

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ**



**В.Л. КОПОРУЛІН, І.П. ЗАЄЦЬ,
І.Л. ШИНКОВСЬКА, Л.Ф. СУШКО**

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Збірник задач

Частина II

Дніпропетровськ НМетАУ 2016

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ**

**В.Л. КОПОРУЛІН, І.П. ЗАЄЦЬ,
І.Л. ШИНКОВСЬКА, Л.Ф. СУШКО**

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Збірник задач

Частина II

**Друкується за Планом видань навчальної та методичної літератури,
затвердженим Вченою радою НМетАУ
Протокол № від**

Дніпропетровськ НМетАУ 2016

УДК 514.122:517(076.1/3)

Вища математика. Збірник задач. Ч.2. Навч. посібник /Укл.: В.Л.Копорулін, І.П. Заєць, І.Л. Шинковська, Л.Ф. Сушко. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2016. – 57 с.

Збірник містить більше 1000 завдань з вищої математики і охоплює матеріал по наступним розділам : «Подвійний та криволінійні інтеграли», «Диференціальні рівняння», «Ряди». Наводиться велика кількість типових завдань з кожної теми, а також різноманітні задачі підвищеної складності та творчого характеру. Рекомендується для викладачів та студентів спеціальності 161 – хімічна технологія та інших спеціальностей всіх форм навчання.

Бібліогр.: 7 найм.

Друкується за авторською редакцією.

Відповідальний за випуск В.Л. Копорулін, канд. тех. наук, доц.

Рецензенти: Т.С. Кагадій, д-р фіз.-мат. наук, проф. (НГУ)
А.В. Сяєв, канд. фіз.-мат. наук, доц. (ДНУ)

© Національна металургійна академія
України, 2016

© Копорулін В.Л., Заєць І.П.,
Шинковська І.Л., Сушко Л.Ф., 2016

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
Глава 1. ПОДВІЙНИЙ ТА КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ.....	5
§ 1. Подвійний інтеграл.....	5
§ 2. Криволінійні інтеграли.....	9
2.1. Криволінійні інтеграли першого роду.....	9
2.2. Криволінійні інтеграли другого роду.....	11
§ 3. Застосування подвійного та криволінійних інтегралів у фізиці.....	13
Глава 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ.....	17
§ 1. Диференціальні рівняння першого порядку.....	17
1.1. Загальні поняття та означення.....	17
1.2. Рівняння з відокремлювальними змінними.....	18
1.3. Однорідні диференціальні рівняння.....	19
1.4. Лінійні диференціальні рівняння. Рівняння Бернуллі.....	20
§ 2. Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку.....	21
§ 3. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами.....	22
3.1. Лінійно залежні та незалежні функції. Визначник Вронського.....	22
3.2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння.....	23
3.3. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння.....	25
§ 4. Лінійні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.....	28
§ 5. Застосування диференціальних рівнянь до розв'язування задач.....	28
Глава 3. РЯДИ.....	38
§ 1. Числові ряди.....	38
1.1. Основні поняття. Необхідна умова збіжності ряду.....	38
1.2. Знакододатні числові ряди.....	39
1.3. Знакозмінні числові ряди.....	41
§ 2. Степеневі ряди.....	42
2.1. Поняття степеневого ряду. Теорема Абеля.....	42
2.2. Розвинення елементарних функцій у ряди Тейлора і Маклорена... ..	43
2.3. Деякі застосування степеневих рядів.....	45
§ 3. Ряди Фур'є.....	47

ВСТУП

Запропонований збірник задач охоплює традиційний курс вищої математики в обсязі, передбаченому діючими робочими програмами. Спираючись на власний досвід та враховуючи переваги і недоліки існуючих посібників, автори спробували в деякій мірі створити універсальний задачник, пристосований як для самоосвіти, так і для активного використання під час практичних занять, у тому числі і в якості домашніх завдань.

Матеріал згруповано та систематизовано відповідно до робочих планів з дисципліни. Особливу увагу приділено стандартним задачам, достатньої кількості яких так не вистачає викладачам і студентам для успішного здійснення процесу навчання. Також до збірника включено досить багато більш складних завдань та задач, що потребують творчого, нестандартного підходу. До всіх завдань надані відповіді, а деякі супроводжуються вказівками до розв'язання, які для зручності подано наприкінці кожної глави. Посібник дозволяє оперативно формувати загальні та індивідуальні завдання для поточного контролю, діагностувати засвоєння учбового матеріалу, вести контроль за самопідготовкою і прогнозувати результати навчання.

Автори мають надію, що збірник стане в нагоді як викладачам, так і студентам при вивченні курсу вищої математики.

Глава 1

ПОДВІЙНІ ТА КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

§1. Подвійний інтеграл

Обчислити повторні інтеграли.

$$1. \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x+y) dy. \quad 2. \int_0^2 dx \int_0^3 (x^3 + 2y) dy. \quad 3. \int_0^2 dy \int_0^1 (x^2 + 2y) dx.$$

$$4. \int_0^1 dx \int_x^{2x} (x-y+1) dy. \quad 5. \int_1^2 dx \int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2} dy. \quad 6. \int_2^0 dy \int_0^{y^2} (x+2y) dx.$$

$$7. \int_0^5 dx \int_0^{5-x} \sqrt{4+x+y} dy. \quad 8. \int_0^1 dy \int_0^1 \sqrt{xy} dx. \quad 9. \int_{-2}^4 dy \int_0^y \frac{y^3}{x^2 + y^2} dx.$$

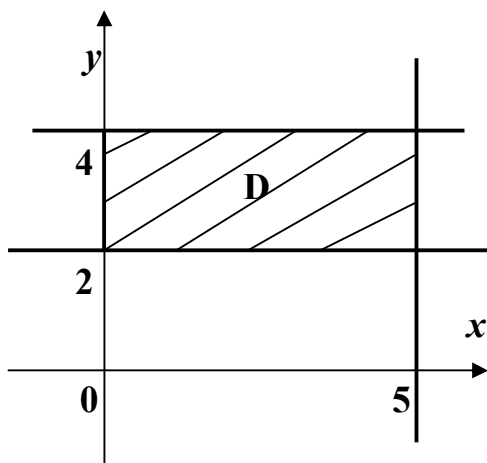
$$10. \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+y^2}. \quad 11. \int_0^{\pi/4} dy \int_y^{\pi/2-y} \sin(x+y) dx. \quad 12. \int_{\ln 3}^{\ln 4} dy \int_{1/6}^{1/3} 12ye^{6xy} dx.$$

$$13. \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{\cos \varphi}^{2 \cos \varphi} \rho d\rho. \quad 14. \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{4 \sin \varphi} \rho d\rho. \quad 15. \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a (a^2 - \rho^2) d\rho.$$

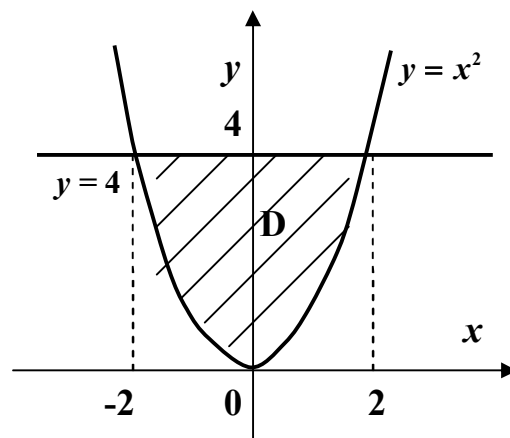
$$16. \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho^3 d\rho. \quad 17. \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int_0^a \rho \sin \varphi d\rho. \quad 18. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{3 \cos \varphi} \rho^2 \sin^2 \varphi d\rho.$$

Визначити (двома способами) за допомогою нерівностей область D , зображену на малюнку. Записати повторний інтеграл по даній області, обравши більш зручний порядок інтегрування.

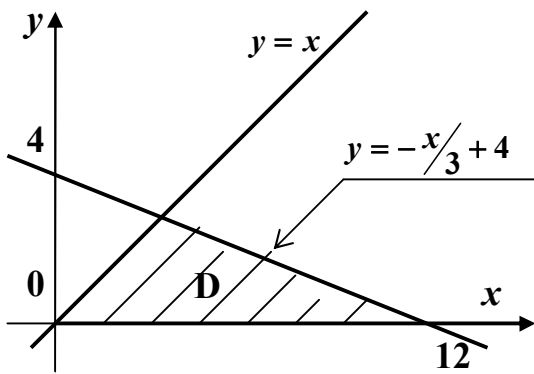
19.



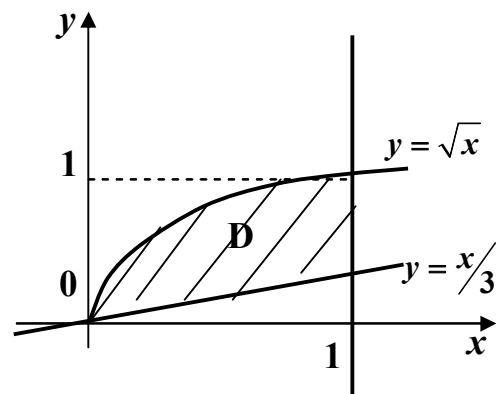
20.



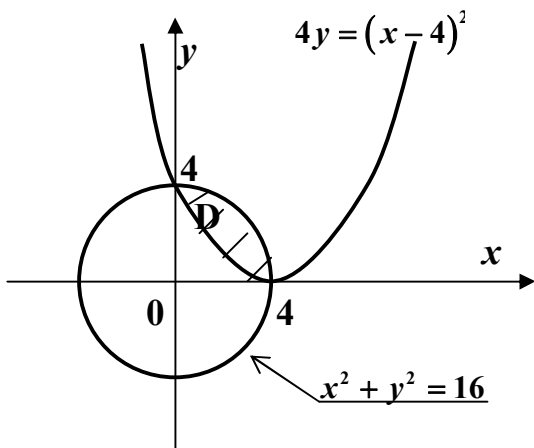
21.



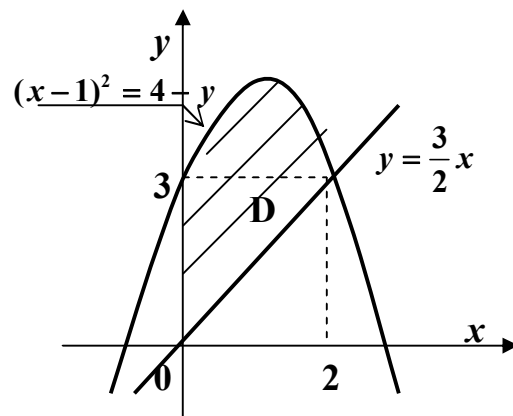
22.



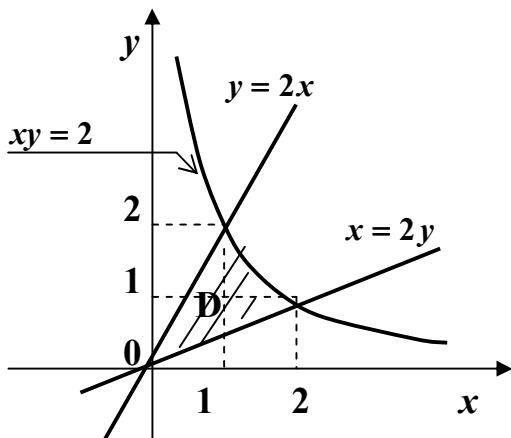
23.



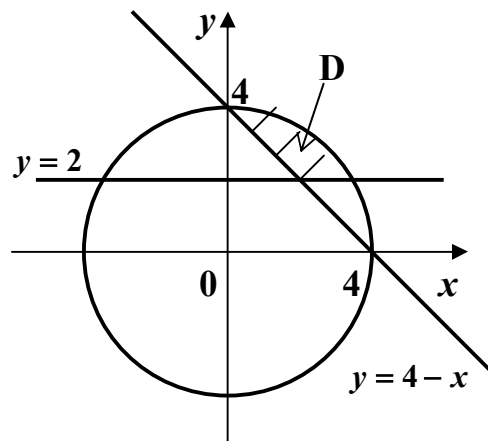
24.



25.



26.



Записати подвійний інтеграл у вигляді повторного, обравши більш зручний порядок інтегрування.

27. $\iint_D x \sin 2xy dx dy$, де область D : $x=0$, $x=\frac{\pi}{3}$, $y=0$, $y=\frac{1}{2}$.

$$28. \iint_D \frac{y}{\cos^2 2xy} dx dy, \text{ де область } D: x=0, x=1, y=0, y=\frac{\pi}{6}.$$

$$29. \iint_D e^{-y^2} dx dy, \text{ де } D: \text{ трикутник } OAB, \text{ де } O(0;0), A(0;1), B(1;1).$$

Змінити порядок інтегрування.

$$30. \int_0^2 dx \int_{x^2}^{2x} f(x,y) dy. \quad 31. \int_{-2}^2 dx \int_{x^2}^4 f(x,y) dy. \quad 32. \int_0^1 dy \int_y^1 f(x,y) dx.$$

$$33. \int_0^1 dy \int_{y^2}^y f(x,y) dx. \quad 34. \int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y) dx. \quad 35. \int_1^3 dy \int_0^{2y} f(x,y) dx.$$

$$36. \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy. \quad 37. \int_0^1 dx \int_{x^2+2}^{4-x} f(x,y) dy. \quad 38. \int_0^2 dx \int_{2x}^{6-x} f(x,y) dy.$$

$$39. \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^1 f(x,y) dy. \quad 40. \int_{-3}^0 dx \int_{-x}^3 f(x,y) dy + \int_0^3 dx \int_x^3 f(x,y) dy.$$

Обчислити інтеграли по заданій області.

$$41. \iint_D (2x+3y) dx dy, D: 1 \leq x \leq 2, 3 \leq y \leq 4.$$

$$42. \iint_D (x+y) dx dy, D: x=0, y=0, x+y-3=0.$$

$$43. \iint_D (x^2+y^2) dx dy, D: y=0, y=x, x=1.$$

$$44. \iint_D xy dx dy, D: y^2=2x, x=2.$$

$$45. \iint_D xy dx dy, D: x=0, x=a, y=0, y=b.$$

$$46. \iint_D xy dx dy, D: y=2x^2, y=3-x^2, x=0.$$

$$47. \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy, D: x=2, y=x, xy=1.$$

$$48. \iint_D (x+y^3) dx dy, D: y^2=4x, y=0, x+y=3.$$

$$49. \iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy, D: x=y^2, x=0, y=1.$$

$$50. \iint_D \sin(x+y) dx dy, D: y=0, y=x, x+y=\frac{\pi}{2}.$$

$$51. \iint_D (2x+3y+1) dx dy, D: \text{трикутник } ABC, \text{ де } A(1;3), B(-1;-1),$$

$C(2;4)$.

Записати область D у полярних координатах.

$$52. D - \text{квадрат } OABC, \text{ якщо } O(0;0), A(1;0), B(1;1), C(0;1).$$

$$53. D - \text{кільце, утворене колами } x^2 + y^2 = 1 \text{ та } x^2 + y^2 = 4.$$

$$54. D - \text{область обмежена лініями } x^2 + y^2 = 16, x^2 + y^2 - 8y = 0, x \geq 0.$$

$$55. D - \text{область обмежена лініями } x^2 + y^2 - 4x = 0, x^2 + y^2 - 2x = 0, y \geq 0.$$

$$56. D - \text{область обмежена лініями } x^2 + y^2 = 4y, x^2 + y^2 = 8y, y = x, y = 2x.$$

$$57. D - \text{область обмежена однією пелюсткою рози } (x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy.$$

Обчислити подвійні інтеграли в полярних координатах.

$$58. \iint_D \rho \sin \varphi d\rho d\varphi, \text{ де } D: \text{круговий сектор } \rho = a, \varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = \pi.$$

$$59. \iint_D \rho^2 d\rho d\varphi, \text{ де область } D: \text{кільце } \rho = a, \rho = 2a.$$

$$60. \iint_D \rho^2 d\rho d\varphi, \text{ де область } D \text{ обмежена кривою } \rho = a \sin 2\varphi.$$

$$61. \iint_D \rho d\rho d\varphi, \text{ де область } D \text{ обмежена кардіоїдою } \rho = a(1 + \cos \varphi) \text{ і}$$

колом $\rho = a$.

Перейти до полярних координат і обчислити інтеграли.

$$62. \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \text{ де область } D - \text{круг } x^2 + y^2 \leq R^2.$$

$$63. \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy, \text{ де область } D - \text{круг } x^2 + y^2 \leq 1.$$

$$64. \iint_D e^{-x^2 - y^2} dx dy, \text{ де область } D - \text{круг } x^2 + y^2 \leq a^2.$$

$$65. \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \text{ де область } D - \text{круг } x^2 + y^2 \leq 2ax.$$

66. $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, де область D – круг $x^2 + (y + 2)^2 \leq 4$.

67. $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, де область D – кільце між $x^2 + y^2 \geq 1$ і $x^2 + y^2 \leq 4$.

68. $\iint_D xy^2 dx dy$, де область D – кільце між $x^2 + (y - 1)^2 \geq 1$ і $x^2 + y^2 \leq 4y$.

69. $\iint_D y dx dy$, де область D : півкільце $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$, $y \geq 0$.

Обчислити площу області, обмеженої заданими лініями.

70. $y = x^2$, $x + y = 2$.

71. $y^2 = 2x$, $y = x$.

72. $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x = 4$.

73. $y = 2 - x$, $y^2 = 4x + 4$.

74. $x = 4y - y^2$, $x + y = 6$.

75. $y = x^2$, $y = 2x - x^2$.

76. $4y = x^2 - 4x$, $x - y - 3 = 0$.

77. $x + y = 1$, $x + 3y = 1$, $x = y$, $x = 2y$.

78. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$.

79. $y = \ln x$, $y = x - 1$, $y = -1$.

80. $y = \frac{x}{3}$, $y = \sqrt{x}$, $x = 1$.

