МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

В.Л. КОПОРУЛІН, І.В. ЩЕРБИНА,
І.В. ПАСІЧНИК, Т.П. БАС

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 6
Навчальний посібник

Друкується за Планом видань навчальної та методичної літератури,
затвердженим Вченою радою НМетАУ
Протокол №

Дніпро НМетАУ 2016

УДК 517(07)
Вища математика. Частина 6: Навч. посібник / В.Л. Копорулін, І.В. Щербина, І.В. Пасічник, Т.П. Бас. – Дніпро: НМетАУ, 2016. –с.

Наведені докладні теоретичні відомості до вивчення розділу «Диференціальні рівняння». Теоретичні положення супроводжуються необхідними поясненнями, а також розв'язуванням типових задач. Рекомендуються завдання для самостійної роботи.

Призначений для студентів зі спеціальності 136 – «Металургія» (за спеціалізаціями «Ливарне виробництво чорних і кольорових металів і сплавів» та «Литво (за видами)»).

Бібліогр.: 4 найм.

Друкується за авторською редакцією.

Відповідальний за випуск В.Л. Копорулін, канд. тех. наук, доц.

Рецензенти: Т.С. Кагадій, д-р фіз.-мат. наук, проф. (ДВНЗ НГУ)
А.В. Сясєв, канд. фіз.-мат. наук, доц. (ДНУ)

ЗМІСТ

ВСТУП

Оновлення програми для студентів зі спеціальності 131 – «Металургія» (за спеціалізаціями «Ливарне виробництво чорних і кольорових металів і сплавів» та «Литво (за видами)»), а також зменшення часів аудиторних занять передбачає новий підхід до викладання матеріалу з дисципліни «Вища математика».

У шостій частині навчального посібника викладено матеріал розділу вищої математики: «Диференціальні рівняння вищих порядків». Основні теоретичні положення, формули та теореми ілюструються докладним розв'язанням великої кількості задач різного ступеня складності з їх повним аналізом. Для ефективності засвоєння матеріалу пропонуються завдання для самостійної роботи.

Посібник складено згідно з робочою програмою дисципліни, матеріал подається у звичній для студентів формі – спочатку теорія, а потім роз'язання прикладів та задач. Кожна частина посібника відповідає матеріалу дисципліни однієї чверті аудиторних занять, що робить посібник більш зручним у використанні.

Автори посібника сподіваються, що ця робота буде корисною для кожного студента.

ЛЕКЦІЯ 20. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ. РІВНЯННЯ, ЩО ДОПУСКАЮТЬ ЗНИЖЕННЯ ПОРЯДКУ

20.1 Загальні поняття та означення

Якщо диференціальне рівняння містить похідну більш ніж першого порядку, то воно називається рівнянням вищого порядку.

Розглянемо спочатку диференціальне рівняння другого порядку, яке має загальний вигляд

$$F(x, y, y', y'') = 0. \tag{20.1}$$

Якщо це рівняння можна розв'язати відносно другої похідної, то його записують так:

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{20.2}$$

де x - незалежна змінна, $y = y(x)$ - шукана функція, y', y'' - похідні цієї функції.

Розв'язком рівняння (20.2) на інтервалі (a, b) називається така функція $y = \varphi(x)$, диференційована на цьому інтервалі, яка при підстановці в рівняння (20.2) перетворює його на тотожність.

Загальним розв'язком рівняння (20.2) називається така функція $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, яка, по-перше, є розв'язком рівняння (20.2) при будь-яких значеннях довільних сталих C_1, C_2, по-друге, якими не були б початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_0', \tag{20.3}$$

існують єдині значення довільних сталих $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0$, такі, що функція $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ є розв'язком рівняння (20.2) та задовольняє початкові умови (20.3).

Будь-який розв'язок $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ рівняння (20.2), отриманий із загального розв'язку при конкретних значеннях довільних сталих $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0$, називається ***частинним розв'язком*** цього рівняння.

Розв'язки рівняння (20.2) вигляду $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$ та $\Phi\left(x, y, C_1^0, C_2^0\right) = 0$ називаються ***загальним та частинним інтегралами*** рівняння (20.2) відповідно.

Графік будь-якого розв'язку диференціального рівняння другого порядку називається ***інтегральною кривою***. Загальний розв'язок диференціального рівняння (20.2) представляє сім'ю інтегральних кривих, частинний розв'язок – одну інтегральну криву, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ та має дотичну в цій точці з кутовим коефіцієнтом $y'(x_0) = y'_0$.

Як і для диференціальних рівнянь першого порядку, задача, яка полягає у відшуканні частинного розв'язку диференціального рівняння другого порядку при заданих початкових умовах, називається задачею Коші.

Теорема 20.1. (про існування та єдинність розв'язку задачи Коші)

Якщо в рівнянні (20.2) функція $f(x, y, y')$ та її частинні похідні f'_y та $f'_{y'}$ неперервні у деякій відкритій області D то для будь-якої точки $(x_0, y_0, y'_0) \in D$ існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння (20.2), що задовольняє початкові умови (20.3).

