=\pm\dfrac{b}{\varepsilon}\quad\left(x=\pm\dfrac{b^2}{c}\right)$
Рівняння асимптот	—	$y=\pm\dfrac{b}{a}x$
Відстані від точки М до фокусів	$F_1M=r_1=b-\varepsilon\, y_M$ $F_2M=r_2=b+\varepsilon\, y_M$	$F_1M=r_1=\lvert b-\varepsilon\, y_M\rvert$ $F_2M=r_2=\lvert b+\varepsilon\, y_M\rvert$
Рисунок		

Параболи, симетричні відносно осі Ox

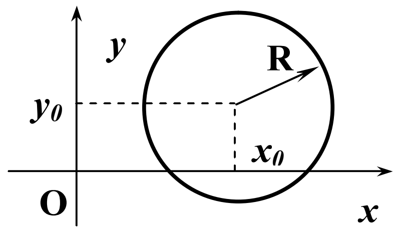
Рівняння	$y^2 = 2px$	$y^2 = -2px$
Координати фокуса	$F\left(\frac{p}{2};0\right)$	$F\left(-\frac{p}{2};0\right)$
Рівняння директриси	$x = -\frac{p}{2}$	$x = \frac{p}{2}$
Рисунок		

Параболи, симетричні відносно осі Oy

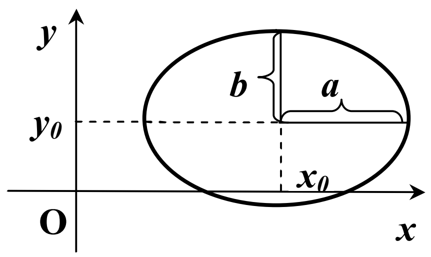
Рівняння	$x^2 = 2py$	$x^2 = -2py$
Координати фокуса	$F\left(0;\frac{p}{2}\right)$	$F\left(0;-\frac{p}{2}\right)$
Рівняння директриси	$y = -\frac{p}{2}$	$y = \frac{p}{2}$
Рисунок		

Зсунені криві

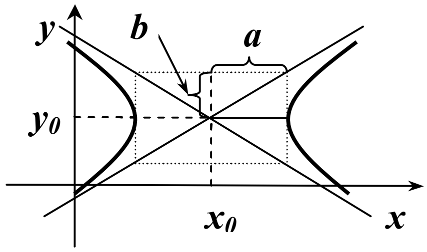
Коло $\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2=R^2$



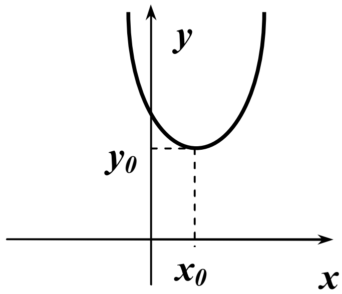
Еліпс $\dfrac{\left(x-x_0\right)^2}{a^2}+\dfrac{\left(y-y_0\right)^2}{b^2}=1$



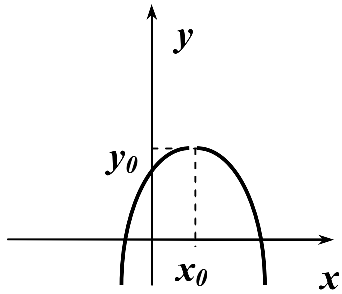
Гіпербола $\dfrac{\left(x-x_0\right)^2}{a^2}-\dfrac{\left(y-y_0\right)^2}{b^2}=1$



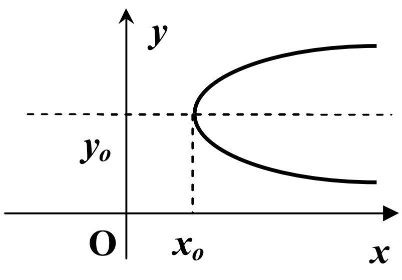
Параболи $\left(x-x_0\right)^2=2p\left(y-y_0\right)$



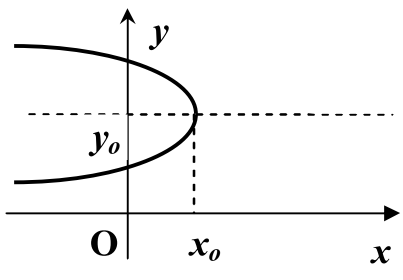
$\left(x-x_0\right)^2=-2p\left(y-y_0\right)$



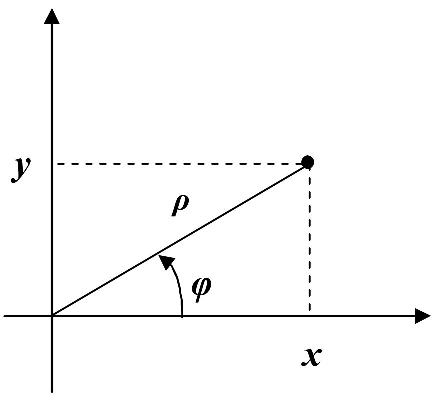
$\left(y-y_0\right)^2=2p\left(x-x_0\right)$



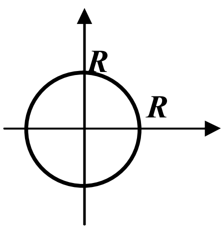
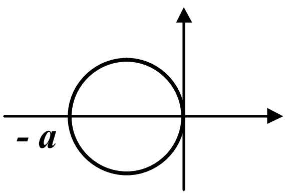
$\left(y-y_0\right)^2=-2p\left(x-x_0\right)$

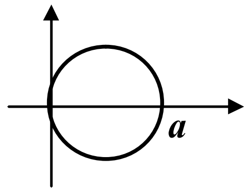
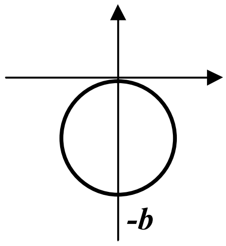
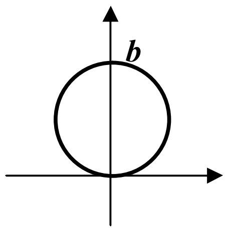
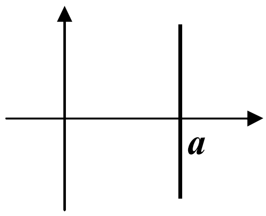
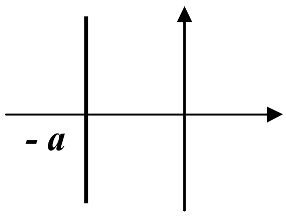
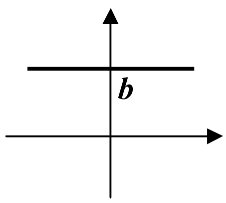
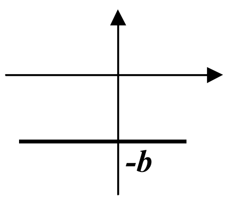
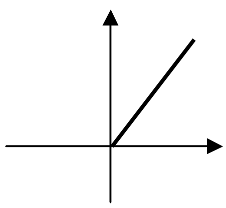


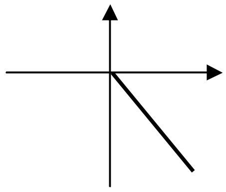
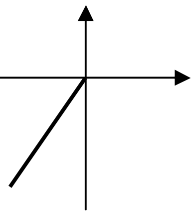
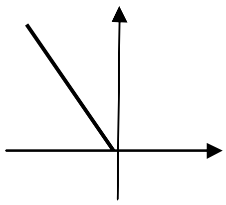
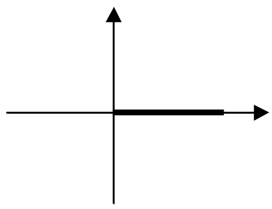
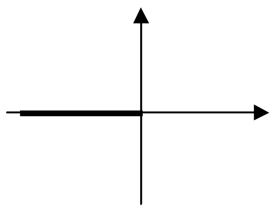
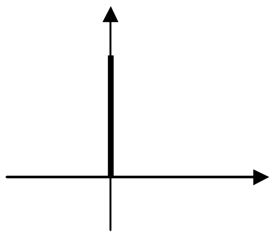
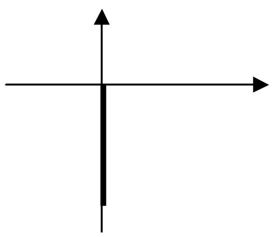
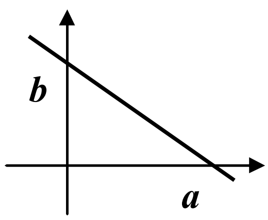
1.5.Полярні координати