81. $y^2 = 4 + x$, $x + 3y = 0$.

82. $3x^2 = 25y$, $5y^2 = 9x$.

83. $y = x^2$, $4y = x^2$, $y = 4$.

Обчислити у полярних координатах площу фігури, обмеженої заданими лініями.

84. $(x^2 + y^2)^2 = 2y^3$.

85. $x^2 + y^2 - 2ax = 0$.

86. $x^2 + y^2 - 8x = 0$, $x \geq 4$.

87. $x^2 + y^2 - 6y = 0$, $y \geq \frac{3}{2}$.

88. $x^2 + y^2 = 2$, $y \leq x$, $y \geq 0$.

89. $x^2 + y^2 = 12$, $x\sqrt{6} = y^2$, $x \geq 0$.

90. $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y^2 - 8y + x^2 = 0$, $x = \sqrt{3}y$, $x = 0$.

§ 2. Криволінійні інтеграли

2.1. Криволінійні інтеграли першого роду

Обчислити криволінійні інтеграли вздовж зазначених ліній L .

91. $\int_L x dl$, $L: x^2 = 2y$ від $O(0;0)$ до $A(\sqrt{8};4)$.

92. $\int_L \sqrt{x^3 y} dl$, $L: y = x^3$ від $O(0;0)$ до $A(1;1)$.

$$93. \int_L \frac{x}{y} dl, L: y^2 = 2x \text{ від } A(1; \sqrt{2}) \text{ до } B(2; 2).$$

$$94. \int_L \frac{x^3}{y^2} dl, L: xy = 1 \text{ від } A(1; 1) \text{ до } B\left(2; \frac{1}{2}\right).$$

$$95. \int_L x^2 dl, L: y = \ln x \text{ від } A(1; 0) \text{ до } B(e; 1).$$

$$96. \int_L (3x + y) dl, L: 3x + 2y - 1 = 0 \text{ від } A(1; -1) \text{ до } B(3; -4).$$

$$97. \int_L \frac{dl}{x - y}, L: \text{ відрізок прямої між точками } A(0; -2) \text{ і } B(4; 0).$$

$$98. \int_L y^3 dl, L: \text{ циклоїда } \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \text{ при } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$99. \int_L xy dl, L: \text{ дуга кола } x = \cos t, y = \sin t, \text{ що лежить в першій чверті.}$$

$$100. \int_L (x - y) dl, L: \text{ коло } x^2 + y^2 = 2x.$$

$$101. \int_L (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}) dl, L: \text{ дуга астроїди } \begin{cases} x = \sin^3 t, \\ y = \cos^3 t \end{cases} \text{ від } A(-1; 0) \text{ до}$$

$B(0; 1).$

$$102. \int_L xy(x^2 + y^2) dl, L: \text{ чверть кола } x^2 + y^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0.$$

$$103. \int_L (x + y) dl, L: \text{ права пелюстка лемніскати } \rho^2 = 4 \cos 2\varphi.$$

Знайти довжини дуг заданих кривих (вважати параметри додатніми).

$$104. y = \operatorname{ch} x \quad (0 \leq x \leq \ln 2).$$

$$105. \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \text{ якщо } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$106. \begin{cases} x = 3t, \\ y = 3t^2, \\ z = 2t^3 \end{cases}, \text{ від точки } O(0; 0; 0) \text{ до точки } A(3; 3; 2).$$

Обчислити площі заданих циліндричних поверхонь, розміщених між площиною Oxy і зазначеними поверхнями.

$$107. y = \frac{3}{8}x^2, \quad x = 0, \quad y = 6, \quad z = x.$$

$$108. x^2 + y^2 = 4, \quad 4z = xy.$$

2.2. Криволінійні інтеграли другого роду

Обчислити криволінійні інтеграли по дузі AB лінії інтегрування L .

$$109. \int_L \sqrt{x^2 + 3y^2} dx + (x - y) dy, \text{ де } L: y = x^2 \text{ від } A(0;0) \text{ до } B\left(1; \frac{1}{2}\right).$$

$$110. \int_L x^2 dx - 3xy dy, \text{ де } L: y = \frac{4}{x} \text{ від } A(1;4) \text{ до } B(2;2).$$

$$111. \int_L 2y^2 dx - x dy, \text{ де } L: y = -x^2 \text{ від } A(2;-4) \text{ до } B(1;-1).$$

$$112. \int_L (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy, \text{ де } L: y = x^2 \text{ від } A(-1;1) \text{ до } B(1;1).$$

$$113. \int_L 6x^2 y dx + 10xy^2 dy, \text{ де } L: y = x^3 \text{ від } A(1;1) \text{ до } B(2;8).$$

$$114. \int_L y dx + x^2 dy, \text{ де } L: \text{ відрізок прямої від } A(1;1) \text{ до } B(2;3).$$

$$115. \int_L (x + y) dx - x dy, \text{ } L: \text{ ламана } OBA, \text{ де } O(0;0), A(4;2) \text{ і } B(2;0).$$

$$116. \int_L \frac{y^2}{x} dx - x dy, \text{ де } L: y = \ln x \text{ від } A(1;0) \text{ до } B(e;1).$$

$$117. \int_L x dy - y dx, \text{ де } L: \text{ дуга астроїди } \begin{cases} x = a \sin^3 t, \\ y = a \cos^3 t \end{cases}, \text{ якщо } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$118. \int_L y(x - y) dx + x dy, \text{ де } L: y^2 = 4x \text{ від } A(0;0) \text{ до } B(1;2).$$

$$119. \int_L x dy - y dx, \text{ де } L: \text{ циклоїда } \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \text{ від } A(2\pi;0) \text{ до}$$

$B(0;0)$.

$$120. \int_L (xy - 1) dx + x^2 y dy, \text{ } L: \text{ дуга еліпса } \begin{cases} x = \cos t, \\ y = 2 \sin t \end{cases} \text{ від } A(1;0) \text{ до } B(0;2).$$

$$121. \int_L 2y dx + x dy, \text{ де } L: \text{ ламана } OAB, \text{ якщо } O(0;0), A(-3;-3), B(4;-3).$$

$$122. \int_L \frac{y^2 + 1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy, \text{ де } L: \text{ відрізок прямої від } A(1;2) \text{ до } B(2;4).$$

$$123. \int_L x dy, \text{ де } L: \text{права половина кола } x^2 + y^2 = a^2 \text{ від } A(0;-a) \text{ до}$$

$B(0;a)$.

З'ясувати, чи залежить криволінійний інтеграл від шляху інтегрування.

$$124. \int_L x^2 dx + y^3 dy. \quad 125. \int_L (6x^2 + 4x^3) dx + (6x^2 y + 3y^2) dy.$$

$$126. \int_L (3x + y) dl. \quad 127. \int_L (6xy + 4y^2 + 5y) dx + (3x^2 + 8xy + 5x) dy.$$

$$128. \int_L \sin y dx - y dy. \quad 129. \int_L \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x \right) dy.$$

$$130. \int_L \frac{2}{y \sin \frac{2x}{y}} dx - \frac{2x}{y^2 \sin \frac{2x}{y}} dy. \quad 131. \int_L \frac{x}{(x+y)^2} dx + \frac{2x+y}{(x+y)^2} dy.$$

$$132. \int_L \frac{-y^2 dx + x^2 dy}{(x-y)^2}. \quad 133. \int_L x t g y dx + y dy. \quad 134. \int_L x \ln y dx + \frac{x^2}{2y} dy.$$

Перевірити (без обчислення), чи дорівнює нулю даний інтеграл.

$$135. \oint_L y \sin x dx + \cos x dy. \quad 136. \oint_L 3y^2 dx + 6xy dy. \quad 137. \oint_L x^2 dy.$$

$$138. \oint_L xy dx + y dy. \quad 139. \oint_L y^2 dx - x^2 dy. \quad 140. \oint_L \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4} \right) dx - \frac{2y}{x^3} dy.$$

$$141. \oint_L (x^2 + y^2)(x dx + y dy). \quad 142. \oint_L \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} \right) dx + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2} \right) dy.$$

$$143. \oint_L (\sin y + y \cos x) dx + (x \cos y + \sin x) dy.$$

144. Чи можна застосувати формулу Гріна до обчислення інтеграла

$$\oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \text{ по колу } x^2 + y^2 = R^2?$$

145. За допомогою формули Гріна довести, що криволінійний інтеграл $\oint_L (6xy + 5y) dx + (3x^2 + 5y) dy$ дорівнює нулю для будь-якого контура та

перевірити результат, обчисливши інтеграл по контуру, обмеженому лініями $y = 0$, $x = 3$, $y = \sqrt{x}$.

146. Обчислити, застосовуючи формулу Гріна, інтеграл $\oint_L -x^2 y dx + xy^2 dy$ вздовж кола $x^2 + y^2 = a^2$, яке обходять в додатньому напрямі.

147. За допомогою формули Гріна обчислити інтеграл $\oint_L \frac{y}{x} dx + 2 \ln xy dy$, де L – замкнена ламана $ABCA$, якщо $A(1;0)$, $B(2;0)$, $C(1;2)$.

Обчислити за допомогою криволінійних інтегралів площі фігур, якщо їх обмежують дані лінії.

148. Параболи $y = x^2$ і $y = 2x - x^2$.

149. Петля декартового листа $x^3 + y^3 = 3axy$ ($a > 0$).

150. Еліпс $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t \end{cases}$ при $0 \leq t \leq 2\pi$.

§3. Застосування подвійних та криволінійних інтегралів у фізиці

151. Знайти масу прямокутної пластини $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$, якщо густина в кожній точці дорівнює кубу абсциси, помноженому на квадрат ординати цієї точки.

152. Знайти масу круглої пластини радіуса 2, якщо її густина пропорційна квадрату відстані точки від центра і дорівнює одиниці на краю пластини.

153. Знайти статистичний момент однорідного півкола радіуса a відносно його діаметра.

154. Знайти момент інерції однорідного прямокутника відносно його сторін, довжини яких a см і b см.

155. Знайти координати центра мас однорідної фігури, що лежить в першій чверті і обмежена еліпсом $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$ та координатними осями.

156. Обчислити масу дуги кінчної гвинтової лінії $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), якщо густина розподілу матеріалу дорівнює $2z$.

157. Визначити масу ділянки ланцюгової лінії $y = \operatorname{ch} x$ між точками $x = 0$, $x = 2$, якщо густина кривої в кожній точці обернено пропорційна ординаті точки.

158. Знайти центр маси однорідного півкола $x^2 + y^2 = R^2$, $y \geq 0$.

159. Знайти координати центра маси однієї арки циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

160. Знайти роботу сили $\vec{F} = xy\vec{i} + (x + y)\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки з початку координат по кривій $y = x^3$ в точку $A(1;1)$.

161. Обчислити роботу силового поля $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ під час переміщення матеріальної точки вздовж верхньої половини еліпса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ від точки $M(4;0)$ до точки $N(-4;0)$.

Відповіді

1. $\frac{3}{20}$. 2. 26. 3. $\frac{14}{3}$. 4. $\frac{1}{3}$. 5. $\frac{9}{4}$. 6. -11,2. 7. $\frac{506}{15}$. 8. $\frac{4}{9}$. 9. 6π .

10. $\frac{\pi}{12}$. 11. $\frac{1}{2}$. 12. 5. 13. $\frac{3\pi}{4}$. 14. $\pi - 2$. 15. $\frac{1}{2}\pi a^4$. 16. $\frac{\pi}{32}$. 17. $\frac{a^2}{2}$.

18. $\frac{36}{15}$. 19. $D: 0 \leq x \leq 5, 2 \leq y \leq 4; \int_0^5 dx \int_2^4 f(x, y) dy = \int_2^4 dy \int_0^5 f(x, y) dx$.

20. $D: -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4$ або $-\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}, 0 \leq y \leq 4; \int_{-2}^2 dx \int_{x^2}^4 f(x, y) dy =$

$= \int_0^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$. 21. $D_1: 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq x, D_2: 3 \leq x \leq 12, 0 \leq y \leq -\frac{x}{3} + 4$

або $D: 0 \leq y \leq 3, y \leq x \leq 12 - 3y; \int_0^3 dy \int_y^{12-3y} f(x, y) dx$. 22. $D: 0 \leq x \leq 1,$

$\frac{x}{3} \leq y \leq \sqrt{x}$ або $D_1: 0 \leq y \leq \frac{1}{3}, y^2 \leq x \leq 3y, D_2: \frac{1}{3} \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq 1;$

$\int_0^1 dx \int_{\frac{x}{3}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy$. 23. $D: 0 \leq x \leq 4, \frac{1}{4}(x-4)^2 \leq y \leq \sqrt{16-x^2}$ або $0 \leq y \leq 4,$

$$2\sqrt{y} + 4 \leq x \leq \sqrt{16 - y^2}; \int_0^4 dx \int_{\frac{1}{4}(x-4)^2}^{\sqrt{16-x^2}} f(x,y) dy = \int_0^4 dy \int_{2\sqrt{y+4}}^{\sqrt{16-y^2}} f(x,y) dx. \quad 24. \quad D:$$

$$0 \leq x \leq 2, \quad \frac{3}{2}x \leq y \leq 4 - (x-1)^2 \quad \text{або} \quad D_1: 0 \leq y \leq 3, \quad 0 \leq x \leq \frac{2}{3}y, \quad D_2: 3 \leq y \leq 4,$$

$$1 - \sqrt{4-y} \leq x \leq 1 + \sqrt{4-y}; \int_0^2 dx \int_{\frac{3}{2}x}^{4-(x-1)^2} f(x,y) dy. \quad 25. \quad D_1: 0 \leq x \leq 1, \quad \frac{x}{2} \leq y \leq 2x,$$

$$D_2: 1 \leq x \leq 2, \quad \frac{x}{2} \leq y \leq \frac{2}{x} \quad \text{або} \quad D_1: 0 \leq y \leq 1, \quad \frac{y}{2} \leq x \leq 2y, \quad D_2: 1 \leq y \leq 2, \quad \frac{y}{2} \leq x \leq \frac{2}{y};$$

$$\int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} f(x,y) dy + \int_1^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2}{x}} f(x,y) dy = \int_0^1 dy \int_{\frac{y}{2}}^{2y} f(x,y) dx + \int_1^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{2}{y}} f(x,y) dx.$$

$$26. \quad D: 2 \leq y \leq 4, \quad 4 - y \leq x \leq \sqrt{16 - y^2} \quad \text{або} \quad D_1: 0 \leq x \leq 2, \quad 4 - x \leq y \leq \sqrt{16 - x^2},$$

$$D_2: 2 \leq x \leq 4, \quad 2 \leq y \leq \sqrt{16 - x^2}; \int_2^4 dy \int_{4-y}^{\sqrt{16-y^2}} f(x,y) dx. \quad 27. \quad \int_0^{\pi/3} x dx \int_0^{1/2} \sin 2xy dy.$$

$$28. \quad \int_0^{\pi/6} y dy \int_0^1 \frac{dx}{\cos^2 2xy}. \quad 29. \quad \int_0^1 e^{-y^2} dy \int_0^y dx. \quad \text{Зауваження. У випадку} \int_0^1 dx \int_x^1 e^{-y^2} dy$$

внутрішній інтеграл не виражається через елементарні функції.

$$30. \quad \int_0^4 dy \int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x,y) dx. \quad 31. \quad \int_0^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y) dx. \quad 32. \quad \int_0^1 dx \int_0^x f(x,y) dy.$$

$$33. \quad \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} f(x,y) dy. \quad 34. \quad \int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x,y) dy. \quad 35. \quad \int_0^2 dx \int_1^3 f(x,y) dy + \int_2^6 dx \int_{x/2}^3 f(x,y) dy.$$

$$36. \quad \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx. \quad 37. \quad \int_2^3 dy \int_0^{y-2} f(x,y) dx + \int_3^4 dy \int_0^{4-y} f(x,y) dx. \quad 38.$$

$$\int_0^4 dy \int_0^{y/2} f(x,y) dx + \int_4^6 dy \int_0^{6-y} f(x,y) dx. \quad 39. \quad \int_{-1}^0 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^1 f(x,y) dx + \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y) dx.$$

$$40. \quad \int_1^3 dy \int_{-y}^y f(x,y) dx. \quad 41. \quad -7,5. \quad 42. \quad 9. \quad 43. \quad \frac{1}{3}. \quad 44. \quad 0. \quad 45. \quad \frac{a^2 b^2}{4}. \quad 46. \quad 3,2.$$