Аналогічні поняття та означення вводяться для диференціальних рівнянь n- го порядку. Загальний вигляд диференціального рівняння n- го порядку:

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0 \tag{20.4}$$

або, якщо розв'язати його відносно найвищої похідної:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right). \tag{20.5}$$

Порядок диференціального рівняння визначає порядок старшої похідної, що до нього входить.

Початкові умови для диференціальних рівнянь n- го порядку мають вигляд

$$\begin{gathered} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{gathered} \tag{20.6}$$

Розв'язком диференціального рівняння (20.4) на інтервалі (a,b) називається функція $y=\varphi(x)$, диференційована на цьому інтервалі, яка при підстановці в рівняння (20.4) перетворює його на тотожність.

Загальним розв'язком рівняння (20.4) називається функція $y=\varphi\left(x,C_1,C_2,...,C_n\right)$, що містить n довільних сталих та є розв'язком рівняння (20.4) при будь-яких значеннях сталих $C_1,\ C_2,\ ...,\ C_n$.

Частинний розв'язок диференціального рівняння (20.4) отримується із загального при конкретних значеннях довільних сталих $C_1, C_2,\ ...,\ C_n$ таким чином, щоб задовольнити початкові умови (20.6).

З погляду геометрії загальний розв'язок диференціального рівняння n-го порядку є сім'єю інтегральних кривих, що залежать від параметрів $C_1,C_2,\ ...,C_n$ (для диференціальних рівнянь першого порядку тільки від одного параметра C [Лекція 17]), а частинний розв'язок – це окрема крива з цієї сім'ї.

Якщо неможливо отримати загальний (частинний) розв'язки диференціального рівняння (20.4) у явному вигляді, то отримані неявні функції $\Phi(x,y,C_1,C_2,...,C_n)=0$ та $\Phi\left(x,y,C_1^0,C_2^0,...,C_n^0\right)=0$ називають відповідно ***загальним та частинним інтегралами*** диференціального рівняння.

Методи знаходження розв'язків диференціальних рівнянь вищих порядків набагато складніші за методи розв'язання рівнянь першого порядку. Тому розглянемо лише окремі, найпростіші випадки диференціальних рівнянь вищих порядків.

20.2. Диференціальні рівняння, що допускають зниження порядку

Одним з методів розв'язання диференціальних рівнянь вищих порядків є метод ***зниження*** порядку. Розглянемо три типи таких рівнянь.

1. **Рівняння вигляду** $y^{(n)}=f(x)$,

де $f(x)$ - неперервна функція, інтегрується в квадратурах.

Справді, перепишемо дане рівняння у вигляді

$$\frac{d\ y^{(n-1)}}{dx}=f(x)\quad\Rightarrow\quad d\ y^{(n-1)}=f(x)dx\,.$$

Проінтегруємо отримане рівняння:

$$\int d\ y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1, \text{ тоді}$$

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1, \text{ де } C_1 \text{ - стала інтегрування.}$$

Продовжуючи цей процес послідовно отримаємо

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2\ ,$$

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1x + C_2\ ,$$

$$\int d\ y^{(n-2)} = \int\left(\int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1x + C_2\right)dx\ ,$$

$$y^{(n-3)} = \int\left(\int\left(\int f(x)dx\right)dx\right)dx + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3,$$

……………………………………………………..

$$y = \int\left(\int\left(...\int\left(\int f(x)dx\right)dx\right)dx....\right)dx + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots$$

$$\cdots + C_{n-2}\frac{x^2}{2} + C_{n-1}x + C_n.$$

Приклад 20.1 Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y'' = 2^x - sin 3x\,.$$

Розв'язання. Проінтегруємо двічі обидві частини цього рівняння:

$$y' = \int\left(2^x - sin 3x\right)dx = \int 2^x dx - \int sin 3x dx = \frac{2^x}{ln\,2} - \left(-\frac{1}{3}cos 3x\right) + C_1\,;$$

$$y = \int\left(\frac{2^x}{ln\,2} + \frac{1}{3}cos 3x + C_1\right)dx = \frac{1}{ln\,2}\int 2^x\,dx + \frac{1}{3}\int cos\,3x\,dx + C_1\int dx =$$

$$= \frac{2^x}{ln^2\,2} + \frac{1}{9}sin 3x + C_1x + C_2\,.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння

$$y = \frac{2^x}{ln^2\,2} + \frac{1}{9}sin 3x + C_1x + C_2\,.$$

Приклад 20.2. Розв'язати рівняння: $y''' = \frac{1}{x^3} - sin4x + 3$.