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td>$x=\rho\cos\varphi$; $y=\rho\sin\varphi$</td></tr>
<tr><td>$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$;
$$\varphi=\begin{cases}+\arccos\dfrac{x}{\rho},\ y\ge 0\\ -\arccos\dfrac{x}{\rho},\ y<0\end{cases},\ \varphi\in(-\pi\,;\pi\,]$$
або
$$\varphi=\begin{cases}\arccos\dfrac{x}{\rho},\ y\ge 0\\ 2\pi-\arccos\dfrac{x}{\rho},\ y<0\end{cases},\ \varphi\in[\,0\,;2\pi)$$</td></tr>
</table>

Коло та пряма в полярних координатах

Рівняння в декартових координатах	Рисунок	Рівняння в полярних координатах
$x^2+y^2=R^2$		$\rho=R$ $(0\le\varphi\le 2\pi$ або $-\pi\le\varphi\le\pi)$
$x^2+y^2+ax=0$		$\rho=-a\cos\varphi$ $\left(\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{3\pi}{2}\right)$

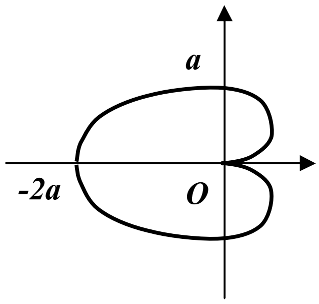
$x^2+y^2-ax=0$		$\rho=a\cos\varphi$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\right)$
$x^2+y^2+by=0$		$\rho=-b\sin\varphi$ $(-\pi\le\varphi\le 0$ або $\pi\le\varphi\le 2\pi)$
$x^2+y^2-by=0$		$\rho=b\sin\varphi$ $(0\le\varphi\le\pi)$
$x=a$		$\rho=\dfrac{a}{\cos\varphi}$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\right)$
$x=-a$		$\rho=-\dfrac{a}{\cos\varphi}$ $\left(\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{3\pi}{2}\right)$
$y=b$		$\rho=\dfrac{b}{\sin\varphi}$ $(0\le\varphi\le\pi)$
$y=-b$		$\rho=-\dfrac{b}{\sin\varphi}$ $(-\pi\le\varphi\le 0$ або $\pi\le\varphi\le 2\pi)$
$y=kx,\ x\ge 0$		$\varphi=arctg\,k$

$y=-kx,\ x\ge 0$		$\varphi=-\mathrm{arctg}\,k$ або $\varphi=2\pi-\mathrm{arctg}\,k$
$y=kx,\ x\le 0$		$\varphi=\pi+\mathrm{arctg}\,k$ або $\varphi=-\pi+\mathrm{arctg}\,k$
$y=-kx,\ x\le 0$		$\varphi=\pi-\mathrm{arctg}\,k$
$y=0,\ x\ge 0$		$\varphi=0$ або $\varphi=2\pi$
$y=0,\ x\le 0$		$\varphi=\pi$ або $\varphi=-\pi$
$x=0,\ y\ge 0$		$\varphi=\dfrac{\pi}{2}$
$x=0,\ y\le 0$		$\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$ або $\varphi=\dfrac{3\pi}{2}$
$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$		$\rho=\dfrac{1}{\dfrac{\cos\varphi}{a}+\dfrac{\sin\varphi}{b}}$

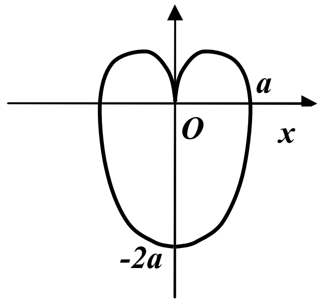
Деякі лінії в полярних координатах

Кардіоїда

$\rho = a(1 - \cos\varphi)$

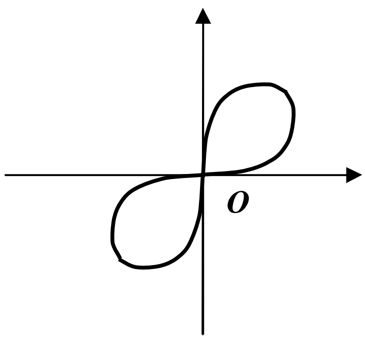


$\rho = a(1 - \sin\varphi)$

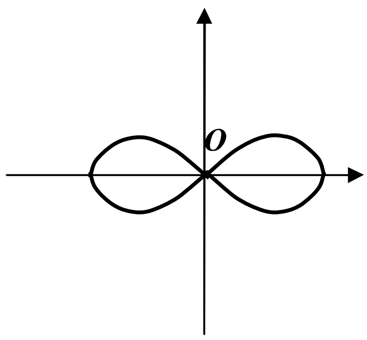


Розетки (рози)

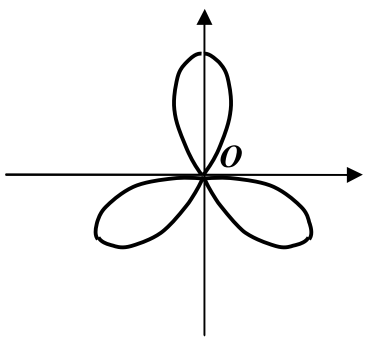
двопелюсткова $\rho = a\sin 2\varphi$



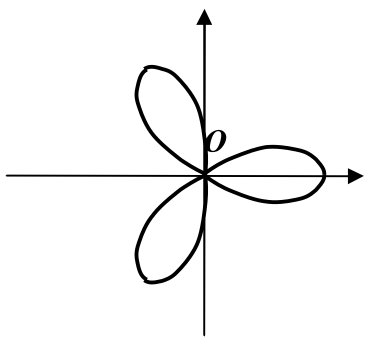
двопелюсткова $\rho = a\cos 2\varphi$



трипелюсткова $\rho = a\sin 3\varphi$



трипелюсткова $\rho = a\cos 3\varphi$



Криві другого порядку $\rho = \dfrac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$

(полюс знаходиться у фокусі лінії;

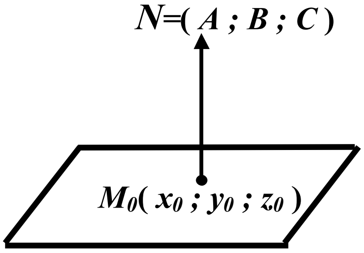
ε–ексцентриситет)

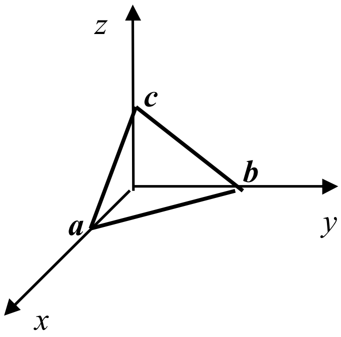
$0 < \varepsilon < 1$– еліпс;

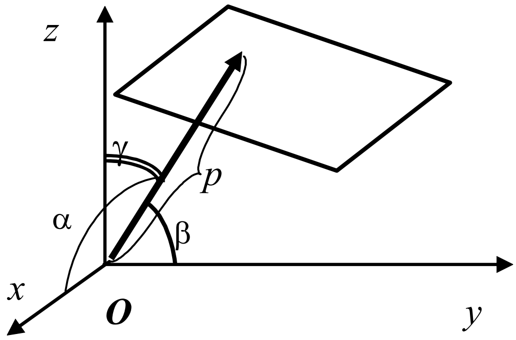
$\varepsilon = 1$– парабола;

$\varepsilon > 1$– гіпербола;

1.6. Площини в просторі



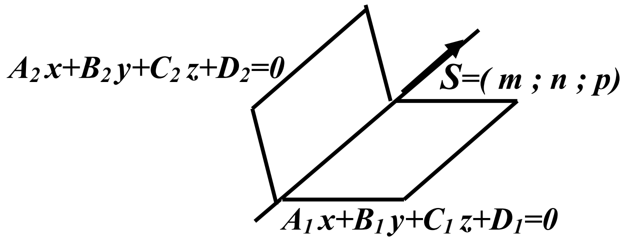




Основні форми рівняння площини

Назва	Загальний вид	Геометричний зміст параметрів
Найпростіше	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$	A, B, C–координати вектора нормалі ; x_0, y_0, z_0 – координати деякої точки площини
Загальне	$Ax+By+Cz+D=0$	A, B, C-координати вектора нормалі
У відрізках на осях	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$	a, b, c – координати точок перетину площини з осями Ox, Oy та Oz відповідно
Нормальне	$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$	α, β, γ – кути, які створює з осями Ox, Oy та Oz проведена з початку координат до площини нормаль
Рівняння площини, яка проходить через три точки	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$	(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) та (x_3, y_3, z_3) – координати трьох точок, які належать площині