47. $\frac{9}{4}$. 48. $\frac{106}{15}$. 49. $\frac{1}{2}$. 50. $\frac{1}{2}$. 51. 3. 52. $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq \rho \leq \frac{1}{\cos \varphi}$;
 $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \rho \leq \frac{1}{\sin \varphi}$. 53. $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $1 \leq \rho \leq 2$. 54. $\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$,
 $2 \leq \rho \leq 4 \sin \varphi$. 55. $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $2 \cos \varphi \leq \rho \leq 4 \cos \varphi$. 56. $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \operatorname{arctg} 2$,
 $4 \sin \varphi \leq \rho \leq 8 \sin \varphi$. 57. $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \rho \leq a \sqrt{\sin 2\varphi}$. 58. $\frac{a^2}{2}$. 59. $\frac{14}{3} \pi a^3$.
60. 0. 61. $\left(\frac{22}{9} + \frac{\pi}{2}\right) a^3$. 62. $\frac{\pi}{2} R^4$. 63. $\frac{2}{3} \pi$. 64. $\pi(1 - e^{-a^2})$. 65. $\frac{3}{2} \pi a^4$.
66. 24π . 67. 2π . 68. 0. 69. $\frac{52}{3}$. 70. 4,5. 71. $\frac{2}{3}$. 72. $\frac{14}{3}$. 73. $\frac{64}{3}$.
74. $\frac{1}{6}$. 75. $\frac{1}{3}$. 76. $\frac{8}{3}$. 77. $\frac{7}{20}$. 78. $\sqrt{2} - 1$. 79. $\frac{1}{2} - \frac{1}{e}$. 80. $\frac{1}{2}$. 81. $\frac{125}{6}$.
82. 5. 83. $\frac{32}{3}$. 84. $\frac{5\pi}{8}$. 85. $\frac{3\pi a^2}{4}$. 86. $4(\pi + 4)$. 87. $\frac{12\pi - 9\sqrt{3}}{4}$.
88. $\frac{\pi}{4}$. 89. $\frac{3\pi}{2} - 1$. 90. $4\pi + 3\sqrt{3}$. 91. $\frac{26}{3}$. 92. $\frac{10\sqrt{10} - 1}{54}$. 93. $\frac{5\sqrt{5}}{6} -$
 $-\frac{3\sqrt{3}}{6}$. 94. $\frac{17\sqrt{17} - 2\sqrt{2}}{6}$. 95. $\frac{\sqrt{(e^2 + 1)^3} - 2\sqrt{2}}{3}$. 96. $\frac{7\sqrt{13}}{2}$. 97. $\sqrt{5} \ln 2$.
98. $\frac{256a^3}{15}$. 99. $\frac{1}{2}$. 100. 2π . 101. $-\frac{10}{7}$. 102. $\frac{R^5}{2}$. 103. $4\sqrt{2}$. 104. $\frac{3}{4}$.
105. $8a$. 106. 5. 107. $\frac{16}{27}(10\sqrt{10} - 1)$. 108. 2. 109. $\frac{17}{18}$. 110. $\frac{79}{3}$.
111. $-\frac{256}{15}$. 112. $-\frac{14}{5}$. 113. 3132. 114. $\frac{20}{3}$. 115. 4. 116. $\frac{1}{3}(4 - 3e)$.
117. $\frac{3\pi a^2}{4}$. 118. $-\frac{18}{15}$. 119. $6\pi a^2$. 120. $\frac{4}{3}$. 121. -55,5. 122. 3.
123. $\frac{1}{2} \pi a^2$. 124. Так. 125. Ні. 126. Ні. 127. Ні. 128. Так. 129. Ні.
130. Ні. 131. Ні. 132. Ні. 133. Так. 134. Ні. 135. Ні. 136. Так. 137. Ні.
138. Ні. 139. Ні. 140. Так. 141. Так. 142. Так. 143. Так. 144. Ні,
функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ мають розрив в точці $(0; 0)$, яка лежить в середині

кола. 146. $\frac{\pi a^4}{2}$. 147. $4 \ln 2 - 2$. 148. $\frac{1}{3}$. 149. $\frac{3}{2} a^2$. Вказівка. Покласти $y = tx$. 150. πab . 151. 36. 152. 2π . 153. $\frac{2}{3} a^3$. 154. $I_x = \frac{ab^3}{3} \text{см}^4$, $I_y = \frac{a^3 b}{3} \text{см}^4$. 155. $x = \frac{4}{\pi}$, $y = \frac{8}{\pi}$. 156. $\sqrt{3}$. 157. $\mu = \frac{k}{y}$, $m = 2k$. 158. $x = 0$, $y = \frac{2R}{\pi}$. 159. $x = \pi a$, $y = \frac{4}{3} a$. 160. $\frac{17}{12}$. 161. -12π .

Глава 2

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

§ 1. Диференціальні рівняння першого порядку

1. 1. Загальні поняття та означення

З'ясувати, чи буде функція $y = f(x)$ розв'язком диференціального рівняння.

1. $y = 5x^2$, $xy' = 2y$.

2. $y = 25(x + 2)^2$, $y' = 5\sqrt{y}$.

3. $y = -\frac{2}{x^2}$, $xy^2 dx - dy = 0$.

4. $y = (x + 2)e^x$, $y' - y = e^x$.

5. $y = e^{\text{tg} \frac{x}{2}}$, $y' \sin x = y \ln x$.

6. $y = x^3$, $y' = xe^{x^2}(1 + y^2)$.

7. $y = \frac{1}{x}$, $y'' = x^2 + y^2$.

8. $y = \ln \cos x$, $y' + \text{tg} x = 0$.

9. $y = C \cos 4x$, $y'' + 16y = 0$.

10. $y - x = 2e^y$, $(x - y + 1)y' = 1$.

Визначити тип рівняння та вказати метод його розв'язання.

11. $y' - 2\sqrt{y} \ln x = 0$.

12. $(1 - x^2)y' + xy - 3 = 0$.

13. $y' = 2x + \frac{y}{x}$.

14. $(y + xy^2)dx - xdy = 0$.

15. $y' \sin x = y \ln y$.

16. $xy' \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} - x$.

17. $y' - xy^2 = 2xy$.

18. $xy' = 2(y - \sqrt{xy})$.

19. $y' + 2y = y^2 e^x$.

20. $2x^2 dx - (x^2 + y^2) dy = 0$.

21. $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$.

22. $x(y' - y) = e^x$.

1.2. Рівняння з відокремлюваними змінними

Знайти загальні інтеграли або загальні розв'язки диференціальних рівнянь.

23. $xy' - y = 0$.

24. $(1 + y^2) + 2xyy' = 0$.

25. $y^2 dx + xdy = 0$.

26. $dy = 4(x + 1)^3 y^2 dx$.

27. $y' = -\operatorname{tg} x$.

28. $e^y (1 + x^2) dy - 2(1 + e^y) dx = 0$.

29. $y' = (2y + 1)\operatorname{tg} x$.

30. $\ln|\cos x| \cdot y' + y \operatorname{tg} x = 0$.

31. $xy' - y \ln y = 0$.

32. $(x^2 y - x^2) dy = (xy^2 + y^2) dx$.

33. $\operatorname{tg} y dx - x \ln x dy = 0$.

34. $x^2 (y^3 + 5) dx = -(x^3 + 5) y^2 dy$.

35. $e^{x^3} dy + 3x^2 \sqrt{1 - y^2} dx = 0$.

36. $(1 + x^2) y' + y \sqrt{1 + x^2} = xy$.

37. $5^{x^2+y} dy + x dx = 0$.

38. $y' = \frac{xy^3 + x}{y^2 - x^2 y^2}$.

39. $\sqrt{y^2 + 1} dx = xy dy$.

40. $y' = \sin \frac{x-y}{2} - \sin \frac{x+y}{2}$.

41. $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$.

42. $s' - \cos(s - t) = 0$.

Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь.

43. $yy' + x = 0, y(-2) = 4$.

44. $y' = y^2, y(-1) = 1$.

45. $y' = \sin 5x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

46. $x^2 y' + y^2 = 0, y(-1) = 1$.

47. $y = y' \ln y, y(2) = 1$.

48. $(1 + e^{2x}) y^2 dy = e^x dx, y(0) = 0$.

49. $y' = e^{x+y} + e^{x-y}, y(0) = 0$.

50. $(1 - e^{y^2}) dy = \frac{dx}{2y}, y(0) = 0$.

51. $\frac{yy'}{x} + e^y = 0, y(1) = 0$.

52. $(x^2 - 1) y' + 2xy^2 = 0, y(0) = 1$.

53. $xy' - \frac{y}{\ln x} = 0, y(e) = 1$.

54. $xy' + 2y = y^2, y(1) = 4$.

55. $y \ln^3 y + y' \sqrt{x+1} = 0, y\left(-\frac{15}{16}\right) = e$.

56. $x(y^6 + 1) dx + y^2(x^4 + 1) dy = 0, y(0) = 1$.

57. $3x^2(y+1) dx + (x^3 + 1) dy = 0, y(0) = 1$.

Записати рівняння кривої, яка проходить через точку $(x; y)$ та кутовий коефіцієнт дотичної до цієї кривої у кожній точці дорівнює k .

$$58. A(0;1), k = xy. \quad 59. A(1;2), k = \frac{y^2 - 1}{2x}.$$

$$60. A(-1;2), k = \frac{x}{y}. \quad 61. A\left(\frac{\pi}{3}; -1\right), k = -y \operatorname{tg} x.$$

$$62. A(0;4), k = 8\sqrt{y}. \quad 63. A\left(\frac{\pi}{2}; e\right), k = \frac{y \ln y}{\sin x}.$$

1.3. Однорідні диференціальні рівняння

Знайти загальні інтеграли або загальні розв'язки диференціальних рівнянь.

$$64. y' - \frac{y}{x} = \sin \frac{y}{x}. \quad 65. xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

$$66. y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}. \quad 67. xy' = y(\ln y - \ln x).$$

$$68. xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y. \quad 69. y' = \frac{x - y}{x - 2y}.$$

$$70. xy' \sin \frac{y}{x} + x = y \sin \frac{y}{x}. \quad 71. \left(y + \sqrt{x^2 - y^2}\right) dx - x dy = 0.$$

$$72. y dx + \left(2\sqrt{xy} - x\right) dy = 0. \quad 73. \left(x^2 + y^2\right) dx + 2xy dy = 0.$$

$$74. y' = \frac{x + y + 1}{x - y - 3}. \quad 75. y' = \frac{y + 2}{x + 1} + \operatorname{tg} \frac{y - 2x}{x + 1}.$$

Знайти розв'язок задачі Коші для диференціальних рівнянь.

$$76. xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y, y(1) = 0. \quad 77. \left(y' - \frac{y}{x}\right) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 1, y\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

$$78. x^2 y' = y^2 - 2x^2, y(1) = 4. \quad 79. xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y, y(1) = 0.$$

$$80. y^2 + x^2 y' = xy y', y(1) = 1. \quad 81. \left(2\sqrt{xy} - y\right) dx + x dy = 0, y(1) = 0.$$

$$82. y' = 4 + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}, y(1) = 2. \quad 83. \left(y^2 - 2xy\right) dx - x^2 dy = 0, y(1) = 3.$$

$$84. xy' = y - x, y(1) = 0. \quad 85. xy' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{x}, y(1) = 1.$$

1.4. Лінійні диференціальні рівняння. Рівняння Бернуллі

Знайти загальні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь.

$$86. (1 + x^2)y' + y = \operatorname{arctg} x.$$

$$87. y' + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^3}.$$

$$88. y' + 2y \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x}.$$

$$89. xy' - y = x^2 \cos x.$$

$$90. y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x.$$

$$91. y' - \frac{2y}{x} = \frac{e^x(x-2)}{x}.$$

$$92. y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

$$93. x \ln xy' + y = x(\ln x - 1).$$

$$94. y' - 2xy = 2xe^{x^2}.$$

$$95. (x^2 + 1)y' + 4xy = 3.$$

$$96. y' + 2y = x^2 + 2x.$$

$$97. y' + \frac{x}{1-x^2}y = 2.$$

$$98. y' = \frac{y}{(x+y^2)}.$$

$$99. (\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y)y' = 1.$$

Розв'язати рівняння Бернуллі.

$$100. y' - \frac{y}{x} = e^x y^2.$$

$$101. 4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5.$$

$$102. xy' + y = xy^2 \ln x.$$

$$103. (y^4 + 2x)y' = y.$$

$$104. y' + y = x\sqrt{y}.$$

$$105. y' - 3y + 3xe^{2x} \cdot \sqrt[3]{y} = 0.$$

$$106. xydy = (y^2 + x)dx.$$

$$107. y'x^3 \sin y = xy' - 2y.$$

$$108. (2x^2 y \ln y - x)y' = y.$$

$$109. (2xy + 3)dy - y^2 dx = 0.$$

Знайти частинні розв'язки рівнянь.

$$110. y' + \frac{5y}{x} = \frac{4}{x^5}, y(1) = 0.$$

$$111. y' + 2xy = xe^{-x^2}, y(0) = 0.$$

$$112. y' - \frac{y}{x} = -y^2, y(2) = 2.$$

$$113. y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x, y(e) = \frac{e^2}{2}.$$

$$114. y' \sin x - y \cos x = 1, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$115. y' + x \sqrt[3]{y} = 2y, y(0) = 6^{-\frac{3}{2}}.$$

$$116. y' + y = e^{\frac{x}{2}} \sqrt{y}, y(0) = \frac{9}{4}.$$

$$117. (x^2 \ln y - x)y' = y, y(1) = 1.$$

$$118. y' \cos 3x + 3y \sin 3x = \cos 3x \sin 6x, y(0) = \frac{1}{3}.$$

$$119. y' \sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x, y(0) = 0.$$

$$120. y' + \frac{3x^2 y}{x^3 + 1} = y^2 (x^3 + 1) \sin x, y(0) = 1.$$

§2. Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають пониження порядку

Знайти загальні розв'язки рівнянь.

$$121. y'' = x + \sin x.$$

$$122. y'' = \sin 4x + 2x - 3.$$

$$123. y'' = 3^{-x} + \cos x - 2x^3.$$

$$124. y'' = \cos 2x + \frac{1}{x}.$$

$$125. y'' = \sin^2 x + x \sin 2x.$$

$$126. y'' = \frac{1}{1+x^2} + x - \sin x.$$

$$127. y''' = e^{2x} + x^3.$$

$$128. y^{IV} = \cos 2x.$$

$$129. (1-x^2)y'' = xy'.$$

$$130. (x+1)y'' = y' - 1.$$

$$131. xy'' \ln x = y'.$$

$$132. xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}.$$

$$133. y'' + \frac{y'}{x} = x.$$

$$134. y'' - \frac{2y'}{x} = 2x^3.$$

$$135. 2xy'y'' = (y')^2 + 1.$$

$$136. y' + \frac{1}{4}(y'')^2 = xy''.$$

$$137. y''y^3 = 1.$$

$$138. yy'' = (y')^2.$$

$$139. 2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2.$$

$$140. 2yy'' + (y')^2 = 0.$$

$$141. yy'' - (y')^2 = y^2 \ln y.$$

$$142. y'' = y' \left(1 + (y')^2 \right).$$

$$143. yy'' - y' \left(2\sqrt{yy'} - y' \right) = 0.$$

$$144. yy'' = (y')^2 - (y')^3.$$

Розв'язати задачу Коші.

$$145. y'' = \frac{1}{\cos^2 x}, y(0) = 0, y'(0) = 0,6.$$

$$146. y'' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, y(0) = 2, y'(0) = 3.$$

$$147. y''' = \frac{6}{x^3}, y(1) = 0, y'(1) = 5, y''(1) = 1.$$

148. $y''' = e^{2x}$, $y(0) = \frac{9}{8}$, $y'(0) = \frac{1}{4}$, $y''(0) = -\frac{1}{2}$.
149. $y'' = xe^{-x}$, $y(0) = 1$, $y''(0) = 0$.
150. $yy'' + (y')^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
151. $y'' + 2y(y')^3 = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = \frac{1}{3}$.
152. $y'' \operatorname{tg} y - 2(y') = 0$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$, $y'(1) = 2$.
153. $y'' \cos y + (y')^2 \sin y = y'$, $y(-1) = \frac{\pi}{6}$, $y'(-1) = 2$.
154. $xy'' + y' = \ln x$, $y(1) = -2$, $y'(1) = -1$
155. $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$, $y(0) = \sqrt{2}$, $y'(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
156. $y''(x^2 + 1) = 2xy'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.
157. $y'' \operatorname{ctg} x + y' = 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
158. $y'' = \frac{y' + 2}{x + 2} \ln \frac{y' + 2}{x + 2}$, $y(-4) = 3$, $y'(-4) = 4$.

§3. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами

3.1. Лінійно залежні та незалежні функції. Визначник Вронського

Дослідити, чи є дані системи функцій лінійно залежними.

159. $y_1 = x + 2$, $y_2 = x - 2$. 160. $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$.
161. $y_1 = x$, $y_2 = e^x$, $y_3 = xe^x$. 162. $y_1 = \sin nx$, $y_2 = \cos nx$.
163. $y_1 = \sin \frac{n\pi x}{l}$, $y_2 = \cos \frac{n\pi x}{l}$. 164. $y_1 = 2^x$, $y_2 = 3^x$, $y_3 = 6^x$.
165. $y_1 = x$, $y_2 = e^x$, $y_3 = 0$. 166. $y_1 = x^2$, $y_2 = x$, $y_3 = |x|$.
167. $y_1 = x^2 - x + 3$, $y_2 = 2x^2 + x$, $y_3 = 2x - 4$.
168. $y_1 = 1$, $y_2 = \sin^2 x$, $y_3 = \cos 2x$.
169. $y_1 = \ln 3x$, $y_2 = \ln(x^2)$, $y_3 = 7$.
170. $y_1 = \sqrt{x}$, $y_2 = \sqrt{x+1}$, $y_3 = \sqrt{x+2}$.

$$171. y_1 = \operatorname{arctg} x, \quad y_2 = \operatorname{arctg} x, \quad y_3 = 1.$$

Скласти лінійні однорідні диференціальні рівняння за фундаментальною системою розв'язків.

$$172. y_1 = 2, \quad y_2 = e^{3x}.$$

$$173. y_1 = 2 \sin x, \quad y_2 = \cos x.$$

$$174. y_1 = e^{4x}, \quad y_2 = xe^{4x}.$$

$$175. y_1 = \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x}, \quad y_2 = 3e^{-\frac{1}{3}x}.$$

$$176. y_1 = e^{-4x}, \quad y_2 = e^{-5x}.$$

$$177. y_1 = \frac{1}{2}e^{-5x}, \quad y_2 = e^{5x}.$$

$$177. y_1 = e^{2x} \cos 3x, \quad y_2 = -e^{2x} \sin 3x.$$

$$178. y_1 = 2e^x, \quad y_2 = -3xe^x, \quad y_3 = e^{-x}.$$

$$179. y_1 = 2e^{-x}, \quad y_2 = e^{\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x, \quad y_3 = e^{\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

$$180. y_1 = 1, \quad y_2 = x, \quad y_3 = 2e^x, \quad y_4 = e^{-x}.$$

$$181. y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{-x}, \quad y_3 = \cos x, \quad y_4 = \sin x.$$

$$182. y_1 = 1, \quad y_2 = \cos 2x, \quad y_3 = \sin 2x, \quad y_4 = x \cos 2x, \quad y_5 = x \sin 2x.$$

3.2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння

Записати характеристичні рівняння для даних диференціальних рівнянь.

$$183. y'' - 5y' + 3y = 0. \quad 184. 2y'' - y' + 10y = 0. \quad 185. y'' - 7y' = 0.$$

$$186. \frac{1}{2}y'' + 5y = 0. \quad 187. y'' + \sqrt{3}y' = 0. \quad 188. y'' + y = 0.$$

$$189. y''' - 3y'' + 3y' - y = 0. \quad 190. y''' + 4y' - 12y = 0.$$

$$191. y^{IV} + 5y''' + y' - 3y = 0. \quad 192. y^{IV} - 6y' + y = 0.$$

Маючи корені характеристичного рівняння, записати загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння.

$$193. k_1 = 3, \quad k_2 = -4. \quad 194. k_1 = 2i, \quad k_2 = -2i.$$

$$195. k_1 = -\frac{1}{2}, \quad k_2 = \frac{1}{2}. \quad 196. k_1 = 1 + 3i, \quad k_2 = 1 - 3i.$$

$$197. k_1 = 5, \quad k_2 = 5. \quad 198. k_1 = 0, \quad k_2 = 7.$$

$$199. k_1 = 1, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = -1. \quad 200. k_1 = 1, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = 1.$$

$$201. k_1 = 2, \quad k_2 = 3i, \quad k_3 = -3i. \quad 202. k_1 = 0, \quad k_2 = 1 + i, \quad k_3 = 1 - i.$$

$$203. k_1 = k_2 = 0, \quad k_3 = 1, \quad k_4 = -1. \quad 204. k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_{3,4} = \pm i.$$

Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь.