1.7. Прямі в просторі



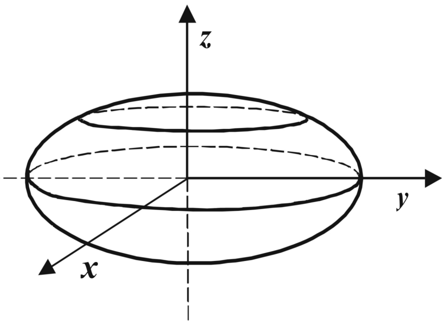
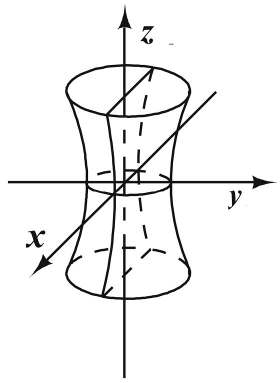
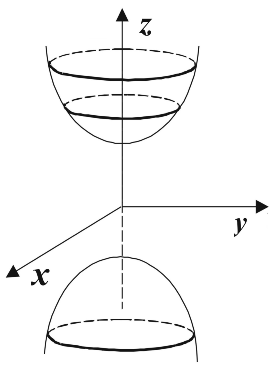
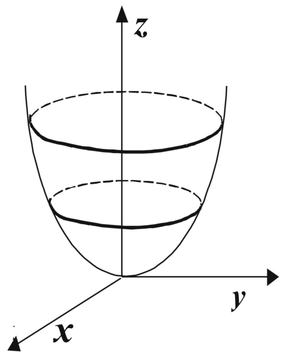
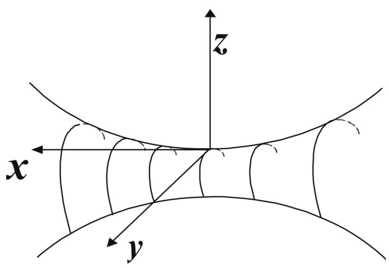
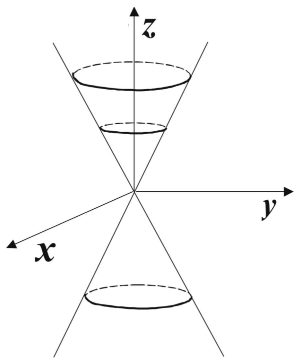
Основні форми рівняннь прямої

Назва	Загальний вид рівнянь	Геометричний зміст параметрів
Загальні	$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$	Пряма розглядається як лінія перерізу двох площин з нормалями $\overline{N}_1=(A_1;B_1;C_1)$ та $\overline{N}_2=(A_2;B_2;C_2)$
Канонічні	$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$	l,m,n — координати напрямного вектора прямої; (x_0,y_0,z_0)- координати точки, яка належить прямій
Параметричні	$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases}$	l,m,n — координати напрямного вектора прямої; (x_0,y_0,z_0)- координати точки, яка належить прямій
Рівняння прямої, яка проходить через дві точки	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$	(x_1,y_1,z_1) та (x_2,y_2,z_2)– координати двох точок, які належать прямій

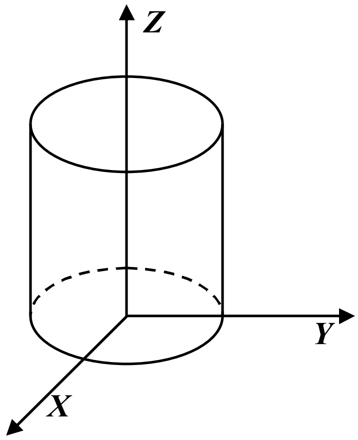
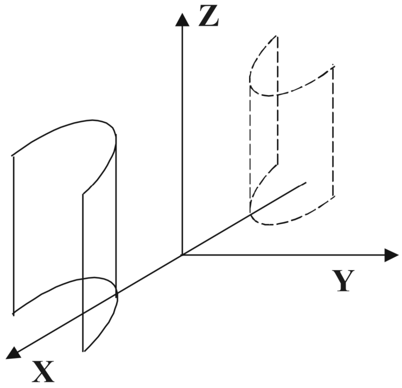
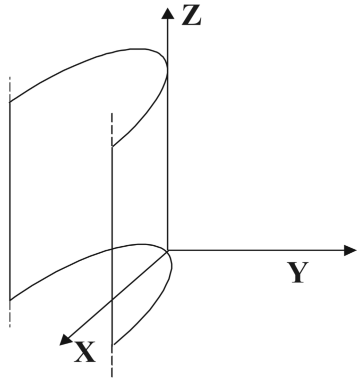
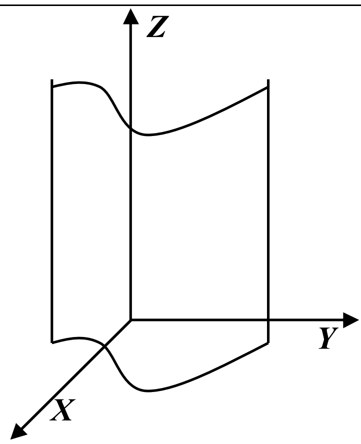
1.8. Найпростіші задачі теорії площин та прямих

Кути	між площинами	$\cos\varphi = \dfrac{\left\|\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2\right\|}{\left\|\overline{N}_1\right\| \left\|\overline{N}_2\right\|}$
	між прямими	$\cos\varphi = \dfrac{\left\|\overline{S}_1 \cdot \overline{S}_2\right\|}{\left\|\overline{S}_1\right\| \left\|\overline{S}_2\right\|}$
	між прямою та площиною	$\sin\varphi = \dfrac{\left\|\overline{N} \cdot \overline{S}\right\|}{\left\|\overline{N}\right\| \left\|\overline{S}\right\|}$
Умови паралельності	площин	$\overline{N}_1 \parallel \overline{N}_2$
	прямих	$\overline{S}_1 \parallel \overline{S}_2$
	прямої та площини	$\overline{S} \perp \overline{N}$
Умови перпендикулярності	площин	$\overline{N}_1 \perp \overline{N}_2$
	прямих	$\overline{S}_1 \perp \overline{S}_2$
	прямої та площини	$\overline{S} \parallel \overline{N}$
Відстань від точки до площини		$d = \left\| x_M \cos\alpha + y_M \cos\beta + z_M \cos\gamma - p \right\| = \dfrac{\left\| Ax_M + By_M + Cz_M + D \right\|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$
Рівняння координатних площин		
Oxy : $z = 0$	Oyz : $x = 0$;	Oxz : $y = 0$
Площини, паралельні координатним осям або площинам		
$\parallel Oxy$: $z = z_0$	$\parallel Oyz$: $x = x_0$;	$\parallel Oxz$: $y = y_0$
$\parallel Ox$: $By + Cz + D = 0$	$\parallel Oy$: $Ax + Cz + D = 0$;	$\parallel Oz$: $Ax + By + D = 0$

1.9. Поверхні другого порядку

Еліпсоїд $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$ 	Однопорожнинний гіперболоїд $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$ 
Двопорожнинний гіперболоїд $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$ 	Еліптичний параболоїд $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$ 
Гіперболічний параболоїд $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$ 	Конус 2-го порядку $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$ 

Циліндричні поверхні

Еліптичний циліндр $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 	Гіперболічний циліндр $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 	Параболічний циліндр $y^2=2px$ 
Довільна циліндрична поверхня з твірною, паралельною до осі Oz $F(x,y)=0$		

Поверхні обертання

Сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$	Еліпсоїд обертання $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
Однопорожнинний гіперболоїд обертання $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	
Двопорожнинний гіперболоїд обертання $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	
Параболоїд обертання $x^2+y^2=2pz$	

Розділ 2

ФУНКЦІЇ ТА ГРАНИЦІ

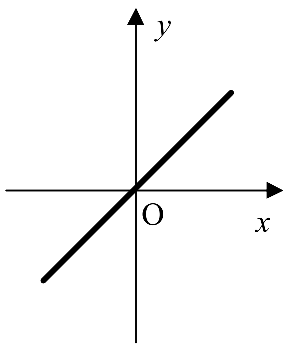
2.1. Основні елементарні функції

Функція	Область визначення	Область значень
$y = x^n$	$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$, n парне $(-\infty; +\infty)$, n непарне
$y = \dfrac{1}{x^n}$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(0; +\infty)$, n парне $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, n непарне
$y = \sqrt[n]{x}$	$[0; +\infty)$, n парне $(-\infty; +\infty)$, n непарне	$[0; +\infty)$, n парне $(-\infty; +\infty)$, n непарне
$y = \sin x$	$(-\infty; +\infty)$	$[-1; 1]$
$y = \cos x$	$(-\infty; +\infty)$	$[-1; 1]$
$y = tg\, x$	$\left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$	$(-\infty; +\infty)$
$y = ctg\, x$	$(\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in Z$	$(-\infty; +\infty)$
$y = \arcsin x$	$[-1; 1]$	$\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$
$y = \arccos x$	$[-1; 1]$	$[0; \pi]$
$y = arctg\, x$	$(-\infty; +\infty)$	$\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$
$y = arcctg\, x$	$(-\infty; +\infty)$	$(0; \pi)$
$y = a^x$	$(-\infty; +\infty)$	$(0; +\infty)$
$y = \log_a x$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$

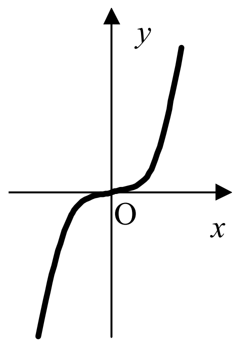
2.2. Графіки основних елементарних функцій

Степеневі функції

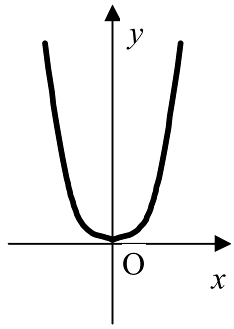
$y = x$



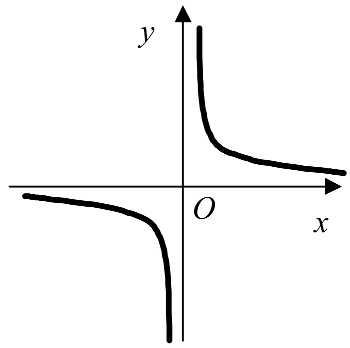
$y = x^3$, $y = x^{2n+1}$



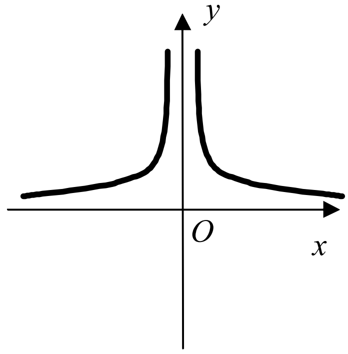
$y = x^2$, $y = x^{2n}$



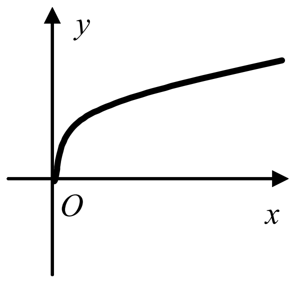
$y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^{2n+1}}$



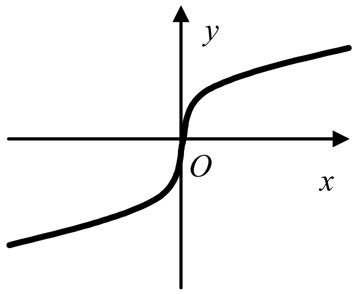
$y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{1}{x^{2n}}$



$y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[2n]{x}$

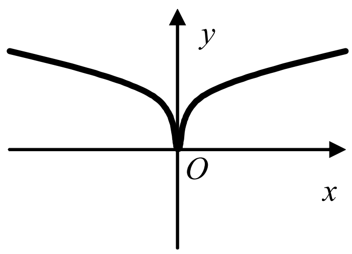


$y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[2n+1]{x}$



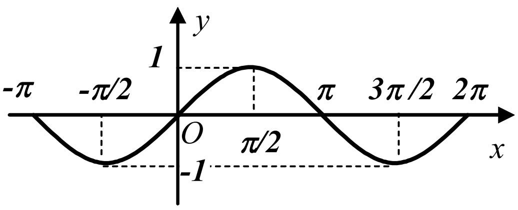
$y = \sqrt[3]{x^2}$, $y = \sqrt[2n+1]{x^{2m}}$

$(2n + 1 > 2m)$

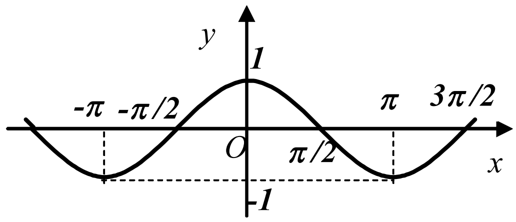


Тригонометричні функції

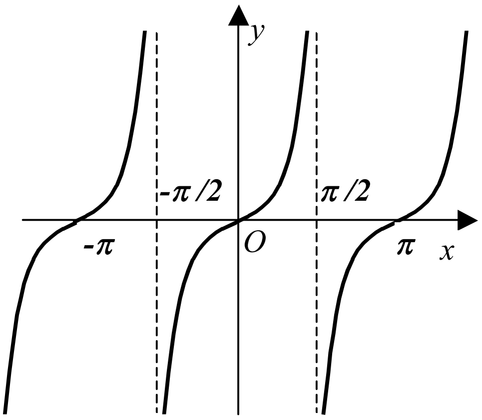
$y = \sin x$



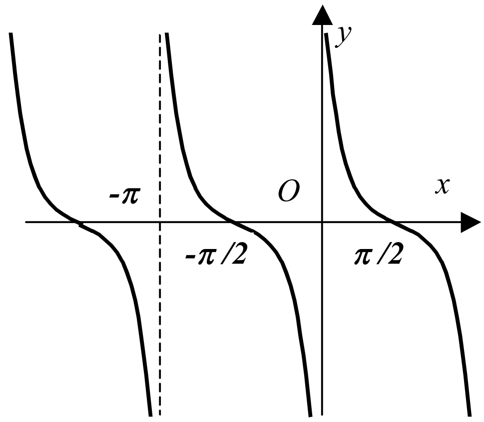
$y = \cos x$



$y = tg\, x$

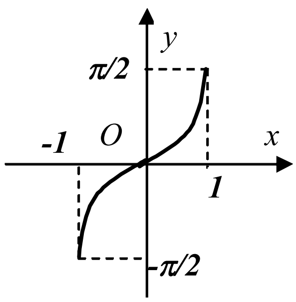


$y = ctg\, x$

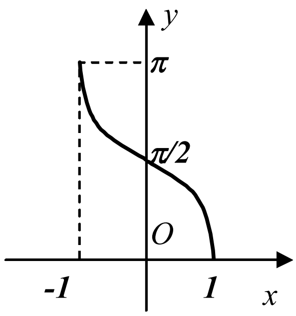


Обернені тригонометричні функції

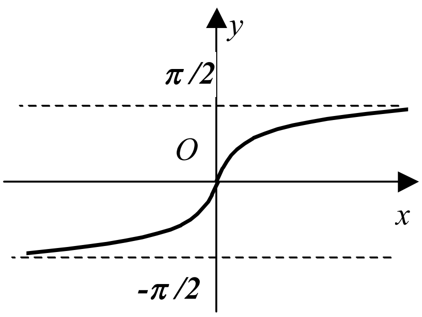
$y = \arcsin x$



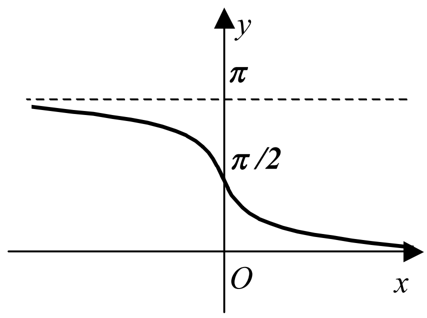
$y = \arccos x$



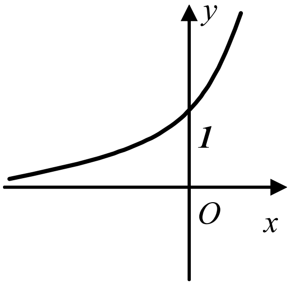
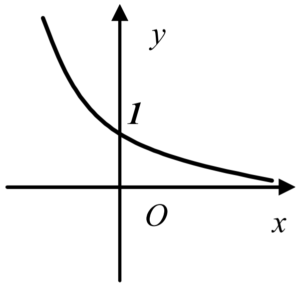
$y = arctg\, x$



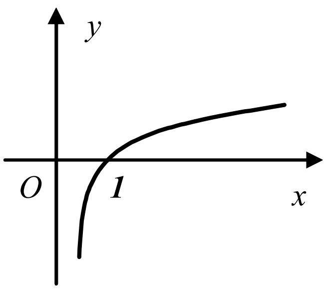
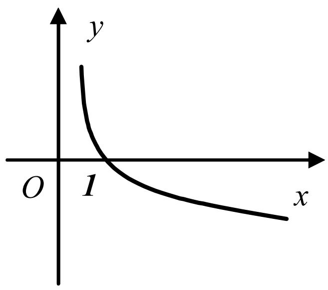
$y = arcctg\, x$