205. $y'' + 4y' + 3y = 0$. 206. $y'' - 5y' + 6y = 0$. 207. $y'' - y' - 2y = 0$.
208. $2y'' - 5y' + 2y = 0$. 209. $y'' - 5y' = 0$. 210. $y'' + y' = 0$.
211. $3y'' + 8y' = 0$. 212. $y'' - 9y = 0$. 213. $4y'' - y = 0$.
214. $y'' - 3y = 0$. 215. $y'' + 4y' + 4y = 0$. 216. $y'' - 2y' + y = 0$.
217. $9y'' - 6y' + y = 0$. 218. $y'' + 49y = 0$. 219. $36y'' + y = 0$.
220. $y'' + 2y' + 5y = 0$. 221. $y'' - 6y' + 25y = 0$. 222. $y'' + 5y = 0$.
223. $y''' - 2y'' + y' = 0$. 224. $y''' - 64y' = 0$. 225. $y^{IV} - 8y = 0$.
226. $y^{IV} + 4y = 0$. 227. $y^{IV} + 2y'' + y = 0$. 228. $y^V - 6y^{IV} = 0$.
229. $y^{IV} - 13y'' + 36y = 0$. 230. $y''' - 5y'' + 9y' - 5y = 0$.
231. $8y''' - 12y'' + 6y' - y = 0$. 232. $y''' - 7y'' + 9y' + 17y = 0$.
233. $y^{IV} - 2y''' + 2y' - y = 0$. 234. $y^V - 10y''' + 9y' = 0$.

Розв'язати задачу Коші для диференціальних рівнянь.

235. $y'' + 4y' = 0$, $y(0) = 7$, $y'(0) = 8$.
236. $y'' + 3y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
237. $y'' - 16y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 8$.
238. $9y'' - y = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$.
239. $y'' - 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$.
240. $y'' + 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -6$.
241. $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
242. $4y'' + 4y' + y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.
243. $y'' - 4y' + 29y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 7$.
244. $y'' - 2y' + 10y = 0$, $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{\pi}{6}}$.
245. $9y'' + y = 0$, $y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2$, $y'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$.
246. $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
247. $y''' - y'' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$.
248. $y''' - 4y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 4$.

$$249. y''' - 13y'' + 12y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 133.$$

$$250. y''' - y'' + 4y' - 4y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0, \quad y'''(0) = -6.$$

$$251. y^{IV} - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = -4.$$

3.3. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння

По вигляду $f(x)$ визначити і записати структуру частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння (без обчислення числових значень коефіцієнтів).

$$252. 3y'' + 2y' = f(x):$$

$$a) f(x) = x^2; \quad б) f(x) = \sin 2x; \quad в) f(x) = xe^{-\frac{2x}{3}}; \quad г) f(x) = e^x + x.$$

$$253. 3y'' + 2y' - y = f(x):$$

$$a) f(x) = x^3 + 1; \quad б) f(x) = \cos 3x; \quad в) f(x) = e^{-x}; \quad г) f(x) = x^2 e^{\frac{x}{3}} + 2x.$$

$$254. y'' + 6y' + 10y = f(x):$$

$$a) f(x) = e^{-3x}; \quad б) f(x) = \cos x + x^2; \quad в) f(x) = x; \quad г) f(x) = e^{-3x} \sin x.$$

$$255. y'' + 10y' + 25y = f(x):$$

$$a) f(x) = e^{-5x}; \quad б) f(x) = e^{5x} + x; \quad в) f(x) = \cos 5x; \quad г) f(x) = xe^{-5x}.$$

$$256. y'' + 9y = f(x):$$

$$a) f(x) = e^{-3x}; \quad б) f(x) = x^3; \quad в) f(x) = \cos 3x + x; \quad г) f(x) = x \sin 3x.$$

$$257. y'' + 2y' = f(x):$$

$$a) f(x) = x \cos 2x; \quad б) f(x) = x^3 + x; \quad в) f(x) = x^2 e^{-2x}; \quad г) f(x) = e^{2x} + x.$$

$$258. y'' + 10y' + 26y = f(x):$$

$$a) f(x) = xe^{-5x}; \quad б) f(x) = \cos x; \quad в) f(x) = xe^{-5x} \sin x; \quad г) f(x) = x + e^{5x}.$$

$$259. y'' + 6y' - 7y = f(x):$$

$$a) f(x) = e^x; \quad б) f(x) = 3e^{2x} + x^2; \quad в) f(x) = 2xe^x; \quad г) f(x) = x^2 e^{-7x}.$$

$$260. y'' - 8y' + 16y = f(x):$$

$$a) f(x) = 3xe^{4x}; \quad б) f(x) = (2x^2 + 1)e^{4x}; \quad в) f(x) = 2e^{4x}; \quad г) f(x) = 3 \sin 4x + x.$$

$$261. y'' + 16y = f(x):$$

а) $f(x) = xe^{4x}$; б) $f(x) = x \sin 4x$; в) $f(x) = \cos 4x$; г) $f(x) = 2x^2 - x + \cos^2 x$.

262. $2y''' - 5y'' + 4y' - y = f(x)$:

а) $f(x) = x$; б) $f(x) = xe^x$; в) $f(x) = 3e^{2x}$; г) $f(x) = \sin x + x$.

263. $y''' - 3y'' - 9y' - 5y = f(x)$:

а) $f(x) = 3x^2e^{-x}$; б) $f(x) = 2xe^{-x}$; в) $f(x) = 4e^{5x}$; г) $f(x) = 5x^2 - 1 + \cos^2 x$.

264. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = f(x)$:

а) $f(x) = 3e^x$; б) $f(x) = \cos 2x$; в) $f(x) = (4x + 1)e^{2x}$; г) $f(x) = x^2e^{2x} + 2$.

265. $y''' + y'' - 2y = f(x)$:

а) $f(x) = xe^{-x} \sin x$; б) $f(x) = e^{-x}$; в) $f(x) = 3xe^x$; г) $f(x) = \cos x$.

266. $y''' - 7y' + 6y = f(x)$:

а) $f(x) = 2xe^x$; б) $f(x) = 4x^2e^{-3x}$; в) $f(x) = 3e^{2x}$; г) $f(x) = x + \sin^2 x$.

Знайти загальні розв'язки лінійних неоднорідних рівнянь зі спеціальною правою частиною методом невизначених коефіцієнтів.

267. $y'' - 6y' + 10y = 51e^{-x}$.

268. $y'' + 3y' = 20e^{2x}$.

269. $y'' - 2y' + 2y = x^2$.

270. $2y'' - y' - y = 4xe^{2x}$.

271. $y'' + y' = 2x - 1$.

272. $y'' + 3y' = 16 - 6x$.

273. $y'' - 3y' + 2y = x^3$.

274. $y'' - 6y' + 8y = 3x^2 + 2x + 1$.

275. $y'' - 7y' + 6y = e^x(x - 2)$.

276. $y'' + 9y = e^{3x}(x^2 + 1)$.

277. $y'' - 9y' + 20y = x^2e^{4x}$.

278. $y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}$.

279. $y'' + 2y' + 5y = 2 \cos x$.

280. $y'' - 6y' + 25y = 2 \sin x + 3 \cos x$.

281. $y'' + 4y = \cos 2x$.

282. $y'' - y' = 3e^{2x} \cos x$.

283. $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$.

284. $y'' + y = -4 \cos x - 2 \sin x$.

285. $y'' + 4y' + 3y = x + e^{2x}$.

286. $y''' + y'' - 2y' = x - e^x$.

287. $y'' + y' = \sin^2 x$.

288. $y'' - y = x \cos^2 x$.

Знайти частинні розв'язки лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь зі спеціальною правою частиною.

289. $y'' - 2y' + y = x - 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

290. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

$$291. y'' + y' - 12y = e^{4x}(16x + 22), \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 5.$$

$$292. y'' + y = 4e^x, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -3.$$

$$293. y'' - 2y' = 2e^x, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = 0.$$

$$294. y'' - y = xe^x, \quad y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = 1.$$

$$295. y'' - 2y' + y = e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3.$$

$$296. y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2.$$

$$297. y'' + 4y' + 5y = 2\cos x - \sin x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

$$298. y'' + y' - 2y = 8\sin 2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

$$299. y'' - y = 8\cos 3x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

$$300. y'' + 5y' + 6y = 12\cos 2x - 8\sin 2x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

$$301. y'' + y = -8\sin x - 6\cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2.$$

$$302. y'' + y = \cos 3x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$$303. y'' - 2y' + 37y = 36e^x \cos 6x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6.$$

Знайти загальні розв'язки рівнянь методом варіації довільних сталих.

$$304. y'' + y = \operatorname{tg} x.$$

$$305. y'' + y = \frac{1}{\sin x}.$$

$$306. y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}.$$

$$307. y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{1 + e^{2x}}.$$

$$308. y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

$$309. y'' - y' = e^{2x} \sin e^x.$$

$$310. y'' - 6y' + 9y = \frac{9x^2 + 6x + 2}{x^3}.$$

$$311. y'' + 8y' + 17y = \frac{1}{e^{2x} \sin^3 x}.$$

$$312. y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}.$$

$$313. y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

$$314. y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{\cos x}.$$

$$315. y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1}.$$

$$316. y'' - y' = e^{2x} \sqrt{1 - e^{2x}}.$$

$$317. y'' + y = \frac{1}{\sqrt{\sin^5 x \cos x}}.$$

§4. Лінійні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Розв'язати системи диференціальних рівнянь методом виключення невідомих.

$$318. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases} \quad 319. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -7x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 5y. \end{cases} \quad 320. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

$$321. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 3y. \end{cases} \quad 322. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 6y. \end{cases} \quad 323. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y + t. \end{cases}$$

$$324. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sin t - 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = \cos t + 4x + 2y. \end{cases} \quad 325. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + z, \\ \frac{dz}{dt} = 3x + y. \end{cases} \quad 326. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + z, \\ \frac{dz}{dt} = x + y. \end{cases}$$

Знайти загальні розв'язки систем диференціальних рівнянь методом Лагранжа.

$$327. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -7x + 5y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 8y. \end{cases} \quad 328. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x - 8y, \\ \frac{dy}{dt} = -3x - 3y. \end{cases} \quad 329. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x - 6y, \\ \frac{dy}{dt} = -4x - 2y. \end{cases}$$

$$330. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 8x + y. \end{cases} \quad 331. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 6y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 2y. \end{cases} \quad 332. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

$$333. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 5y, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y. \end{cases} \quad 334. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y, \\ \frac{dz}{dt} = 2x + 3y + 4z. \end{cases} \quad 335. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - z, \\ \frac{dy}{dt} = x, \\ \frac{dz}{dt} = x - y. \end{cases}$$

§5. Застосування диференціальних рівнянь до розв'язування задач

336. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $M(0; -2)$ і кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій точці дорівнює ординаті цієї точки,

збільшеної на 3 одиниці.

337. Човен втрачає свою швидкість під впливом опору води, який пропорційний швидкості човна. Початкова швидкість човна дорівнює 2 м/с , а його швидкість через 4 с дорівнює 1 м/с . Через який час швидкість човна буде дорівнювати $0,25 \text{ м/с}$? Який шлях пропливе човен до зупинки?

338. З експерименту відомо, що швидкість розмноження бактерій при достатньому запасі живлення пропорційна їх кількості. За який час кількість бактерій збільшиться в m раз?

339. Під час хімічної реакції з речовини A утворюється речовина C . Швидкість реакції пропорційна кількості речовини A , яка залишається. Визначити закон зміни речовини C .

340. Знайти рівняння форми дзеркала, яка збирає усі паралельні промені до однієї точки.

341. Ізольованому проводу надається електричний заряд $Q = Q_0$. Внаслідок поганої ізоляції провід втрачає цей заряд. Швидкість втрати заряду за час t пропорційна наявному заряду. Знайти закон змінювання заряду.

342. Потяг рухається горизонтально зі швидкістю 72 км/год . За який час і на якій відстані він зупиниться, якщо сила опору руху після початку гальмування дорівнює $0,2$ його ваги?

343. Вільно висячий на гаку одномірний ланцюг зісковзує з нього під дією сили ваги (тертям знехтувати). Визначити, за який час зісковзне весь ланцюг, якщо в початковий момент часу ланцюг покоївся і його довжина з одного боку гака дорівнювала 10 м , а з другого – 8 м .

344. Тіло масою m коливається під дією пружної сили стискання-розтягнення пружини kS , де k – коефіцієнт жорсткості пружини. Знайти закон його руху (силою опору знехтувати) $S = S(t)$ за начальними умовами: $S(0) = A$, $S'(0) = v_0 = 0$.

Відповіді

1. Так. 2. Ні. 3. Так. 4. Так. 5. Так. 6. Ні. 7. Ні. 8. Так. 9. Так.
10. Так. 11. З відокремлюваними змінними. 12. Лінійне. 13. Лінійне.
14. Бернуллі. 15. З відокремлюваними змінними. 16. Однорідне. 17. З відокремлюваними змінними. 18. Однорідне. 19. Бернуллі. 20. Однорідне.

21. Однорідне. 22. Лінійне. 23. $y = Cx$. 24. $1 + y^2 = \frac{C}{x}$. 25. $\ln|Cx| = \frac{1}{y}$.

26. $-\frac{1}{y} = (x+1)^4 + C$. 27. $y = \ln C \cos x$. 28. $\ln(1 + e^y) = 2 \operatorname{arctg} x + C$.

29. $\sqrt{2y+1} = \frac{C}{\cos x}$. 30. $y = C \ln|\cos x|$. 31. $y = e^{Cx}$. 32. $\frac{x+y}{xy} = \ln \frac{x}{y} + C$.

33. $x = e^{C \sin y}$. 34. $(x^3 + 5)(y^3 + 5) = C$. 35. $\arcsin y = e^{-x^2} + C$. 36. $y = C \times$
 $\times \sqrt{1+x^2} \left(x - \sqrt{1+x^2} \right)$. 37. $5^y = \frac{1}{2 \cdot 5^{x^2}} + C \ln 3$. 38. $\sqrt[3]{y^3+1} = \frac{C}{\sqrt{x^2-1}}$.

39. $\ln x = \sqrt{y^2+1} + C$. 40. $y = 4 \operatorname{arctg} e^{C-2\sin \frac{x}{2}}$. 41. $\sqrt{4x+2y-1} - x - C =$
 $= 2 \ln(\sqrt{4x+2y-1} + 2)$. 42. $\operatorname{ctg} \frac{s-t}{2} = t + C$. 43. $y^2 = 20 - x^2$. 44. $y = -\frac{1}{x}$.

45. $y = -\frac{1}{5} \cos 5x + 1$. 46. $y = -x$. 47. $2x - 4 = \ln^2 y$. 48. $\frac{y^3}{3} + \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} e^x$.

49. $y = \ln \operatorname{tg} \left(e^x + \frac{\pi}{4} - 1 \right)$. 50. $e^{y^2} - y^2 + x = 1$. 51. $2e^{-y}(y+1) = x^2 + 1$.

52. $y = \frac{1}{\ln|x^2-1|+1}$. 53. $y = \ln|x|$. 54. $\frac{y-2}{y} = \frac{x^2}{2}$. 55. $\frac{1}{\ln^2 y} = 4\sqrt{x+1}$.

56. $3 \operatorname{artg} x x^2 + 2 \operatorname{arctg} y^3 = \frac{\pi}{2}$. 57. $x^2 y + x^3 + y = 1$. 58. $y = e^{x^2/2}$.

59. $\frac{y-1}{y+1} = \frac{1}{3} x$. 60. $x^2 - y^2 + 3 = 0$. 61. $y = -2 \cos x$. 62. $y = (4x+2)^2$.

63. $y = e^{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$. 64. $\operatorname{tg} \frac{y}{2x} = Cx$. 65. $\sin \frac{y}{x} = Cx$. 66. $y^2 = 2x^2 \ln|Cx|$.

67. $y = xe^{1+Cx}$. 68. $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C + 2 \ln|x|$. 69. $2y^2 - 2xy + x^2 = C$. 70. $Cx =$
 $= e^{\cos \frac{y}{x}}$. 71. $\arcsin \frac{y}{x} - \ln|x| = C$. 72. $\ln|Cx| = \sqrt{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x}$. 73. $y^2 = \frac{C}{3x} - \frac{x^2}{3}$.