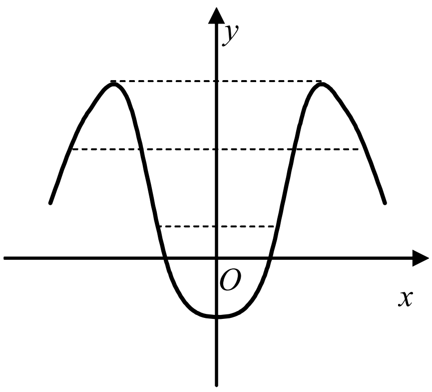
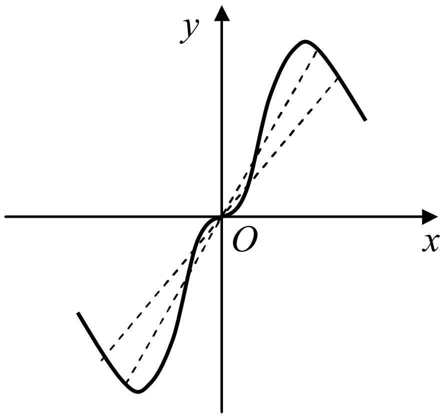
Показникові функції

$y = a^x, a > 1$	$y = a^x, 0 < a < 1$
	

Логарифмічні функції

$y = \log_a x, a > 1$	$y = \log_a x, 0 < a < 1$
	

2.3. Парні та непарні функції

Парні функції	Непарні функції
$f(-x) = f(x)$	$f(-x) = -f(x)$
	

2.4. Властивості границь

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$	$\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to \infty} g(x)=b$
1. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right)=a\pm b$ 2. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=a\cdot b$ 3. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}$, якщо $b\neq 0$ 4. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}=a^b$, якщо $a,b\neq 0$ одночасно	1. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(f(x)\pm g(x)\right)=a\pm b$ 2. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=a\cdot b$ 3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}$, якщо $b\neq 0$ 4. $\lim\limits_{x\to \infty}\left[f(x)\right]^{g(x)}=a^b$, якщо $a,b\neq 0$ одночасно

Невизначеності

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \;;\; \left(\frac{0}{0}\right) \;;\; (0\cdot\infty) \;;\; (\infty-\infty) \;;\; \left(1^{\infty}\right) \;;\; \left(0^{0}\right) \;;\; \left(\infty^{0}\right)$$

2.5. Важливі границі

Перша важлива границя	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
Наслідки	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,x}{x}=1$
Друга важлива границя	$\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$; $\lim\limits_{\alpha\to 0}\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}=e$
Наслідки	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\ln a$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x}-1}{x}=\ln a$

2.6. Методи розкриття невизначеностей

Раціональні функції. Факторіали

Структура функції	Граничне значення змінної	Невизна-ченість	Метод перетворення
Частка двох поліномів	$x \to \infty$	$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$	Поділити чисельник і знаменник на найвищий степінь змінної та визначити нескінченно малі доданки
Частка двох поліномів	$x \to x_0$	$\left(\frac{0}{0}\right)$	Розкласти чисельник і знаменник на множники, скоротити дроб на $(x - x_0)$
Сума або різниця двох дробів	$x \to x_0$	$(\infty - \infty)$	Перетворити вираз до одного дробу, за наявності невизначеності виду (0/0) скоротити на $(x - x_0)$
Вираз з факторіалами	$n \to \infty$	$(\infty - \infty)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$	Обрати факторіал найбільшого виразу, інші за рекурентною формулою звести до обраного

Ірраціональні функції

Структура функції	**Граничне значення змінної**	**Невизначеність**	**Метод перетворення**
Дріб з коренями від поліномів	$x \to \infty$	$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$	Поділити чисельник і знаменник на найвищий степінь змінної (з урахуванням добування коренів) та визначити нескінченно малі доданки
Дріб з коренями від поліномів	$x \to x_0$	$\left(\frac{0}{0}\right)$	Позбутися ірраціональності за допомогою формул скороченого множення та відокремити множник $(x - x_0)$; скоротити дроб на цей множник
Сума або різниця з коренями	$x \to \infty$	$(\infty - \infty)$	Позбутися ірраціональності за допомогою формул скороченого множення; якщо невизначеність не зникне, а трансформується до виду (∞/∞), поділити чисельник і знаменник на найвищий степінь змінної (з урахуванням добування коренів)

Застосування першої важливої границі

Структура функції	**Граничне значення змінної**	**Невизна-ченість**	**Метод перетворення**
Вираз з тригономет-ричними функціями	$x \to 0$	$\left(\frac{0}{0}\right)$ $(0 \cdot \infty)$	Перетворити суми тригонометричних функцій у добутки; множники, границі яких не дорівнюють 0 або ∞, замінити цими границями; для кожного множника, що прямує до 0, побудувати першу важливу границю
Вираз з тригономет-ричними функціями	$x \to x_0 \neq 0$	$\left(\frac{0}{0}\right)$ $(0 \cdot \infty)$	Перетворити суми тригонометричних функцій у добутки; множники, границі яких не дорівнюють 0 або ∞, замінити цими границями; виконати заміну змінної $x - x_0 = t$ або $x_0 - x = t$ $(t \to 0)$; для кожного множника, що прямує до 0, побудувати першу важливу границю
Вираз з тригономет-ричними функціями	$x \to \infty$	$\left(\frac{0}{0}\right)$ $(0 \cdot \infty)$	Виконати заміну змінної $\frac{1}{x} = t$, $t \to 0$

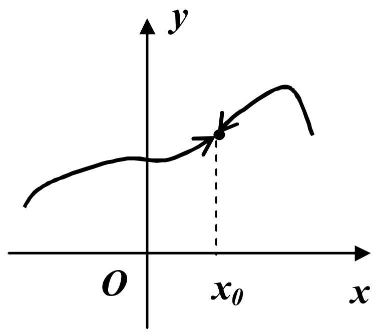
Застосування другої важливої границі

Структура функції	**Граничне значення змінної**	**Невизна-ченість**	**Метод перетворення**
Степенево-показникова функція	$x \to \infty$ $x \to x_0$	(1^{∞})	Записати основу у вигляді суми **1** та нескінченно малої функції; побудувати другу важливу границю та перейти до границі в показнику
Вираз з логарифмом	Аргумент логарифма прямує до **1**	$\left(\frac{0}{0}\right)$ $(0 \cdot \infty)$	Записати аргумент логарифма у вигляді суми **1** та нескінченно малої функції; побудувати другу важливу границю під знаком логарифма або використати відповідний наслідок другої важливої границі
Різниця логарифмів еквівалентних функцій	$x \to \infty$ $x \to x_0$	$\left(\frac{0}{0}\right)$ $(0 \cdot \infty)$ $(\infty - \infty)$	Перетворити різницю логарифмів у логарифм частки, яка прямує до **1**, та побудувати під знаком логарифма другу важливу границю або використати відповідний наслідок другої важливої границі

2.7. Неперервність функції. Точки розриву

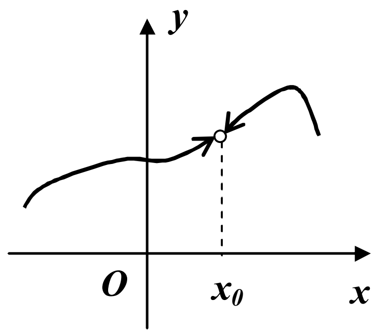
Функція $y = f(x)$ є ***неперервною*** в точці x_0, якщо

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x)$$



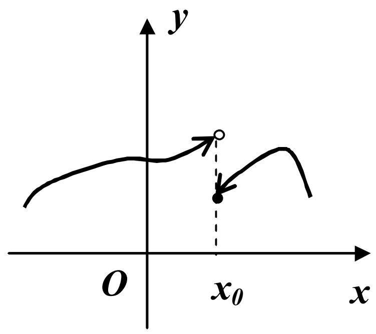
x_0 є точкою усувного розриву 1-го роду, якщо $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ та $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ є скінченими, але

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x)$$

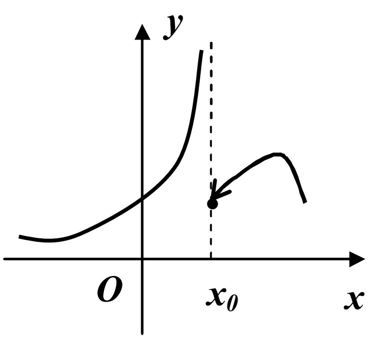


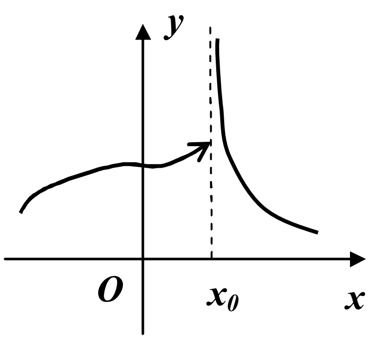
x_0 є точкою неусувного розриву 1-го роду, якщо $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ та $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ є скінченими, але