74. $C = \operatorname{arctg} \frac{y+2}{x-1} - \frac{1}{2} \ln \left((x-1)^2 + (y+2)^2 \right)$. 75. $\sin \frac{y-2x}{x+1} = C(x+1)$.

76. $y = -x \ln|1 - \ln x|$. 77. $\ln 2 \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. 78. $\frac{y-2x}{y+2x} = \frac{x^3}{3}$.

79. $\arcsin \frac{y}{x} = \ln|x|$. 80. $e^{\frac{y}{x}} = ey$. 81. $y = x \ln^2|x|$. 82. $2 \ln|x| + \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{y}{2x}$.
83. $\frac{y-3x}{y} = \ln^3|x|$. 84. $y = x \arcsin x$. 85. $\ln|x+y| - \ln|x| = x \ln 2$.
86. $y = \operatorname{arctg} x - 1 + Ce^{-\operatorname{arctg} x}$. 87. $y = \frac{1}{x^2}(\ln|x| + C)$. 88. $y = \frac{C - \cos x}{\sin^2 x}$.
89. $y = x(\sin x + C)$. 90. $y = \cos x(\sin x + C)$. 91. $y = Cx^2 + e^x$.
92. $y = Ce^{-\sin x} + \sin x + 1$. 93. $y = C \ln|x| + x$. 94. $y = (x^2 + C)e^{x^2}$.
95. $y = \frac{x^3 + 3x + 6}{(x^2 + 1)^2}$. 96. $y = \frac{1}{4}(2x^2 + 2x - 1) + Ce^{-2x}$. 97. $y = \sqrt{1-x^2} \times$
 $\times (2 \arcsin x + C)$. 98. $x = y^2 + Cy$. 99. $x = (C - \cos y) \sin y$.
100. $y = \frac{x}{e^x(1-x) - C}$. 101. $x^3(e^x + C)y^4 = 1$. 102. $xy(C + \ln^2 x) + 2 = 0$.
103. $x = Cy^2 + \frac{y^4}{2}$. 104. $y = \frac{1}{4}\left(2x - 4 + Ce^{-\frac{x}{2}}\right)^2$. 105. $y = e^{2x}(C - x^2)^{\frac{3}{2}}$.
106. $y^2 = Cx^2 - 2x$, $x = 0$ – особливий розв'язок. 107. $x^2(C - \cos y) = y$,
 $y = 0$ – особливий розв'язок. 108. $xy(C - \ln^2 y) = 1$. 109. $x = Cy^2 - \frac{1}{y}$.
110. $y = \frac{4(x-1)}{x^5}$. 111. $y = \frac{1}{2}x^2e^{-x^2}$. 112. $y = \frac{2x}{x^2 - 2}$. 113. $y = \frac{x^2 \ln x}{2}$.
114. $y = -\cos x$. 115. $y = \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{6}\right)^{\frac{3}{2}}$. 116. $y = e^{-x}\left(\frac{e^x}{2} + 1\right)^2$. 117. $x \ln y =$
 $= 1 - x$. 118. $y = \cos 3x \left(1 - \frac{2}{3} \cos 3x\right)$. 119. $y = e^{-\arcsin x} + \arcsin x - 1$.
120. $y = x \arcsin^2 x + 2 \arcsin x \sqrt{1-x^2} - 2x + C$. 121. $y = -\sin x + \frac{1}{6}x^3 +$
 $+ C_1x + C_2$. 122. $y = -\frac{1}{16} \sin 4x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C_1x + C_2$. 123. $y = \frac{3^{-x}}{\ln^2 3} -$
 $-\cos x - \frac{x^5}{10} + C_1x + C_2$. 124. $y = -\frac{1}{4} \cos 2x + \ln|x| + C_1x + C_2$. 125. $y = \frac{1}{4}x^2 -$

$$-\frac{1}{4}x \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + C_1 x + C_2. \quad 126. \quad y = x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \frac{x^3}{6} +$$

$$+ \sin x + C_1 x + C_2. \quad 127. \quad y = \frac{e^{2x}}{8} + \frac{x^6}{20} + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3. \quad 128. \quad y = C_1 x^3 +$$

$$+ C_2 x^2 + C_3 x + C_4 + \frac{1}{16} \cos 2x. \quad 129. \quad y = C_1 \arcsin x + C_2. \quad 130. \quad y = x +$$

$$+ C_1 (x+1)^2 + C_2. \quad 131. \quad y = C_1 x (\ln|x| - 1) + C_2. \quad 132. \quad y = e^{\frac{C_1+x}{C_1}} (C_1 x - C_1^2) + C_2.$$

$$133. \quad y = \frac{x^3}{3} + C_1 \ln|x| + C_2. \quad 134. \quad y = \frac{1}{5} x^5 + C_1 x^3 + C_2. \quad 135. \quad y = C_2 +$$

$$+ \frac{2}{3C_1} \sqrt{(C_1 x - 1)^3}. \quad 136. \quad y = C_1 x^2 - C_1^2 x + C_2, \quad y = \frac{1}{3} x^3 + C - \text{особливий}$$

розв'язок. $137. \quad C_1 y^2 - 1 = (C_1 x + C_2)^2. \quad 138. \quad y = C_1 e^{C_2 x}.$

$$139. \quad y \cos^2(x + C_1) = C_2. \quad 140. \quad y = (C_1 x + C_2)^{\frac{2}{3}}. \quad 141. \quad \ln y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

$$142. \quad y = \pm \arcsin e^{x+C_1} + C_2, \quad y = C - \text{особливий розв'язок.} \quad 143. \quad x + C_2 =$$

$$= \ln|y + C_1| + \frac{C_1}{y + C_1}. \quad 144. \quad y + C_1 \ln|y| = x + C_2, \quad y = C - \text{особливий розв'язок.}$$

$$145. \quad y = -\ln|\cos x| + 0,6x + 1. \quad 146. \quad y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + 3x + 1.$$

$$147. \quad y = 3 \ln x + 2x^2 - 2x. \quad 148. \quad y = 8e^{2x} - \frac{5}{4}x^2 - \frac{15}{4}x - \frac{55}{8}. \quad 149. \quad y = x - 1 +$$

$$+ (x+2)e^{-x}. \quad 150. \quad y^2 = 2x + 1. \quad 151. \quad \frac{y^3}{3} - y = x + \frac{2}{3}. \quad 152. \quad y = \operatorname{arctg}(1-x^2).$$

$$153. \quad \operatorname{Intg}\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = 2x + 2. \quad 154. \quad y = x \ln x - 2x. \quad 155. \quad y = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{6}x^3.$$

$$156. \quad y = x^2 + 3x + 1. \quad 157. \quad y = 2x. \quad 158. \quad y = 2x \left(e^{\frac{x+y}{2}} - 1 \right) + 3. \quad 159. \quad \text{Hi.}$$

$$160. \quad \text{Hi.} \quad 161. \quad \text{Hi.} \quad 162. \quad \text{Hi.} \quad 163. \quad \text{Hi.} \quad 164. \quad \text{Hi.} \quad 165. \quad \text{Так.} \quad 166. \quad \text{Hi.}$$

$$167. \quad \text{Так.} \quad 168. \quad \text{Так.} \quad 169. \quad \text{Так.} \quad 170. \quad \text{Hi.} \quad 171. \quad \text{Так.} \quad 172. \quad y'' - 3y' = 0.$$

$$173. \quad y'' + y = 0. \quad 174. \quad y'' - 8y' + 16y = 0. \quad 175. \quad 9y'' - y = 0.$$

$$176. \quad y'' + 9y' + 20y = 0. \quad 177. \quad y'' - 25y = 0. \quad 178. \quad y''' - y'' - y + 1 = 0.$$

$$179. \quad y''' + y = 0. \quad 180. \quad y^{IV} - y'' = 0. \quad 181. \quad y^{IV} - 1 = 0. \quad 182. \quad y' + 8y''' + 16y' = 0.$$

$$183. \quad k^2 - 5k + 3 = 0. \quad 184. \quad 2k^2 - k + 10 = 0. \quad 185. \quad k^2 - 7k = 0. \quad 186. \quad k^2 +$$

- $+10k - 18 = 0$. 187. $k^2 + \sqrt{3}k = 0$. 188. $k^2 + 1 = 0$. 189. $k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0$.
 190. $k^3 + 4k - 12 = 0$. 191. $k^4 + 5k^3 + k - 3 = 0$. 192. $k^4 - 6k + 1 = 0$.
 193. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-4x}$. 194. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. 195. $y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x}$.
 196. $y = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$. 197. $y = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x}$. 198. $y = C_1 + C_2 e^{7x}$.
 199. $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x}$. 200. $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x$.
 201. $y = C_1 e^{2x} + C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x$. 202. $y = C_1 + e^x (C_2 \cos x + C_3 \sin x)$.
 203. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 e^{-x}$. 204. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$.
 205. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$. 206. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$. 207. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$.
 208. $y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{2x}$. 209. $y = C_1 + C_2 e^{5x}$. 210. $y = C_1 + C_2 e^{-x}$.
 211. $y = C_1 + C_2 e^{\frac{8}{3}x}$. 212. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$. 213. $y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x}$.
 214. $y = C_1 e^{\sqrt{3}x} + C_2 e^{-\sqrt{3}x}$. 215. $y = e^{-2x} (C_1 + C_2 x)$. 216. $y = e^x (C_1 + C_2 x)$.
 217. $y = e^{\frac{1}{3}x} (C_1 + C_2 x)$. 218. $y = C_1 \cos 7x + C_2 \sin 7x$. 219. $y = C_1 \cos \frac{x}{6} +$
 $+ C_2 \sin \frac{x}{6}$. 220. $y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$. 221. $y = C_1 e^{3x} \cos 4x +$
 $+ C_2 e^{3x} \sin 4x$. 222. $y = C_1 \cos \sqrt{5}x + C_2 \sin \sqrt{5}x$. 223. $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 x e^x$.
 224. $y = C_1 + C_2 e^{-8x} + C_3 e^{8x}$. 225. $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 \cos \sqrt{3}x + C_4 \sin \sqrt{3}x$.
 226. $y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-x} (C_3 \cos x + C_4 \sin x)$. 227. $y = (C_1 + C_2 x) \times$
 $\times \cos x + (C_3 + C_4 x) \sin x$. 228. $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 e^{6x}$. 229.
 $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}$. 230. $y = C_1 e^x + C_2 e^x \cos 2x + C_3 e^x \sin 2x$.
 231. $y = e^{\frac{x}{2}} (C_1 x^2 + C_2 x + C_3)$. 232. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x} \cos x + C_3 e^{4x} \sin x$.
 233. $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x + C_4 e^{-x}$. 234. $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x} + C_4 e^{3x} +$
 $+ C_5 e^{-3x}$. 235. $y = 9 - 2e^{-4x}$. 236. $y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} e^{-3x}$. 237. $y = e^{4x} - e^{-4x}$.
 238. $y = -e^{\frac{x}{3}} - e^{-\frac{x}{3}}$. 239. $y = 4e^x + 2e^{3x}$. 240. $y = 4e^{-3x} - 3e^{-2x}$.
 241. $y = 2x e^{3x}$. 242. $y = e^{-\frac{x}{2}} (2 + x)$. 243. $y = e^{2x} (\sin 5x + \cos 5x)$.

244. $y = -\frac{1}{3}e^x \cos 3x$. 245. $y = 2 \sin \frac{x}{3}$. 246. $y = \sin 2x$. 247. $y = 1 + x - e^x$.
248. $y = e^{2x} - 1$. 249. $y = 10 - 11e^x + e^{12x}$. 250. $y = -2e^x + \cos 2x + \sin 2x$.
251. $y = e^{-x} - e^x + 2 \sin x$. 252. а) $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx$; б) $y = A \sin 2x + B \cos 2x$;
в) $y = e^{-2x/3}(Ax + B)x$; г) $y = Ae^x + (Bx + C)x$. 253. а) $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$;
б) $y = A \sin 3x + B \cos 3x$; в) $y = Axe^{-x}$; г) $y = e^{x/3}(Ax^2 + Bx + C)x + Dx + E$.
254. а) $y = Ae^{-3x}$; б) $y = A \sin x + B \cos x + Cx^2 + Dx + E$; в) $y = Ax + B$;
г) $y = xe^{-3x}(A \cos x + B \sin x)$. 255. а) $y = Ax^2e^{-5x}$; б) $y = Ae^{5x} + Bx + C$;
в) $y = A \sin 5x + B \cos 5x$; г) $y = e^{-5x}(Ax + B)x^2$. 256. а) Ae^{-3x} ;
б) $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$; в) $y = (A \sin 3x + B \cos 3x)x + Cx + D$; г) $y = x \times$
 $\times ((Ax + B) \sin 3x + (Cx + D) \cos 3x)$. 257. а) $y = (Ax + B) \sin 2x +$
 $+(Cx + D) \cos 2x$; б) $y = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)x$; в) $y = e^{-2x}(Ax^2 + Bx + C)x$;
г) $y = Ae^{2x} + (Bx + C)x$. 258. а) $y = e^{-5x}(Ax + B)$; б) $y = A \sin x + B \cos x$;
в) $y = ((Ax + B) \sin x + (Cx + D) \cos x)x$; г) $y = Ae^{5x} + Bx + C$. 259. а)
 $y = Axe^x$; б) $y = Ae^{2x} + Bx^2 + Cx + D$; в) $y = e^x(Ax + B)x$; г) $y = xe^{-7x} \times$
 $\times (Ax^2 + Bx + C)$. 260. а) $y = e^{4x}(Ax + B)x^2$; б) $y = e^{4x}(Ax^2 + Bx + C)x^2$;
в) $y = Axe^{4x}$; г) $y = A \sin 4x + B \cos 4x + Cx + D$. 261. а) $y = e^{4x}(Ax + B)$;
б) $y = ((Ax + B) \sin 4x + (Cx + D) \cos 4x)x$; в) $y = (A \sin 4x + B \cos 4x)x$;
г) $y = A \sin 2x + B \cos 2x + Cx^2 + Dx + E$. 262. а) $y = Ax + B$; б) $y = x^2e^x \times$
 $\times (Ax + B)$; в) $y = Axe^{x/2}$; г) $y = A \sin x + B \cos x + Cx + D$. 263. а) $y = e^{-x} \times$
 $\times (Ax^2 + Bx + C)x^2$; б) $y = e^{-x}(Ax + B)x^2$; в) $y = Axe^{5x}$; г) $y = A \sin 2x +$
 $+ B \cos 2x + Cx^2 + Dx + E$. 264. а) $y = Ae^x$; б) $y = A \sin 2x + B \cos 2x$;
в) $y = x^3e^x(Ax + B)$; г) $y = e^{2x}(Ax^2 + Bx + C)x^3 + D$. 265. а) $y = e^{-x} \times$
 $\times ((Ax^2 + Bx) \cos x + (Cx^2 + Dx) \sin x)$; б) $y = Ae^{-x}$; в) $y = e^x(Ax + B)x$;
г) $y = A \sin x + B \cos x$. 266. а) $y = e^x(Ax + B)x$; б) $y = e^{-3x}(Ax^2 + Bx + C)x$;
в) $y = Ae^{2x}$; г) $y = Ax + B + C \sin 2x + D \cos 2x$. 267. $y = 3e^{-x} +$

$$\begin{aligned}
& + C_1 e^{3x} \cos x + C_2 e^{3x} \sin x. \quad 268. \quad y = 2e^{2x} + C_1 + C_2 e^{-3x}. \quad 269. \quad y = \frac{1}{2}x^2 + x + \\
& + \frac{1}{2} + C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x. \quad 270. \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{-x/2} + \frac{4}{25}e^{2x}(5x - 7). \\
271. \quad & y = C_1 + C_2 e^{-x} + x^2 - 3x. \quad 272. \quad y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + 3x^2 e^{-2x}. \\
273. \quad & y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{21}{4}x + \frac{45}{8}. \quad 274. \quad y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{2x} + \\
& + \frac{1}{64}(24x^2 + 52x + 41). \quad 275. \quad y = C_1 e^{6x} + C_2 e^x + \frac{1}{20}e^x(45x - 2x^2). \\
276. \quad & y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + e^{3x} \left(\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81} \right). \quad 277. \quad y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{4x} + \\
& + e^{4x} \left(-\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x \right). \quad 278. \quad y = e^{6x} (C_1 + C_2 x + 7x^2). \quad 279. \quad y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + \\
& + C_2 \sin 2x) + \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x. \quad 280. \quad y = e^{3x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x) + \frac{7}{51} \cos x + \\
& + \frac{5}{102} \sin x. \quad 281. \quad y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4}x \sin 2x. \quad 282. \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \\
& + e^{2x} \left(\frac{3}{10} \cos x + \frac{3}{5} \sin x \right). \quad 283. \quad y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) - \frac{1}{2}x e^x \cos x. \\
284. \quad & y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (\cos x - 2 \sin x)x. \quad 285. \quad y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{3}x + \\
& + \frac{1}{15}e^{2x} - \frac{4}{9}. \quad 286. \quad y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}x e^x. \quad 287. \quad y = C_1 + \\
& + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{10} \cos 2x - \frac{1}{20} \sin 2x. \quad 288. \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{10}x \cos 2x + \\
& + \frac{2}{25} \sin 2x. \quad 289. \quad y = x(1 - e^x). \quad 290. \quad y = e^{3x}(22x - 6) + x^2 - 3x + 5. \\
291. \quad & y = e^{3x} + e^{-4x} + e^{4x}(2x + 1). \quad 292. \quad y = 2 \cos x - 5 \sin x + 2e^x. \quad 293. \quad y = 2e^{2x-1} - \\
& - 2e^x - 1. \quad 294. \quad y = \frac{7}{8}e^x - \frac{3}{8}e^{-x} + \frac{1}{4}x^2 e^x - \frac{1}{4}x e^x. \quad 295. \quad y = -e^x + 2x e^x + e^{2x}. \\
296. \quad & y = 3 - e^{-2x} + x^3 - x^2. \quad 297. \quad y = e^{-2x} \left(\frac{5}{8} \cos x + \frac{25}{8} \sin x \right) + \frac{3}{8} \cos x + \frac{1}{8} \sin x. \\
298. \quad & y = \frac{19}{15}e^{2x} + \frac{7}{5}e^{-x} - \frac{2}{5} \cos 2x - \frac{6}{5} \sin 2x. \quad 299. \quad y = -\frac{2}{5}e^x + \frac{3}{5}e^{-x} + \frac{4}{5} \cos 3x.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
300. \quad y &= e^{-2x} - e^{-3x} + \cos 2x - \sin 2x. & 301. \quad y &= -\frac{3\pi}{2} \cos x + \pi \sin x + 4x \cos x - \\
& - 3x \sin x. & 302. \quad y &= -\frac{11}{8} \cos x + 4 \sin x - \frac{1}{8} \cos 3x. & 303. \quad y &= e^x \sin 6x(1 + 3x). \\
304. \quad y &= C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right|. & 305. \quad y &= C_1 \cos x + C_2 \sin x + \\
& - x \cos x + \sin x \ln |\sin x|. & 306. \quad y &= \left(C_1 - \frac{1}{2 \cos^2 x} \right) \cos x + (C_2 + \operatorname{tg} x) \sin x. \\
307. \quad y &= C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{2} e^{-2x} \ln(1 + e^{2x}) - e^{-2x} + e^{-3x} \operatorname{arctg} e^x. & 308. \quad y &= e^{-x} \times \\
& \times \left(-\frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} \ln(e^x + 1) + C_1 \right) + e^x \left(\frac{1}{2} \ln \frac{e^x}{e^x + 1} + C_2 \right). & 309. \quad y &= C_1 + C_2 e^x - \sin e^x. \\
310. \quad y &= C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + \frac{1}{x}. & 311. \quad y &= e^{-2x} \left(C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{\cos 2x}{2 \sin x} \right). \\
312. \quad y &= e^{-2x} \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{2x} \right). & 313. \quad y &= (C_1 - x) e^x + (C_2 + \ln x) x e^x. \\
314. \quad y &= (\ln |\cos x| + C_1) e^{-x} \cos x + (x + C_2) e^{-x} \sin x. & 315. \quad y &= e^{-x} \left(\frac{4}{5} (x+1)^{\frac{5}{2}} + \right. \\
& \left. + C_1 + C_2 x \right). & 316. \quad y &= \frac{1}{2} e^x \left(\operatorname{arcsin} e^x + e^x \sqrt{1 - e^{2x}} + C_1 \right) + \frac{1}{3} \sqrt{(1 - e^{2x})^3} + C_2. \\
317. \quad y &= C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{4}{3} \cos x \sqrt{\operatorname{ctg} x}. & 318. \quad x &= 3C_1 e^{-3t} + C_2 e^t, \quad y = C_1 e^{-3t} - \\
& - C_2 e^t. & 319. \quad x &= e^{-6t} (C_1 \operatorname{cost} + C_2 \operatorname{sint}), \quad y = e^{-6t} (C_1 + C_2) \operatorname{cost} + \\
& + e^{-6t} (C_2 - C_1) \operatorname{sint}. & 320. \quad x &= C_1 e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t}, \quad y = -e^{\sqrt{2}t} (C_1 - \sqrt{2}C_1) - e^{-\sqrt{2}t} \times \\
& \times (C_2 + \sqrt{2}C_2). & 321. \quad x &= e^{2t} (C_1 \operatorname{cost} + C_2 \operatorname{sint}), \quad y = e^{2t} ((C_1 + C_2) \operatorname{cost} + \\
& + (C_2 - C_1) \operatorname{sint}). & 322. \quad x &= (C_1 + C_2 t) e^{4t}, \quad y = (2C_1 - C_2 - 2C_2 t) e^{4t}. & 323. \quad x &= C_1 + \\
& + C_2 e^{2t} - \frac{1}{4} (t^2 + t), \quad y &= C_2 e^{2t} - C_1 + \frac{1}{4} (t^2 - t - 1). & 324. \quad x &= C_1 + C_2 t + 2 \sin t, \\
& y &= -2C_1 - C_2 (2t + 1) - 3 \sin t - 2 \operatorname{cost}. & 325. \quad x &= -C_2 e^{-2t} + \frac{2}{3} C_3 e^{3t}, \quad y = C_1 e^{-t} + \\
& + C_2 e^{-2t} + C_3 e^{3t}, \quad z &= -C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + C_3 e^{3t}. & 326. \quad x &= C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}, \\
& y &= C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t}, \quad z &= -(C_1 + C_2) e^{-t} + C_3 e^{2t}. & 327. \quad x &= C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-12t},
\end{aligned}$$

$$y = 0,8C_1e^{5t} - C_2e^{-12t}. \quad 328. \quad x = C_1e^t + C_2e^{-9t}, \quad y = -0,75C_1e^t + 0,5C_2e^{-9t}.$$

$$329. \quad x = C_1e^{2t} + C_2e^{-8t}, \quad y = -C_1e^{2t} + \frac{2}{3}C_2e^{-8t}. \quad 330. \quad x = C_1e^{5t} + C_2e^{-t},$$

$$y = 2C_1e^{5t} - 4C_2e^{-t}. \quad 331. \quad x = C_1e^{8t} + C_2e^{-2t}, \quad y = \frac{2}{3}C_1e^{8t} - C_2e^{-2t}. \quad 332.$$

$$x = C_1e^{-2t} - (C_1t + C_2)e^{-2t}, \quad y = (C_1t + C_2)e^{-2t}. \quad 333. \quad x = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t),$$

$$y = \frac{1}{5}e^{-t}(C_2 - 2C_1)\cos t - \frac{1}{5}e^{-t}(C_1 + 2C_2)\sin t. \quad 334. \quad x = 3C_1e^t + C_3e^{5t},$$

$$y = -9C_1e^t + C_3e^{5t}, \quad z = 7C_1e^t + C_2e^{4t} + 5C_3e^{5t}. \quad 335. \quad x = C_1e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t, \\ y = C_1e^t + C_2 \sin t - C_3 \cos t, \quad z = C_2(\cos t + \sin t) + C_3(\sin t - \cos t).$$

$$336. \quad y = e^x - 3. \quad 337. \quad m \frac{dv}{dt} = -kv, \text{ де } m - \text{ маса човна, } k - \text{ коефіцієнт}$$

пропорційності, $v(t)$ – швидкість човна, $v(t) = 2^{1-\frac{t}{4}}$, $T = 12c$, $S \approx 11,5m$.

$$338. \quad \frac{dx}{dt} = kx, \text{ де } x(t) - \text{ кількість бактерій, що утворюються за час } t, k > 0,$$

$$T = \frac{\ln m}{k}. \quad 339. \quad \frac{dx}{dt} = k(a - x), \text{ де } a - \text{ початкова кількість речовини } A, k -$$

$$\text{коефіцієнт пропорційності, } x = a(1 - e^{-kt}). \quad 340. \quad y' = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}};$$

$y^2 = C(x + \sqrt{x^2 + y^2})$; дзеркальна поверхня має форму параболоїда обертання.

$$341. \quad Q = Q_0e^{-kt}, \text{ де } k - \text{ коефіцієнт пропорційності.} \quad 342. \quad m \frac{d^2S}{dt^2} = -0,2mg, \text{ де}$$

S – шлях, t – час, m – маса потягу, g – прискорення сили тяжіння;

$$S = -0,2g \frac{t^2}{2} + C_1t + C_2; \quad S = 20t - 0,1gt^2; \quad S \approx 102m. \quad 343. \quad \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{g}{9}x + g = 0, \text{ де}$$

m – маса одного погонного метра ланцюга, x – довжина частини ланцюга, яка

$$\text{звисяє з гака, } t - \text{ час; } x(t) = C_1e^{\frac{t\sqrt{g}}{3}} + C_2e^{-\frac{t\sqrt{g}}{3}} + 9; \quad T = \frac{3}{\sqrt{g}} \ln(9 + 4\sqrt{5}) \approx 2,76c.$$

$$344. \quad \frac{d^2S}{dt^2} + \omega^2 S = 0, \text{ де } \omega^2 = \frac{k}{m}; \quad S = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \quad S = A \cos \omega t.$$

Глава 3

РЯДИ

§1. Числові ряди

1.1. Основні поняття. Необхідна умова збіжності ряду

Записати формулу n -го члена ряду.

1. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \dots$

2. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

3. $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \dots$

4. $\frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{7}{8} + \dots$

5. $\frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{5}{10} + \dots$

6. $\frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^4} + \frac{6}{3^6} + \dots$

7. $\frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 5 \cdot 8} + \dots$

8. $\frac{1}{1 \cdot 2^2} + \frac{2}{3 \cdot 2^3} + \frac{3}{5 \cdot 2^4} + \dots$

9. $\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} + \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 11} + \dots$

10. $\frac{2}{\sqrt{1 \cdot 3}} + \frac{3}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} + \frac{5}{\sqrt{3 \cdot 3^3}} + \frac{9}{\sqrt{4 \cdot 3^4}} + \dots$

11. $\sin \frac{1}{3} + \sin^2 \frac{1}{5} + \sin^3 \frac{1}{7} + \dots$

12. $\left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{4}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{11}\right)^3 + \dots$

13. $\frac{1}{4} + \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 7 \cdot 10} + \dots$

14. $\frac{1}{2 \ln^2 2} + \frac{1}{3 \ln^2 3} + \frac{1}{4 \ln^2 4} + \dots$

Записати три перших члена ряду.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(n+1)!}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n^2+1}\right)^n$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{2n+3}$

20. $\sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{2n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{n \cdot 4^n}$

Користуючись означенням збіжності числового ряду, встановити, які з рядів збігаються, і знайти їх суми.

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^{n-1}}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+2}{n+3}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{n^2}$

Перевірити, чи виконується необхідна умова збіжності ряду.

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 \sqrt{n}}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt[8]{n^5}}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{5n+1}$

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n} \quad 33. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{3n} \right)^n \quad 34. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{2n-5} \right)^{n^2}$$

$$35. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}} \quad 36. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\pi} \sin \frac{\pi}{n}$$

1.2. Знакододатні числові ряди

Використовуючи ознаки порівняння, дослідити на збіжність ряди.

$$37. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} \quad 38. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad 39. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}\sqrt[3]{n}}$$

$$40. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n-1} \quad 41. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n^3+4n} \quad 42. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(2n-1)^4}$$

$$43. \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{\pi}{n^2} \quad 44. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{4(n-3)^3}} \quad 45. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2}{n+3}$$

$$46. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n} \quad 47. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n} \quad 48. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+3}}{n\sqrt{n+2}}$$

Використовуючи ознаку Д'Аламбера, дослідити на збіжність ряди.

$$49. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} \quad 50. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{2n-1} \quad 51. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{150^n}{n!}$$

$$52. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^8} \quad 53. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{3^{n+1}} \quad 54. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot 2^n}{(n-1)!}$$

$$55. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-4}{\sqrt{n} \cdot 3^n} \quad 56. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{(n-2) \cdot 4^n} \quad 57. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$58. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{4^n \cdot n} \quad 59. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n)!} \quad 60. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n!}$$

$$61. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{n! \cdot 2^n} \quad 62. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7 \cdot 13 \cdot \dots \cdot (6n+1)}{1 \cdot 8 \cdot \dots \cdot n^3} \quad 63. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-2} \cdot \sqrt{n^2+7}}{(n+1)!}$$

Використовуючи радикальну ознаку Коші, дослідити на збіжність ряди.

$$64. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{3n+1} \right)^n \quad 65. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{3n-1} \right)^n \quad 66. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3n^n}$$

$$67. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)^{\frac{n}{2}}. \quad 68. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}. \quad 69. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{1}{3n}.$$

$$70. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi}{n^2} \right)^n. \quad 71. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+5} \right)^{n^2}.$$

Використовуючи інтегральну ознаку Коші, дослідити на збіжність ряди.

$$72. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+4n+5}. \quad 73. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+4}}. \quad 74. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+1}.$$

$$75. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^4+4}. \quad 76. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n\sqrt{\ln n}}. \quad 77. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}.$$

$$78. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}. \quad 79. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot 3^{\frac{1}{n}}.$$

Дослідити ряди на збіжність.

$$80. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+4)}. \quad 81. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{3^n}. \quad 82. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n!}.$$

$$83. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+3}{(2n^2+3n-1)^2}. \quad 84. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{n^3}-1}{n^3\sqrt{n}+\sqrt{n}}. \quad 85. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{3n^3}.$$

$$86. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n} \cdot \sin^2 \frac{\pi}{n}. \quad 87. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3\sqrt{\ln n}}. \quad 88. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

$$89. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{2n-1}{2n+1}. \quad 90. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{(2n-1)!}. \quad 91. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{6^{2n}}.$$

$$92. \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \arcsin^3 \frac{1}{2^n}. \quad 93. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2-3}}{2n}. \quad 94. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}.$$

$$95. \frac{2}{3} + \frac{4}{3 \cdot 7} + \frac{8}{3 \cdot 7 \cdot 11} + \dots \quad 96. \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln^2 3} + \frac{1}{\ln^3 4} + \dots$$

$$97. \frac{1}{2\sqrt{\ln 2}} + \frac{1}{3\sqrt{\ln 3}} + \frac{1}{4\sqrt{\ln 4}} + \dots \quad 98. \sin \frac{1}{3} + \sin^2 \frac{1}{5} + \sin^3 \frac{1}{7} + \dots$$

$$99. \sin \frac{1}{1} + \sin \frac{5}{1 \cdot 3} + \sin \frac{9}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots \quad 100. \frac{1}{4} + \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 7 \cdot 10} + \dots$$

$$101. \frac{2}{1 \cdot 1} + \frac{3}{4 \cdot 7} + \frac{4}{7 \cdot 13} + \dots \quad 102. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{4}{4 \cdot 7} + \frac{7}{9 \cdot 12} + \dots$$

$$103. \frac{\binom{2}{1}}{3} + \frac{\binom{3}{2}^2}{9} + \frac{\binom{4}{3}^3}{27} + \dots$$

$$104. \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{4}{7}\right)^3 + \left(\frac{6}{11}\right)^3 + \dots$$

1.3. Знакозмінні числові ряди

Встановити характер збіжності або довести розбіжність рядів.

$$105. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n-4}}$$

$$106. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$$

$$107. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{2n+3}$$

$$108. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{3n^2+4}$$

$$109. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}$$

$$110. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4^n}{(n+1)!}$$

$$111. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{n^5}$$

$$112. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$$

$$113. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^{n+1}}$$

$$114. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n}{(2n-7) \cdot 4^n}$$

$$115. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^3+4}}$$

$$116. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$$

$$117. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2^n + 1)}{3n-6}$$

$$118. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg} n}{n}$$

$$119. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{3n-1}{4n}\right)^n$$

$$120. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 \cdot 5^n}{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-1)}$$

$$121. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}$$

$$122. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n n!}{(2n+2)!!}$$

$$123. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$$

$$124. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{(2n-1)\pi}{4}$$

$$125. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{2^n}$$

$$126. \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} - \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 7}} + \frac{1}{\sqrt{5 \cdot 12}} - \dots$$

$$127. -\frac{1}{2} + \frac{3}{2 \cdot 5} - \frac{5}{2 \cdot 5 \cdot 8} + \dots$$

$$128. \frac{5}{\sqrt[3]{1}} - \frac{25}{\sqrt[3]{11}} + \frac{125}{\sqrt[3]{21}} - \dots$$

$$129. \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{10}\right)^3 - \dots$$

$$130. \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1}} - \frac{1}{4 \cdot \sqrt{7}} + \frac{1}{6 \cdot \sqrt{13}} - \dots$$

$$131. -\frac{2}{3} + \frac{5}{9} - \frac{10}{27} + \dots$$

$$132. \frac{2}{\ln 2} - \frac{6}{\ln 5} + \frac{10}{\ln 8} - \dots$$

$$133. \operatorname{tg} \frac{1}{1} - \operatorname{tg} \frac{1}{1 \cdot 3} + \operatorname{tg} \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \dots$$

$$134. \frac{2}{1 \cdot 1} - \frac{3}{3 \cdot 7} + \frac{4}{5 \cdot 13} - \dots$$

$$135. \frac{1}{\sqrt[4]{3 \cdot 8}} - \frac{1}{\sqrt[4]{6 \cdot 10}} + \frac{1}{\sqrt[4]{11 \cdot 12}} - \dots$$

§2. Степеневі ряди

2.1. Поняття степеневого ряду.