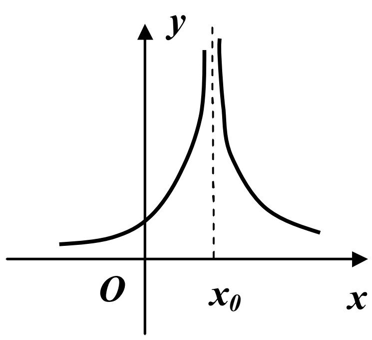
$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0+0} f(x)$$



x_0 є точкою розриву 2-го роду, якщо щонайменше одна з односторонніх границь $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ та $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ є нескінченою







Елементарні функції є ***неперервними*** на всій області визначення

Розділ 3

ПОХІДНІ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

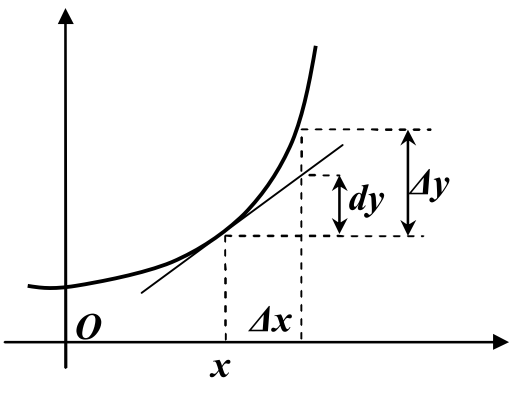
3.1. Обчислення похідних

Елементарні функції	Складені функції
1. $\left(x^{n}\right)' = n\,x^{n-1}$	1. $\left(u^{n}\right)' = n\,u^{n-1}\cdot u'$
2. $\left(x\right)' = 1$	2. ----
3. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	3. $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$
4. $\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a$	4. $\left(a^{u}\right)' = a^{u}\ln a\cdot u'$
5. $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$	5. $\left(e^{u}\right)' = e^{u}\cdot u'$
6. $\left(\log_{a} x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$	6. $\left(\log_{a} u\right)' = \dfrac{1}{u\ln a}\cdot u'$
7. $\left(\lg x\right)' = \dfrac{1}{x\ln 10}$	7. $\left(\lg u\right)' = \dfrac{1}{u\ln 10}\cdot u'$
8. $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$	8. $\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u}\cdot u'$
9. $\left(\sin x\right)' = \cos x$	9. $\left(\sin u\right)' = \cos u\cdot u'$
10. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$	10. $\left(\cos u\right)' = -\sin u\cdot u'$
11. $\left(tg\,x\right)' = \dfrac{1}{\cos^{2} x}$	11. $\left(tg\,u\right)' = \dfrac{1}{\cos^{2} u}\cdot u'$
12. $\left(ctg\,x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^{2} x}$	12. $\left(ctg\,u\right)' = -\dfrac{1}{\sin^{2} u}\cdot u'$
13. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$	13. $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^{2}}}\cdot u'$
14. $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$	14. $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^{2}}}\cdot u'$
15. $\left(arctg\,x\right)' = \dfrac{1}{1+x^{2}}$	15. $\left(arctg\,u\right)' = \dfrac{1}{1+u^{2}}\cdot u'$
16. $\left(arcctg\,x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^{2}}$	16. $\left(arcctg\,u\right)' = -\dfrac{1}{1+u^{2}}\cdot u'$

Правила диференціювання

$C' = 0$	
$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$(u + C)' = u'$
$(uv)' = u'v + u\,v'$	$(C \cdot u)' = C \cdot u'$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - u\,v'}{v^2}$	$\left(\dfrac{u}{C}\right)' = \dfrac{u'}{C}$
Диференціювання складеної функції Якщо $[f(x)]' = \varphi(x)$, то $[f(kx)]' = k \cdot \varphi(kx)$, $[f(u(x))]' = \varphi(u(x)) \cdot u'(x)$	
Диференціювання функції $\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases}$, заданої ***параметрично*** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$	
Похідні вищих порядків $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2} = (y')'$, $y''' = \dfrac{d^3y}{dx^3} = (y'')'$, $\ldots$ $y^{(n)} = \dfrac{d^ny}{dx^n} = \left(y^{(n-1)}\right)'$	

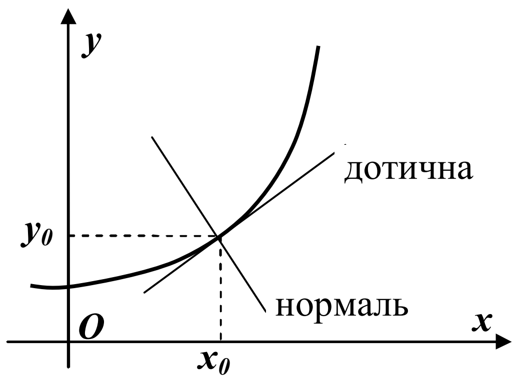
Диференціал та його геометричний зміст



$$dx = \Delta x\,,$$

$$dy = y'\,dx$$

Рівняння дотичної та нормалі до графіка функції



Рівняння дотичної

$$y - y_0 = y_0' \left(x - x_0\right)$$

Рівняння нормалі

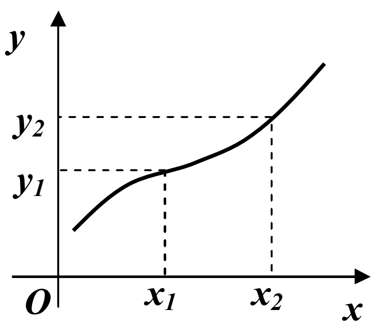
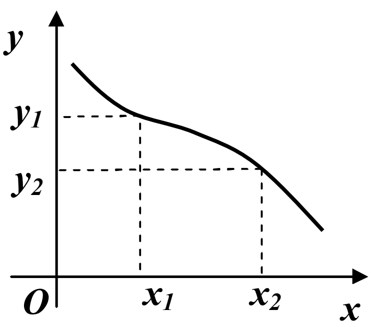
$$y - y_0 = -\frac{1}{y_0'}\left(x - x_0\right)$$

Правило Лопіталя

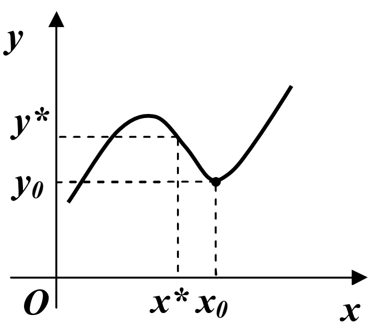
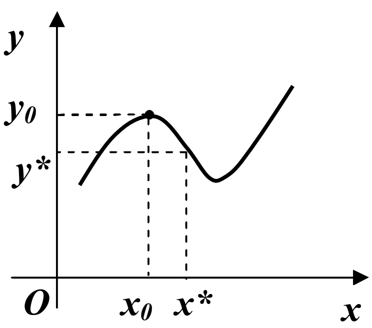
$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}; \frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$	$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}; \frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

3.2. Дослідження функцій

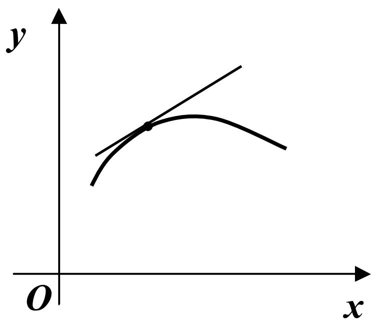
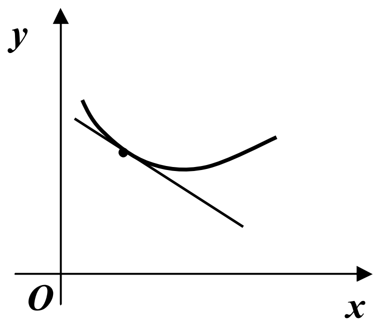
Монотонність

Поняття	Функція зростає	Функція спадає
Означення	Якщо $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$ 	Якщо $x_1 < x_2$, то $f(x_1) > f(x_2)$ 
Критерій (достатня умова)	$y' > 0$	$y' < 0$