Перевірити, чи збігається даний ряд в точці x_0 .

$$136. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n}, x_0 = 3.$$

$$137. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 5^n}, x_0 = -7.$$

$$138. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{\sqrt[5]{n^2}}, x_0 = -3.$$

$$139. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}(x+1)^n}{4^n}, x_0 = 3.$$

$$140. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x+1)^n}{n}, x_0 = -\frac{1}{2}.$$

$$141. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n+1)(x-3)^n}{n 3^n}, x_0 = 0.$$

$$142. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+5)^n}{3^n}, x_0 = -5.$$

$$143. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n(x-1)^n}{(n+1)!}, x_0 = 3.$$

Знайти радіус збіжності ряду.

$$144. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{\sqrt[4]{n}}.$$

$$145. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n \sqrt{n}}{4^n}.$$

$$146. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{7^n \sqrt[4]{3n-1}}.$$

$$147. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(2n)!}.$$

$$148. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-1)^n}{3^n}.$$

$$149. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n x^n}{n+3}.$$

$$150. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 6^n (x-2)^n}{\sqrt[5]{(2n-1)^4}}.$$

Знайти інтервал збіжності ряду.

$$151. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(n+5) \cdot 6^n}.$$

$$152. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n+1)(x-2)^n}{3^n}.$$

$$153. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^2 \cdot 3^n}.$$

$$154. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n^2+1) \cdot 16^n}.$$

$$155. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!(x-7)^n}{4^n}.$$

$$156. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+7)^n}{3^n n!}.$$

$$157. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{2^{n-1} \cdot 3^n}.$$

$$158. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{6^n \sqrt{3n+1}}.$$

$$159. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^n}{n^2+1}.$$

$$160. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{2n+1}}{2n-1}.$$

$$161. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n}}{8^n \sqrt{3n^2-2}}.$$

$$162. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{3^n \sqrt[3]{n+5}}.$$

$$163. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^{2n}}{(n+1)^2 \cdot 2^n}.$$

$$164. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n} x^{n+1}.$$

$$165. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-1)^n}{n^n}.$$

$$166. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n. \quad 167. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{3n-2}}{8^n (n+1) \ln(n+1)}. \quad 168. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-5)^{n+1}}{(3n+1)!}.$$

Знайти область збіжності ряду.

$$169. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{4^n}. \quad 170. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}. \quad 171. \sum_{n=1}^{\infty} 7^n x^n.$$

$$172. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n + 1}. \quad 173. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(2n+1)!}. \quad 174. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{4n^2 + 1}}.$$

$$175. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} x^n}{n!}. \quad 176. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(2n+1) \cdot 7^n}. \quad 177. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} \left(\frac{x}{3}\right)^n.$$

$$178. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{(n+2)^2 \cdot 9^n}. \quad 179. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1) \ln(n+1)}. \quad 180. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{\sqrt{n}(n^2+1)}.$$

$$181. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n x^n. \quad 182. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}. \quad 183. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{2n}}{(n+1)^2}.$$

$$184. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}. \quad 185. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)(x-3)^n}{2^{n+1} \cdot (n+1)^3}. \quad 186. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{2^n (n^3 - 1)}.$$

$$187. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{n\sqrt{n}}. \quad 188. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{n \cdot 4^n}. \quad 189. \sum_{n=1}^{\infty} c^{\sqrt{n}} x^n, c > 0.$$

$$190. x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \dots \quad 191. (x-4) - \frac{(x-4)^3}{3} + \frac{(x-4)^5}{5} - \dots$$

$$192. 1 + 2!x + 3!x^2 + \dots \quad 193. -\frac{1}{2}(x+5)^3 + \frac{2^5}{3!}(x+5)^5 - \frac{3^5}{4!}(x+5)^7 + \dots$$

2.2. Розвинення елементарних функцій у ряди Тейлора і Маклорена

194. Розвинути функцію $f(x) = x^3 - 2x + 1$ в ряд за степенями $(x-1)$.

195. Розвинути в ряд за степенями x функцію $f(x) = \ln(1+2x)$, задану на проміжку $[0; 0,5]$. Оцінити похибку, припустиму при відкиданні додаткового члена після п'яти перших.

196. Знайти перші чотири ненульові члени розвинення в ряд функції $f(x) = \sqrt{x}$ за степенями $(x-4)$.

197. Знайти три перші ненульові члени розвинення в ряд функції $f(x) = e^{\cos x}$ в околі точки $x_0 = 0$.

198. Знайти перші чотири ненульові члени розвинення функції $f(x) = \ln(1 + e^x)$ в ряд Маклорена. Вказати множину x , для яких це розвинення справедливе.

199. Розвинути в ряд за степенями x функцію $f(x) = \sin^2 x$, задану на проміжку $(-\infty; \infty)$.

Розвинути функції в ряд Маклорена, використовуючи відомі табличні розвинення відповідних елементарних функцій. Вказати інтервали збіжності отриманих рядів.

200. $f(x) = \sin 2x$.

201. $f(x) = \cos \frac{\pi x}{4}$.

202. $f(x) = x^2 \ln(1 + x^2)$.

203. $f(x) = xe^{-2x}$.

204. $f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$.

205. $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$.

206. $f(x) = \ln(1 - 3x^2)$.

207. $f(x) = e^{-x}(1 + x)$.

208. $f(x) = x^4 \operatorname{arctg} x$.

209. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2x}}$.

210. $f(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}$.

211. $y = \frac{x^3}{(1 + 3x^4)^2}$.

212. $f(x) = \frac{x}{4} \cos \frac{2x^4}{3}$.

213. $f(x) = \cos^2 x$.

214. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$.

215. $f(x) = \ln\left(3 - \frac{x}{2}\right)$.

216. $f(x) = e^x \sin x$.

217. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Використовуючи диференціювання, розвинути функції в ряд Тейлора за степенями $(x - x_0)$. Вказати інтервали збіжності отриманих рядів.

218. $f(x) = e^x, x_0 = -2$.

219. $f(x) = \cos x, x_0 = \frac{\pi}{4}$.

220. $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = -2$.

221. $f(x) = \ln x, x_0 = 1$.

$$222. f(x) = \frac{1}{x^2}, x_0 = -1.$$

$$223. f(x) = \sqrt{x^3}, x_0 = 1.$$

Розвинути функції в ряд Тейлора в околі точки x_0 , використовуючи відомі табличні розвинення відповідних елементарних функцій. Вказати області, в яких ці розвинення справедливі.

$$224. f(x) = \sin 5x, x_0 = \frac{\pi}{10}.$$

$$225. f(x) = e^{3x}, x_0 = \frac{1}{3}.$$

$$226. f(x) = \frac{1}{\sqrt{3+x}}, x_0 = 1.$$

$$227. f(x) = \ln(2+x), x_0 = 3.$$

$$228. f(x) = \ln(x^2 + 4x - 5), x_0 = 4.$$

$$229. f(x) = \sqrt{2+x}, x_0 = 2.$$

$$230. f(x) = \frac{1}{x^2}, x_0 = -3.$$

$$231. f(x) = \cos \frac{\pi}{10}, x_0 = 5.$$

$$232. f(x) = 3^{-x}, x_0 = 2.$$

$$233. f(x) = \frac{1}{4+3x}, x_0 = -2.$$

2.3. Деякі застосування степеневих рядів

Розвинувши функції в ряд Маклорена, знайти границі.

$$234. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\operatorname{tg} x - \sin x) - x^2}{x^5}.$$

$$235. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x+x^2)}{x(e^x - 1)}.$$

$$236. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{ctg} x}{x} \right).$$

$$237. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)e^{-x} - (1-x)e^x}{\arcsin x - \operatorname{arctg} x}.$$

$$238. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + \cos x}{x^3 \sin x} - \frac{3}{x^4} \right).$$

$$239. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \ln(\sqrt{1+x^2} - x)}{x^3}.$$

$$240. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right).$$

$$241. \lim_{x \rightarrow 0} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right].$$

Обчислити з точністю до **0,001**.

$$242. \sin 1. \quad 243. \sin 18^\circ. \quad 244. \cos 10^\circ. \quad 245. \cos \frac{\pi}{8} \quad 246. \ln 1,2.$$

$$247. \ln 3. \quad 248. \lg 5. \quad 249. \frac{1}{e}. \quad 250. \sqrt[3]{e}. \quad 251. \sqrt[3]{130}.$$

$$252. \sqrt[4]{1,025}. \quad 253. \operatorname{arctg} \frac{1}{2}. \quad 254. \arcsin \frac{1}{5}.$$

Записати інтеграл у вигляді ряду (з використанням табличних розвинень в ряд Маклорена).

$$255. \int_0^x \ln(10 + t^5) dx. \quad 256. \int_0^x t^3 \cos \frac{t^2}{5} dx. \quad 257. \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

$$258. \int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t} dt. \quad 259. \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad 260. \int_0^x \frac{\sqrt[3]{1+t^2} - t}{t^2} dt.$$

Використовуючи розвинення підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити наближене значення інтегралу з точністю до 0,001.

$$261. \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad 262. \int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^5}. \quad 263. \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

$$264. \int_0^{0,8} x^{10} \sin x dx. \quad 265. \int_0^{1/9} \sqrt{x} e^x dx. \quad 266. \int_0^1 \sqrt[3]{x} \cos x dx.$$

$$267. \int_0^{\sqrt{3}/3} x^3 \operatorname{arctg} x dx. \quad 268. \int_0^{0,4} \frac{1 - e^{-2x^2}}{x^2} dx. \quad 269. \int_0^{0,2} \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx.$$

$$270. \int_0^2 \frac{\operatorname{sh}^2 x}{x^2} dx. \quad 271. \int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx. \quad 272. \int_2^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$$

Знайти перші три ненульові члени розвинення в степеневий ряд розв'язку задачі Коші.

$$273. y' = x - y^2, \quad y(0) = 0. \quad 274. y' = x^2 - y^2, \quad y(1) = -1.$$

$$275. y' = xy + e^y, \quad y(0) = 0. \quad 276. y' = 2x + \cos y, \quad y(0) = 0.$$

$$277. y' = xy + \ln(x+y), \quad y(1) = 0. \quad 278. y' - 4y + 2xy^2 = e^{3x}, \quad y(0) = 2.$$

$$279. y' = 2 \cos x - xy^2, \quad y(0) = 1. \quad 280. y' = x^2 y^2 + 1, \quad y(0) = 1.$$

$$281. y'' + y' = e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \quad 282. y'' + y = 1, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$$

$$283. y'' = y \cos y' + x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \frac{\pi}{3}.$$

$$284. y'' = x^2 + y^2, \quad y(-1) = 0, \quad y'(-1) = 0.$$

$$285. y'' = (y')^2 + xy - 2x, \quad y(2) = 0, \quad y'(2) = 2.$$

$$286. y'' = -2xy, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

$$287. y'' = x \sin y' + \cos y', \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

$$288. y'' - y \cos x = x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

$$289. y'' + y' = x^2 y, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

$$290. y'' - xy' + y = 1, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

§3. Ряди Фур'є

291. Серед функцій $f(x) = x^3 + \cos x + 2e^{|x|}$, $f(x) = \sin 3x - x^5$ і $f(x) = x^2 + 5$ знайти ту, у розкладі якої в ряд Фур'є на проміжку $(-l; l)$ будуть: а) лише синуси; б) лише косинуси.

292. Записати формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є функції $f(x)$, заданої на інтервалі $(-l; l)$ і періодичної з періодом $T = 2l$, якщо

а) $f(x) = x^2 \operatorname{tg} \frac{x}{6}, x \in [-\pi; \pi);$

б) $f(x) = \cos x e^{-|2x|}, x \in [-2; 2);$

в) $f(x) = x^2 2^x, x \in (-4; 4].$

Розвинути в ряд Фур'є функції, задані на інтервалі $(-l; l)$ і періодичні з періодом $2l$.

293. $f(x) = x + \pi, x \in (-\pi; \pi).$

294. $f(x) = |x|, x \in (-\pi; \pi).$

295. $f(x) = x - \pi, x \in (-\pi; \pi].$

296. $f(x) = x, x \in (-\pi; \pi).$

297. $f(x) = |\cos x|, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$

298. $f(x) = x, x \in [-1; 1].$

299. $f(x) = 1 - 3x, x \in (-2; 2).$

300. $f(x) = 4 - x^2, x \in (-2; 2].$

301. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\pi; 0), \\ -1, & x \in (0; \pi) \end{cases}.$

302. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\pi; 0), \\ 3, & x \in [0; \pi] \end{cases}.$

303. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi; 0), \\ x, & x \in [0; \pi] \end{cases}.$

304. $f(x) = \begin{cases} \pi, & x \in (-\pi; 0), \\ \pi - x, & x \in [0; \pi] \end{cases}.$

305. $f(x) = \begin{cases} -x, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right), \\ x, & x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}.$

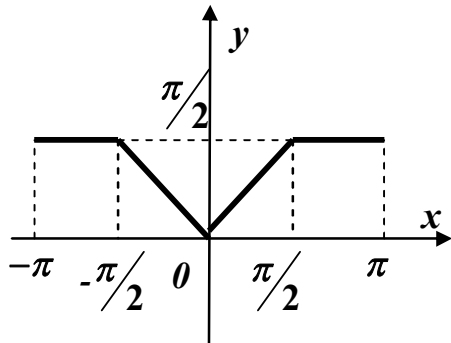
306. $f(x) = \begin{cases} -x, & x \in [-\pi; 0), \\ x + 1, & x \in [0; \pi] \end{cases}.$

$$307. f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\pi; 0), \\ x+2, & x \in [0; \pi] \end{cases}$$

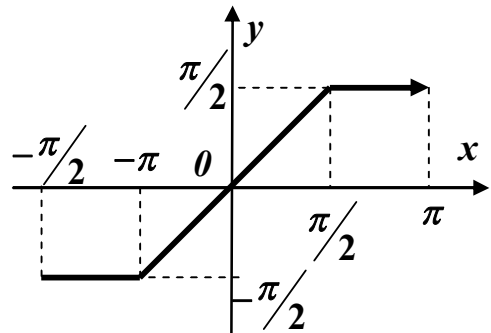
$$308. f(x) = \begin{cases} x+2, & x \in (-4; 0), \\ -5, & x \in [0; 4] \end{cases}$$

Розвинути в ряд Фур'є функції, задані графічно.

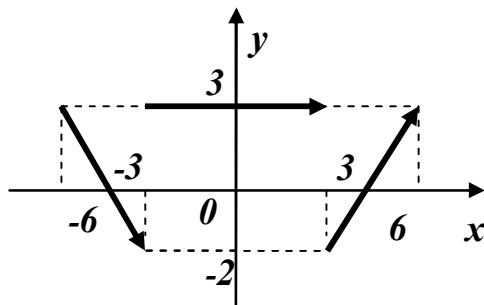
309.



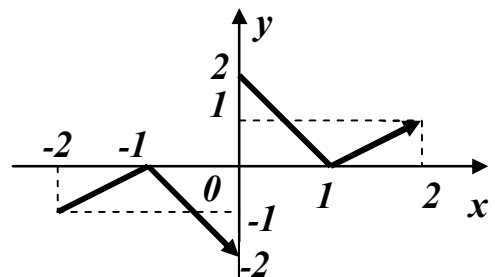
310.



311.



312.



Розвинути в ряд Фур'є функції, задані на півінтервалі.

$$313. f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \text{ на } [0; \pi] \text{ по косинусах.}$$

$$314. f(x) = \begin{cases} 2, & x \in (0; \pi/2), \\ 0, & x \in [\pi/2; \pi] \end{cases} \text{ по синусах.}$$

$$315. f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0; \pi/2), \\ \pi - x, & x \in [\pi/2; \pi] \end{cases} \text{ по косинусах.}$$

$$316. f(x) = \sin \frac{x}{2} \text{ на } [0; \pi] \text{ по косинусах.}$$

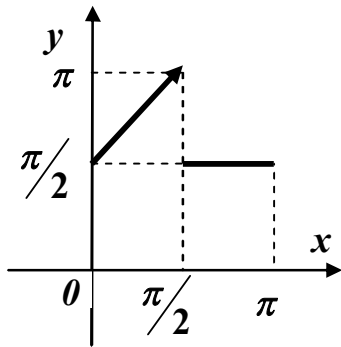
$$317. f(x) = \cos 2x \text{ на } [0; \pi] \text{ по синусах.}$$

$$318. f(x) = 1 - x \text{ на } (0; 1] \text{ по косинусах.}$$

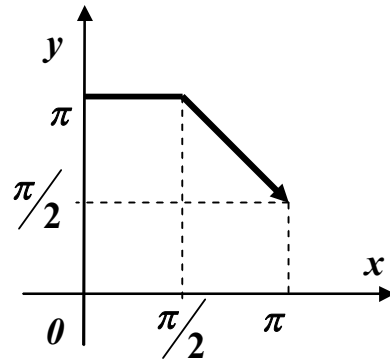
$$319. f(x) = 2x - x^2 \text{ на } (0; 2] \text{ по синусах.}$$

Розвинути в ряд Фур'є функції, задані графічно.

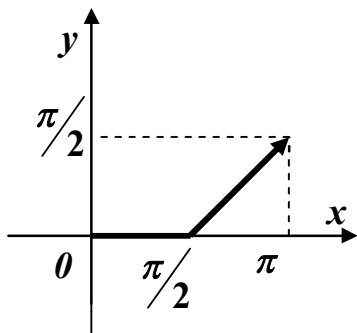
320. По косинусах і по синусах.



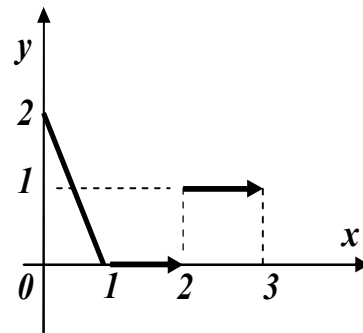
321. По косинусах і по синусах .



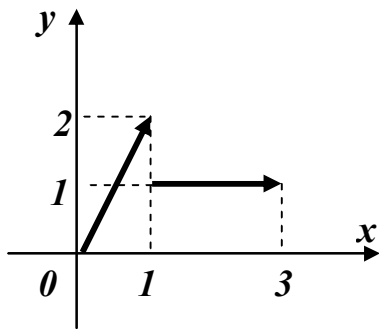
322. По косинусах і по синусах.



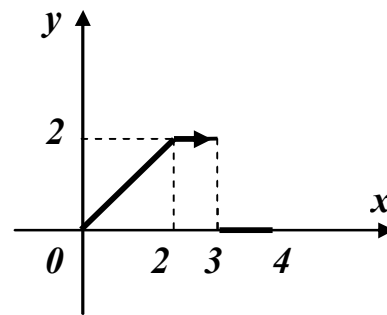
323. По синусах.



324. По косинусах.



325. По синусах.



326. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = \frac{\pi}{3} - (x - \pi)^2$ з періодом $T = 2\pi$, задану інтервалі $(0; 2\pi]$.