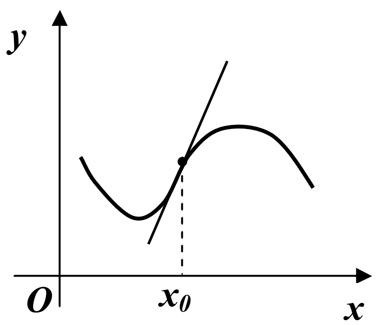
Екстремум

<table>
<tr><td>Поняття</td><td>При $x = x_0$ функція має мінімум</td><td>При $x = x_0$ функція має максимум</td></tr>
<tr><td>Означення</td><td>Існує такий окіл точки x_0, що для будь-якої точки x^* з нього виконується умова $f(x^*) > f(x_0)$
</td><td>Існує такий окіл точки x_0, що для будь-якої точки x^* з нього виконується умова $f(x^*) < f(x_0)$
</td></tr>
<tr><td>Необхідна умова</td><td colspan="2">Якщо у точці x_0 функція має екстремум, то така точка є критичною (тобто у цій точці $y' = 0$ або похідна не існує)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Достатні умови</td><td>При переході через критичну точку x_0 похідна змінює знак
$-\ 0\ +$</td><td>При переході через критичну точку x_0 похідна змінює знак
$+\ 0\ -$</td></tr>
<tr><td>У критичній точці x_0
$y''(x_0) > 0$</td><td>У критичній точці x_0
$y''(x_0) < 0$</td></tr>
</table>

Опуклість та вгнутість

Поняття	На деякому проміжку крива $y = f(x)$ є ***опуклою*** (опуклою ***вгору***)	На деякому проміжку крива $y = f(x)$ є ***вгнутою*** (опуклою ***вниз***)
Означення	Лінія розташована ***нижче*** дотичної, проведеної в будь-якій точці проміжку 	Лінія розташована ***вище*** дотичної, проведеної в будь-якій точці проміжку 
Критерій (достатня умова)	$y'' < 0$	$y'' > 0$

Точки перегину



Точка $(x_0; f(x_0))$ є ***точкою перегину*** лінії $y = f(x)$, якщо при переході через цю точку змінюється взаємне розташування кривої та дотичної до неї

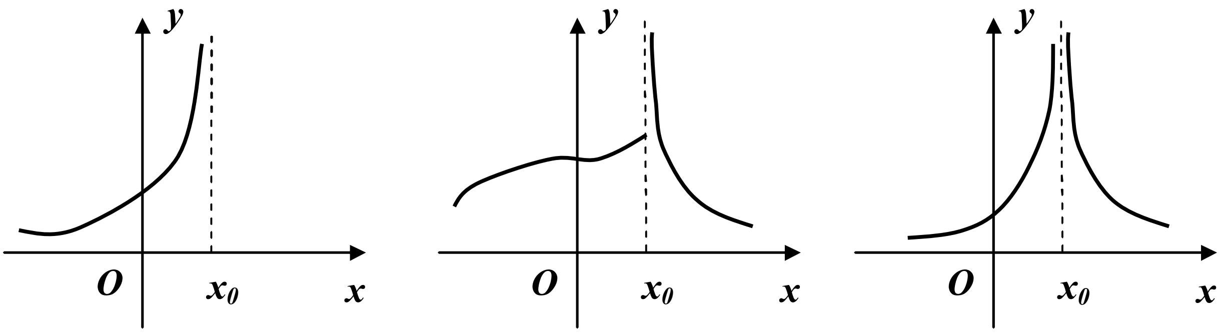
Необхідна умова: $y''(x_0) = 0$ або не існує

Достатня умова: y'' змінює знак

Асимптоти

Вертикальна

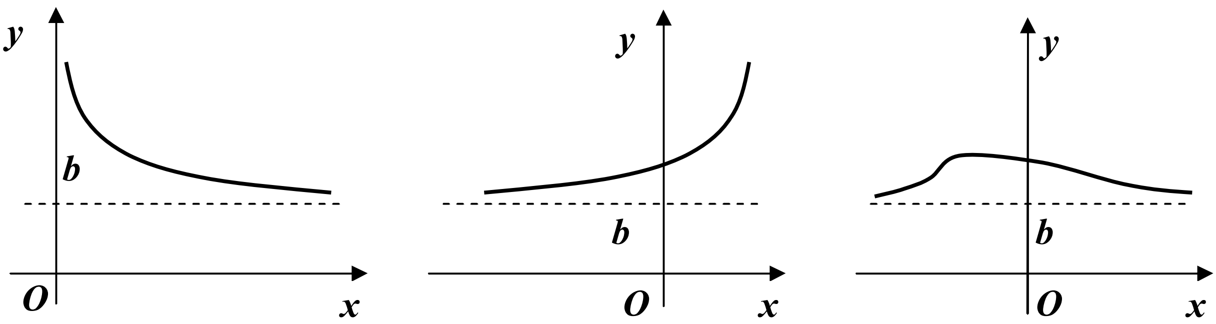
Якщо $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\infty$ або $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$, то $x=x_0$ – вертикальна асимптота.



Невертикальні

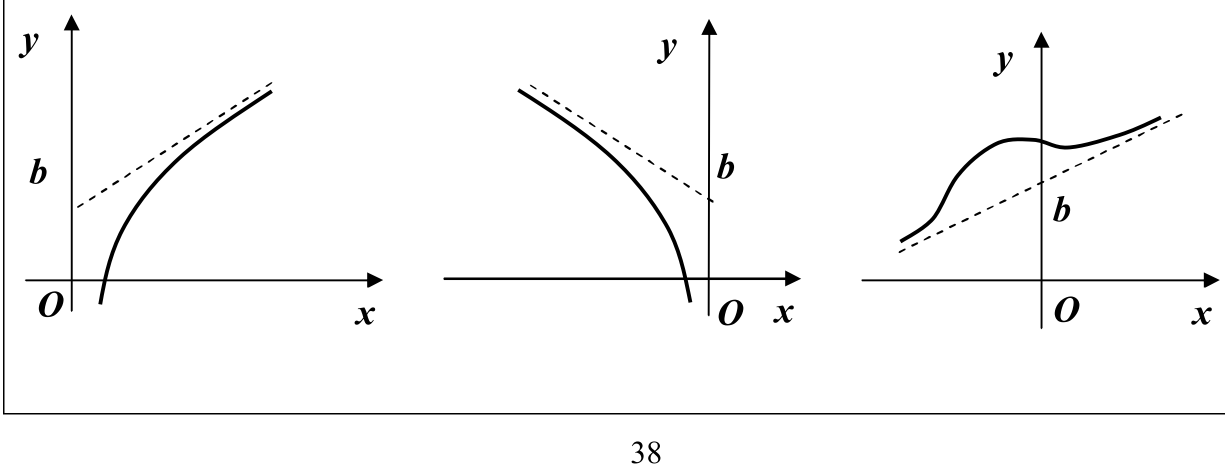
Горизонтальна

Якщо $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=b$ або $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=b$, то $y=b$ –горизонтальна асимптота



Похила

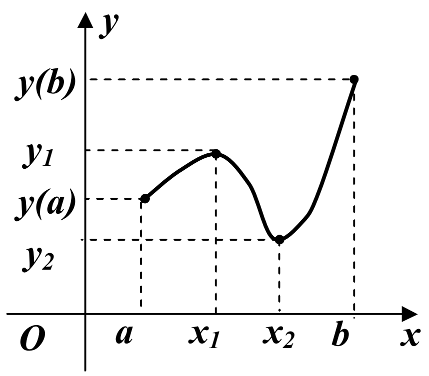
Якщо $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}=k$ та $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[f(x)-k\cdot x\right]=b$, або $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}=k$ та $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[f(x)-k\cdot x\right]=b$, то $y=k\cdot x+b$ –похила асимптота



План дослідження функції для побудови графіка

1. Знайти область визначення функції.
2. Дослідити функцію на парність і непарність.
3. Знайти точки перетину графіка функції з координатними осями.
4. Дослідити функцію на неперервність, знайти точки розриву (якщо вони існують) та встановити характер розриву; знайти асимптоти кривої.
5. Знайти інтервали монотонності функції та екстремуми.
6. Знайти інтервали опуклості та вгнутості кривої і точки перегину.

Найбільше та найменше значення функції на відрізку



Найбільше та ***найменше*** значення функції на відрізку досягаються або на ***границях*** відрізка, або у ***критичних точках***, які належать відрізку.

Найбільше значення $y(b)$ досягнуто на ***границі*** відрізка; ***найменше*** значення y_2 є ***мінімумом***.