Відповіді

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{3n-1}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2+1}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^{2n}}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-1)}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)2^{n+1}}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(2n+1)}{2n(4n-1)}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} + 1}{\sqrt{n3^n}}$. 11. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{1}{2n+1}$. 12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n-1}\right)^n$. 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n+1)}$.
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$. 15. $\frac{2}{2} + \frac{3}{5} + \frac{4}{10} + \dots$. 16. $\frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{9}{8} + \dots$. 17. $\frac{1}{2!} + \frac{3}{3!} + \frac{3^2}{4!} + \dots$.
18. $\frac{1}{4} + \left(\frac{3}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{28}\right)^3 + \dots$. 19. $\ln \frac{2}{5} + \ln \frac{3}{7} + \ln \frac{4}{9} + \dots$. 20. $\operatorname{arctg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} \frac{\pi}{6} +$
 $+ \operatorname{arctg} \frac{\pi}{8} + \dots$. 21. $\frac{1}{4} + \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4^2} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 4^3} + \dots$. 22. 1. 23. 1. 24. 1. 25. 6. 26. $\frac{1}{2}$.
27. Розб. 28. $\frac{3\pi}{4}$. 29. Так. 30. Так. 31. Ні. 32. Так. 33. Ні. 34. Так. 35. Так.
36. Ні. 37. Збіж. 38. Розб. 39. Розб. 40. Розб. 41. Збіж. 42. Збіж. 43. Збіж.
44. Розб. 45. Розб. 46. Розб. 47. Збіж. 48. Збіж. 49. Збіж. 50. Розб.
51. Збіж. 52. Розб. 53. Збіж. 54. Збіж. 55. Збіж. 56. Збіж. 57. Збіж.
58. Розб. 59. Збіж. 60. Збіж. 61. Розб. 62. Збіж. 63. Розб. 64. Збіж.
65. Розб. 66. Збіж. 67. Збіж. 68. Збіж. 69. Збіж. 70. Збіж. 71. Розб.
72. Збіж. 73. Розб. 74. Збіж. 75. Збіж. 76. Розб. 77. Збіж. 78. Розб.
79. Збіж. 80. Розб. 81. Збіж. 82. Збіж. 83. Збіж. 84. Розб. 85. Збіж.
86. Збіж. 87. Розб. 88. Розб. 89. Збіж. 90. Збіж. 91. Розб. 92. Збіж.
93. Збіж. 94. Збіж. 95. Збіж. 96. Збіж. 97. Розб. 98. Збіж. 99. Збіж.
100. Збіж. 101. Збіж. 102. Збіж. 103. Збіж. 104. Розб. 105. Збіг. умов.
106. Збіг. абс. 107. Розб. 108. Збіг. умов. 109. Збіг. абс. 110. Збіг. абс.
111. Розб. 112. Збіг. умов. 113. Збіг. абс. 114. Розб. 115. Збіг. абс.
116. Збіг. умов. 117. Розб. 118. Збіг. умов. 119. Збіг. абс. 120. Збіг. абс.
121. Збіг. абс. 122. Розб. 123. Збіг. абс. 124. Розб. 125. Збіг. абс. 126. Збіг.
умов. 127. Збіг. абс. 128. Розб. 129. Збіг. абс. 130. Збіг. абс. 131. Збіг. абс.
132. Розб. 133. Збіг. абс. 134. Збіг. умов. 135. Збіг. умов. 136. Розб.
137. Розб. 138. Збіг. 139. Розб. 140. Збіг. 141. Розб. 142. Збіг. 143. Збіг.
144. $\frac{1}{5}$. 145. 4. 146. 7. 147. ∞ . 148. 0. 149. $\frac{1}{2}$. 150. $\frac{1}{6}$. 151. $(-3; 9)$.
152. $(-3; 5)$. 153. $(-4; 2)$. 154. $(-4; 4)$. 155. Збігається тільки в точці $x = 7$.
156. $(-\infty; \infty)$. 157. $(-3; 3)$. 158. $\left(-\frac{6}{5}; \frac{6}{5}\right)$. 159. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. 160. $(-3; 5)$.
161. $(-2; 2)$. 162. $\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$. 163. $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$. 164. $(-1; 1)$. 165. $(2 - e; 2 + e)$.

166. $\left(-\frac{1}{e}; \frac{1}{e}\right)$. 167. $(1; 3)$. 168. $(-\infty; \infty)$. 169. $(-6; 2)$. 170. $[-2; 8)$.
171. $\left(-\frac{1}{7}; \frac{1}{7}\right)$. 172. $(-2; 2)$. 173. $(-\infty; \infty)$. 174. $(-1; 1]$. 175. $(-\infty; \infty)$.
176. $(-7; 7]$. 177. $[-3; 3]$. 178. $(-2; 4)$. 179. Збігається тільки в точці $x = 0$.
180. $[-1; 0]$. 181. $(-1; 1)$. 182. $[-3; 5]$. 183. $(-1; 1)$. 184. $(-4; 4)$. 185. $[1; 5)$.
186. $[-1; 1)$. 187. $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$. 188. $[0; 4]$. 189. $[-1; 1]$. 190. $[-1; 1)$.
191. $[3; 5]$. 192. Збігається в точці $x = 0$. 193. $(-\infty; \infty)$. 194. $2 + (x - 1) +$
 $+ 3(x - 1)^2 + (x - 1)^3$. 195. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n x^n}{n}, r_5 < \frac{1}{6}$. 196. $2 + \frac{x - 4}{2^2} - \frac{(x - 4)^2}{4 \cdot 2^4} +$
 $+ \frac{1 \cdot 3 \cdot (x - 4)^3}{4 \cdot 6 \cdot 2^6} - \dots$. 197. $e + \frac{e}{2} x^2 + \frac{e}{6} x^4 + \dots$. 198. $\ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{192} + \dots,$
 $x \in (-\infty; 0)$. 199. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}$. 200. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in (-\infty; \infty)$.
201. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n} \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}, x \in (-\infty; \infty)$. 202. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+2}}{n}, x \in [-1; 1]$.
203. $x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{n-1} x^n}{(n-1)!}, x \in (-\infty; \infty)$. 204. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^{2n-1} x^{2n-2}}{(2n-1)!}, x \in (-\infty; \infty)$.
205. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{2^n n!}, x \in (-\infty; \infty)$. 206. $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^{2n}}{n}, x \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.
207. $1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n!} x^n, x \in (-\infty; \infty)$. 208. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+5}}{2n+1}, x \in [-1; 1]$.
209. $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot 2^n x^n, x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. 210. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n}, x \in (-1; 1)$.
211. $y = x^3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1) 3^n x^{4n+3}, \left(-4\sqrt{\frac{1}{3}}; 4\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$. 212. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \frac{x^{8n+1}}{(2n)!},$
 $x \in (-\infty; \infty)$. 213. $1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}, x \in (-\infty; \infty)$.
214. $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n}}{2^{2n+1}}, x \in (-2; 2)$. 215. $\ln 3 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{6^n \cdot n}, x \in [-6; 6)$.

$$\begin{aligned}
216. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2^n} \sin \frac{\pi n}{4} \cdot \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty; \infty). & 217. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad x \in (-\infty; \infty). \\
218. \quad & e^{-2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!} \right], \quad (-\infty; \infty). & 219. \quad & \frac{\sqrt{2}}{2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^n \right], \quad (-\infty; \infty). \\
220. \quad & -\frac{1}{2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n} \right], \quad x \in (-3; -1). & 221. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}, \quad x \in (0; 2]. \\
222. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(x+1)^n, \quad x \in (-2; 0). & 223. \quad & 1 + \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot \dots \cdot (2n-5)}{2^{n-1}} \cdot \frac{(x-1)^n}{n!}, \\
& x \in (-\infty; \infty). & 224. \quad & -1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{2n}}{(2n)!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{10} \right)^{2n}, \quad x \in (-\infty; \infty). \\
225. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n e}{n!} \left(x - \frac{1}{3} \right)^n, \quad x \in (-\infty; \infty). & 226. \quad & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{8^n n!} (x-1)^n, \\
& x \in (-3; 5]. & 227. \quad & \ln 5 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-3)^n}{5^n n}, \quad x \in (-2; 8). & 228. \quad & \ln 27 + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1+3^n}{n \cdot 9^n} (x-4)^n, \quad (1; 7). & 229. \quad & 2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{-1 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{8^n n!} (x-2)^n, \\
& x \in [-2; 6]. & 230. \quad & y = \frac{1}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^{n+2}} (x+3)^n, \quad x \in (-6; 0). \\
231. \quad & y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot \pi^{2k-1}}{10^{2k-1} \cdot (2k-1)!} (x-5)^{2k-1}, \quad x \in (-\infty; +\infty). & 232. \quad & y = \frac{1}{9} + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^n 3}{9 \cdot n!} (x-2)^n, \quad x \in (-\infty; +\infty). & 233. \quad & -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^n (x+2)^n, \\
& x \in \left(-\frac{8}{3}; -\frac{4}{3} \right). & 234. \quad & 0,25. & 235. \quad & 4. & 236. \quad & \frac{1}{3}. & 237. \quad & \frac{4}{3}. & 238. \quad & \frac{1}{60}. & 239. \quad & \frac{1}{6}. \\
240. \quad & \frac{2}{3}. & 241. \quad & 0,5. & 242. \quad & 0,842. & 243. \quad & 0,309. & 244. \quad & 0,985. & 245. \quad & 0,924. \\
246. \quad & 0,182. & 247. \quad & 1,099. & 248. \quad & 0,699. & 249. \quad & 0,368. & 250. \quad & 1,396. & 251. \quad & 5,066. \\
252. \quad & 1,006. & 253. \quad & 0,464. & 254. \quad & 0,201. & 255. \quad & \ln 10 \cdot x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{5n+1}}{10^n \cdot n(5n+1)},
\end{aligned}$$

$$x \in (-\sqrt{10}; \sqrt{10}). \quad 256. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+4}}{5^{2n} (2n)! (4n+4)}, \quad x \in (-\infty; \infty).$$

$$257. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)! (2n-1)}, \quad x \in (-\infty; \infty). \quad 258. \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}, \quad x \in (-1; 1).$$

$$259. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n! (2n+1)}, \quad x \in (-\infty; \infty). \quad 260. \quad \frac{x^2}{6} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n-5)}{(3n-1) \cdot 3^n n!} x^{3n-1},$$

$$x \in (-1; 1). \quad 261. \quad 0,855. \quad 262. \quad 0,497. \quad 263. \quad 0,497. \quad 264. \quad 0,006. \quad 265. \quad 0,026.$$

$$266. \quad 0,608. \quad 267. \quad 0,012. \quad 268. \quad 0,760. \quad 269. \quad 0,391. \quad 270. \quad 2,239. \quad 271. \quad 0,098.$$

$$272. \quad 0,119. \quad 273. \quad y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} + \dots \quad 274. \quad y = -1 + (x-1)^2 + (x-1)^3 + \dots$$

$$275. \quad y = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \dots \quad 276. \quad y = x + x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \dots$$

$$277. \quad y = \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 - \frac{1}{6}(x-1)^4 + \dots \quad 278. \quad y = 2 + 9x + \frac{31}{2}x^2 + \dots$$

$$279. \quad y = 1 + 2x - \frac{1}{2}x^2 + \dots \quad 280. \quad y = 1 + x + \frac{1}{3}x^3 + \dots \quad 281. \quad y = x +$$

$$+ \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \dots \quad 282. \quad y = 2 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots \quad 283. \quad y = 1 + \frac{\pi}{3}x +$$

$$+ \frac{1}{4}x^2 + \dots \quad 284. \quad y = \frac{1}{2}(x+1)^3 - \frac{1}{3}(x+1)^3 + \frac{1}{12}(x+1)^4 + \dots$$

$$285. \quad y = 2(x-2) + \frac{1}{3}(x-2)^3 + \frac{1}{2}(x-2)^4 + \dots \quad 286. \quad y = 1 + x - \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$287. \quad y = \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{12}(x+1)^4 + \dots \quad 288. \quad y = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

$$289. \quad y = 1 + \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{60} + \dots \quad 290. \quad y = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{240} + \dots \quad 291. \quad \text{a) } f(x) = x^5 -$$

$$- \sin 3x; \quad \text{б) } f(x) = x^2 + 5 - \cos \frac{x}{2}. \quad 292. \quad \text{a) } a_0 = 0, \quad a_n = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \operatorname{tg} \frac{x}{6} \sin nx \, dx; \quad \text{б) } a_0 = \int_0^2 \cos x e^{-|2x|} \, dx, \quad a_n = \int_0^2 \cos x e^{-|2x|} \cos \frac{n\pi x}{2} \, dx,$$

$$b_n = 0; \quad \text{B) } a_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^4 x^2 2^x \, dx, \quad a_n = \frac{1}{4} \int_{-4}^4 x^2 2^x \cos \frac{n\pi x}{4} \, dx, \quad b_n = \frac{1}{4} \int_{-4}^4 x^2 2^x \sin \frac{n\pi x}{4} \, dx.$$

$$\begin{aligned}
293. \quad f(x) &= \pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx. & 294. \quad f(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}. \\
295. \quad f(x) &= -\pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx. & 296. \quad f(x) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx. \\
297. \quad f(x) &= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} \cos 2nx. & 298. \quad f(x) &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi x. \\
299. \quad f(x) &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2}. & 300. \quad f(x) &= \frac{8}{3} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{2}. \\
301. \quad f(x) &= -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}. & 302. \quad f(x) &= 2 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}. \\
303. \quad f(x) &= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx. & 304. \quad f(x) &= \frac{3\pi}{4} + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{\pi n^2} \cos nx + \frac{(-1)^n}{n} \sin nx. & 305. \quad f(x) &= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2(2n-1)x}{(2n-1)^2}. \\
306. \quad f(x) &= \frac{\pi+1}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x. \\
307. \quad f(x) &= \frac{\pi+6}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos(2n-1)x}{\pi(2n-1)^2} + \frac{1}{2n} \sin 2nx - \frac{(2+\pi)\sin(2n-1)x}{(2n-1)\pi}. & 308. \\
y &= -\frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)^2 \pi^2} \cos \frac{(2n-1)x}{4} - \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} - \frac{10}{(2n-1)\pi} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{4}. \\
309. \quad f(x) &= \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - 1 \right) \cos nx. & 310. \quad f(x) &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi n}{2} + \right. \\
&+ \left. (-1)^{n+1} \frac{\pi}{2n} \right) \sin nx. & 311. \quad f(x) &= \frac{9}{4} + \frac{60}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{6n} \sin \frac{\pi n}{2} - \frac{1}{n^2} \cos \frac{\pi n}{2} + \right. \\
&+ \left. \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{6} \right). & 312. \quad f(x) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n\pi} - \frac{8}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \right) \sin \frac{n\pi x}{2}. & 313. \quad f(x) &= \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}. & 314. \quad f(x) &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)}. & 315. \quad f(x) &= \frac{\pi}{4} -
\end{aligned}$$

$$-\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2(2n-1)x}{(2n-1)^2}. \quad 316. \quad f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{4n^2 - 1}. \quad 317. \quad f(x) = \frac{\pi}{4} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)}{4 - (2n-1)^2} \sin(2n-1)x. \quad 318. \quad f(x) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)\pi x.$$

$$319. \quad f(x) = \frac{32}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2}. \quad 320. \quad \text{a) } f(x) = \frac{5\pi}{8} +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2n} \sin \frac{\pi n}{2} + \frac{1}{n^2} \cos \frac{\pi n}{2} - \frac{1}{n^2} \right) \cos nx; \quad \text{б) } \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{2n} \cos \frac{\pi n}{2} - \frac{(-1)^n \pi}{2n} +$$

$$+ \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi n}{2} \right) \sin nx. \quad 321. \quad \text{a) } f(x) = \frac{7\pi}{8} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\cos \frac{\pi n}{2} - (-1)^n \right) \cos nx;$$

$$\text{б) } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n} + \frac{2}{n^2 \pi} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{(-1)^n}{n} \right) \sin nx. \quad 322. \quad \text{a) } f(x) = \frac{\pi}{8} +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left((-1)^n - \cos \frac{\pi n}{2} \right) \cos nx; \quad \text{б) } f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1} \pi}{2n} - \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \right) \sin nx.$$

$$323. \quad f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{2}{n\pi} - \frac{2}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{3} + \frac{1}{n\pi} \cos \frac{2n\pi}{3} \right) \sin \frac{n\pi x}{3}.$$

$$324. \quad f(x) = -\frac{1}{3} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{3} + \frac{6}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi}{3} - \frac{6}{n^2 \pi^2} \right) \cos \frac{n\pi x}{3}.$$

$$325. \quad f(x) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} \cos \frac{3n\pi}{2} \right) \sin \frac{n\pi x}{4}. \quad 326. \quad f(x) = \frac{\pi(1-\pi)}{3} -$$

$$-4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}. \quad \text{Вказівка. Зробити заміну } x = z + \pi.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2006.-648 с.
2. Овчинников П.П. та ін. Вища математика. У 2-х ч. Ч.1: Підручник.– К.: Техніка, 2004.-278 с.
3. Лунгу К.Н. и др. Сборник задач по высшей математике.1 курс.: Учебное пособие / Под ред. С.Н.Федина. – М.:Айрис-пресс, 2009.-576 с.
4. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. У 3-х кн. Кн.1: Підручник.– К: Либідь, 1994.-280 с.
5. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. У 3-х кн. Кн.2: Підручник.– К: Либідь, 1994.-352 с.
6. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник / За ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. – К.: А.С.К., 2004.-480 с.
7. Шипачёв В.С. Задачник по высшей математике: Учебное пособие для вузов.- М.: Высшая школа, 2003.-304 с.
8. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч.1: Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 2000.-304 с.

Навчальне видання

Копорулін Володимир Львович
Заєць Ірина Петрівна
Шинковська Ірина Леонідівна
Сушко Лариса Федорівна

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник

Тем. план 2016, поз.

Підписано до друку Формат 60x84 1/16. Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид. арк. Умов. друк. арк. Тираж 100 пр. Замовлення №

Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпропетровськ-5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ