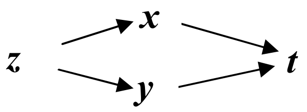
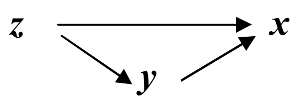
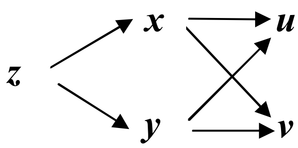
Розділ 4

ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

4.1. Похідні та диференціали

Частинні похідні першого порядку $z'_x = \dfrac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{z(x+\Delta x\,;\,y)-z(x\,;\,y)}{\Delta x}$ (значення змінної y залишається постійним) $z'_y = \dfrac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{z(x\,;\,y+\Delta y)-z(x\,;\,y)}{\Delta y}$ (значення змінної x залишається постійним)
Диференціали першого порядку   Диференціали незалежних змінних $dx = \Delta x$; $dy = \Delta y$ Частинні диференціали $d_x z = z'_x dx$; $d_y z = z'_y dy$ Повний диференціал $dz = z'_x dx + z'_y dy$
Частинні похідні вищих порядків $z''_{xx} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$, $z''_{yy} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$; $z''_{xy} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$; $z''_{yx} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ –   « ***Мішані***» похідні, які відрізняються лише послідовністю диференціювання, ***рівні*** між собою, якщо є неперервними: $$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$ $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$, …

Диференціювання складених функцій

$z=f(x,y)$; $x=\varphi(t)$, $y=\phi(t)$ 	$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$
$z=f(x,y)$; $y=\varphi(x)$ 	$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$
$z=f(x,y)$; $x=\varphi(u;v)$, $y=\phi(u;v)$ 	$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$ $$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Диференціювання неявних функцій

$F(x,y,z)=0$	$F(x,y)=0$
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}};$$ $$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$	$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

4.2. Застосування частинних похідних

Рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні

Рівняння поверхні $F(x, y, z) = 0$	Рівняння дотичної площини $$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M (y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M (z - z_0) = 0.$$ Рівняння нормалі $$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M}.$$
Рівняння поверхні $z = f(x, y)$	Рівняння дотичної площини $$z - z_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_M (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_M (y - y_0).$$ Рівняння нормалі $$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_M} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_M} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Екстремум функції двох змінних

Необхідні умови екстремуму	$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad M_i(x_i; y_i)$ – стаціонарні точки
Достатня умова екстремуму	$\delta(M_i) = z''_{xx}(x_i, y_i) \cdot z''_{yy}(x_i, y_i) - [z''_{xy}(x_i, y_i)]^2$. Якщо $\delta(M_i) < 0$, то в точці M_i екстремуму немає; $\delta(M_i) > 0$ та $z''_{xx}(x_i, y_i) > 0$ – мінімум; $\delta(M_i) > 0$ та $z''_{xx}(x_i, y_i) < 0$ – максимум; $\delta(M_i) = 0$ – потрібно додаткове дослідження.

4.3. Похідна за даним напрямом. Градієнт функції

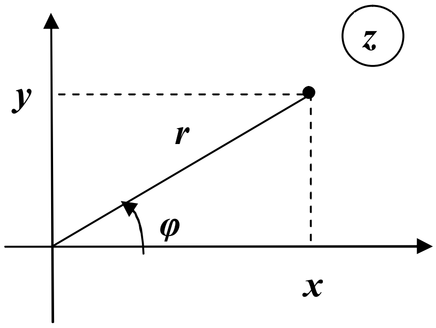
<table>
<tr>
<td>Функція двох змінних
$z = z(x, y)$</td>
<td>Похідна за напрямом $\boldsymbol{l}$:
$$\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M} \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M} \cdot \sin\alpha,$$
де $\boldsymbol{\alpha}$ – кут між вектором $\boldsymbol{l}$ та віссю $\boldsymbol{Ox}$.

Градієнт :
$$\mathbf{grad}\, z(M) = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M} \cdot \vec{i} + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M} \cdot \vec{j}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Функція трьох змінних
$u = u(x, y, z)$</td>
<td>Похідна за напрямом $\boldsymbol{l}$:
$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M} \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M} \cdot \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M} \cdot \cos\gamma,$$
де $\cos\alpha$, $\cos\alpha$, $\cos\alpha$ – напрямні косинуси вектора $\boldsymbol{l}$
Градієнт :
$$\mathbf{grad}\, u(M) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M} \cdot \vec{i} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M} \cdot \vec{j} + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M} \cdot \vec{k}$$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Зв’язок між градієнтом та похідною за напрямом
Похідна за напрямом $\boldsymbol{l}$ дорівнює проекції градієнта на цей напрям:
$$\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M} = np_{\bar{l}}\, \mathbf{grad}\, z(M) \text{ , або}$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M} = np_{\bar{l}}\, \mathbf{grad}\, u(M).$$
Градієнт відповідає напряму найшвидшого зростання функції:
$$\left(\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M}\right)_{\textit{найбільш}} = \left|\mathbf{grad}\, z(M)\right| = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M}\right)^2} \text{ , або}$$
$$\left(\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M}\right)_{\textit{найбільш}} = \left|\mathbf{grad}\, u(M)\right| = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M}\right)^2}.$$</td>
</tr>
</table>

Розділ 5

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

5.1 Алгебраїчні операції над комплексними числами

 	$z=(x;y)$ ***Алгебраїчна*** форма комплексного числа $z=x+i\,y,$ де $x=\mathrm{Re}\,z$ – дійсна частина; $y=\mathrm{Im}\,z$ – уявна частина; $i=(0;1)$ – уявна одиниця, $i^2=-1$.
Тригонометрична форма $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ ***Показникова*** форма $z=re^{i\varphi}$	$r=\lvert z\rvert=\sqrt{x^2+y^2}$ – модуль, $\tilde{\varphi}=Arg\,z=\arg z+2\pi n$ – аргумент, $\varphi=\arg z$ – головне значення аргументу. $x=r\cos\varphi$; $y=r\sin\varphi$ $r=\sqrt{x^2+y^2}$; $\varphi=\begin{cases}+\arccos\dfrac{x}{r}, & y\ge 0\\ -\arccos\dfrac{x}{r}, & y<0\end{cases}$

Дії з комплексними числами в алгебраїчній формі

Сума та різниця	$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$
Добуток	$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2)$
Спряження	$\bar{z}=x-i\,y$; $z\cdot\bar{z}=\lvert z\rvert^2=x^2+y^2$
Частка	$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1\cdot\bar{z}_2}{z_2\cdot\bar{z}_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\dfrac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$

Дії з комплексними числами в тригонометричній та показниковій формі

Добуток	$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = r_1 r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$
Частка	$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\, e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \dfrac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)$
Степінь	$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$
Корінь	$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\cdot e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, $k = 0,1,\ldots n-1$

5.2. Поліноми та алгебраїчні рівняння

Основні поняття	***Поліном*** або ***ціла раціональна функція*** n-го степеня $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $a_0 \neq 0$. ***Алгебраїчне рівняння*** n-го степеня $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$. ***Корінь*** полінома або алгебраїчного рівняння: $P_n(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad P_n(x) = (x - x_0)\cdot Q_{n-1}(x)$.
Кратність коренів Якщо поліном ділиться на $(x - x_0)^k$, але не ділиться на $(x - x_0)^{k+1}$, то число x_0 є ***коренем*** k***-тої кратності*** : $P_n(x) = (x - x_0)^k \cdot Q_{n-k}(x)$, $Q_{n-k}(x_0) \neq 0$. Якщо ***комплексне*** число є коренем полінома з ***дійсними*** коефіцієнтами, то ***спряжене*** число також є ***коренем тієї ж кратності***.	

Теорема Гаусса

Поліном n-го степеня має рівно n коренів, якщо кожен корінь враховувати стільки разів, якою є його кратність.   Поліном з дійсними коефіцієнтами можна записати як добуток лінійних та квадратичних множників з дійсними коефіцієнтами

Розв'язування деяких алгебраїчних рівнянь

Квадратні рівняння з від'ємним дискримінантом	Двочленні рівняння
$az^2+bz+c=0 \quad (D=b^2-4ac<0)$ $z_{1,2}=\dfrac{-b\pm i\sqrt{\lvert D\rvert}}{2a}$	$z^n-c=0$ $z_k=\sqrt[n]{\lvert c\rvert}\cdot e^{i\frac{\arg c+2\pi(k-1)}{n}}, \; k=\overline{1,n}$

ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.
2. Ильин В.А., Позняк Е.Г. Аналитическая геометрия: – М.: Физматлит, 2002.– 240 с.
3. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.– М.: Наука, 1979.– 511с.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1: – М.: Наука, 1972.– 456с.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1: – М.: Наука, 1970.– 608с.
6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 1: – М.: Оникс, 2003. – 304 с.

З М І С Т

Розділ 1
Алгебра та аналітична геометрія

Розділ 2
Функції та границі

Розділ 3
Похідні та їх застосування

Розділ 4
Функції декількох змінних

Розділ 5

Комплексні числа

Навчальне видання

Кочеткова Інна Борисівна
Сушко Лариса Федорівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА
В ФОРМУЛАХ ТА ТАБЛИЦЯХ

Навчальний посібник-довідник

Тематичний план 2013, поз.

Підписано до друку . Формат 60х84 1/16. Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид. арк. . Умов. друк. арк. . Тираж пр. Замовлення №
Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпропетровськ-5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