Розв'язання. Права частина рівняння не містить невідомої функції y та її похідної y', тому для отримання розв'язку тричі послідовно інтегруємо обидві його частини:

$$y'' = \int\left(\frac{1}{x^3} - sin4x + 3\right)dx = \frac{x^{-2}}{-2} + \frac{1}{4}cos4x + 3x + C_1,$$

$$y' = \int\left(\frac{x^{-2}}{-2} + \frac{1}{4}cos4x + 3x + C_1\right)dx = \frac{x^{-1}}{2} + \frac{1}{16}sin4x + \frac{3x^2}{2} + C_1x + C_2,$$

$$y = \int\left(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{16}sin4x + \frac{3x^2}{2} + C_1x + C_2\right)dx = -\frac{1}{2}ln|x| - \frac{1}{64}cos4x +$$

$$+\frac{3x^3}{2\cdot 3} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3.$$

Отже, загальний розв'язок даного рівняння

$$y = -\frac{1}{2}ln|x| - \frac{1}{64}cos4x + \frac{x^3}{2} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3.$$

Приклад 20.3. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' = cos^2 5x, \qquad y'(0) = 2; \quad y(0) = -\frac{1}{50}.$$

Розв'язання.

$$y' = \int cos^2 5xdx = \int\frac{1 + cos5x}{2}dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{5}sin5x\right) + C_1,$$

$$y = \int\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{5}sin5x\right) + C_1\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{25}cos5x\right) + C_1x + C_2.$$

Отже, загальний розв’язок рівняння

$$y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{50}\cos 5x+C_1x+C_2.$$

Для того, щоб отримати частинний розв’язок, тобто розв’язати задачу Коші, треба знайти C_1 та C_2 використовуючи початкові умови:

$$2=\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{5}\sin 0\right)+C_1, \quad \Rightarrow \quad C_1=2,$$

$$-\frac{1}{50}=\frac{1}{4}\cdot 0^2-\frac{1}{50}\cos 0+C_1\cdot 0+C_2, \quad \Rightarrow \quad C_2=0.$$

Таким чином, $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{50}\cos 5x+2x-$ частинний розв’язок рівняння.

2. **Диференціальне рівняння** $F(x, y', y'')=0$,

що явно не містить шукану функцію y, за допомогою підстановки $y'=P(x)$; $y''=P'(x)$ зводять до відповідного рівняння першого порядку $F(x, P(x), P'(x))=0$. Розв’язок цього рівняння знаходять, залежно від його типу, а потім, для отримання загального розв’язку початкового рівняння повертаються до заміни $y'=P(x)$.

Приклад 20.4. Розв’язати рівняння:

$$xy''+y'=\ln x.$$

Розв’язання. Оскільки дане рівняння є рівнянням другого порядку, що явно не містить y, введемо підстановку $y'=P(x)$, $y''=P'(x)$. Отримаємо рівняння першого порядку

$$xP'+P=\ln x, \quad \Rightarrow \quad P'+\frac{P}{x}=\frac{\ln x}{x},$$

яке є лінійним рівнянням. Його розв’язок будемо шукати у вигляді $P=uv$, а $P'=u'v+uv'$.

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=\frac{\ln x}{x},$$

$$u\left(v'+\frac{v}{x}\right)+u'v=\frac{ln\,x}{x},$$

$$\begin{cases} I & v'+\dfrac{v}{x}=0, \\ II & u'v=\dfrac{ln\,x}{x}. \end{cases}$$

I. $v'=-\dfrac{v}{x} \quad \Rightarrow \dfrac{dv}{sx}=-\dfrac{v}{x} \quad \Rightarrow \dfrac{dv}{v}=-\dfrac{dx}{x} \quad \Rightarrow \displaystyle\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow$

$$ln|v|=-ln|x| \quad \Rightarrow \ ln\,v=ln\frac{1}{x} \quad \Rightarrow v=\frac{1}{x}.$$

II. $u'\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{ln\,x}{x} \quad \Rightarrow \ u'=ln\,x \quad \Rightarrow \displaystyle\int du=\int ln\,xdx$ $\left|\begin{array}{l} \textit{За методом інтегрування} \\ \textit{частинами маємо} \\ u_1=ln\,x, \qquad du_1=\dfrac{dx}{x}, \\ dv_1=dx, \qquad v_1=x, \end{array}\right|$ $\Rightarrow$

$$u=ln\,x\cdot x-\int x\cdot\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \ u=ln\,x\cdot x-\int dx \quad \Rightarrow \ u=x\,ln\,x-x+C_1.$$

Маємо $P=\left(x\,ln\,x-x+C_1\right)\cdot\dfrac{1}{x}$ або $P=ln\,x-1+\dfrac{C_1}{x}$.

Тоді $y'=P=ln\,x-1+\dfrac{C_1}{x}$.

Проінтегруємо це рівняння:

$$y=\int\left(ln\,x-1+\frac{C_1}{x}\right)dx=\int ln\,xdx+\int\left(-1+\frac{C_1}{x}\right)dx.$$

Із попереднього $\int ln\,xdx=x\,ln\,x-x$. Маємо

$y=x\,ln\,x-x-x+C_1\,ln|x|+C_2$, або

$y=x\,ln\,x-2x+C_1\,ln|x|+C_2$ − шуканий загальний розв’язок.

Приклад 20.5 Розв’язати задачу Коші:

$$y''ctgx+y'=2, \qquad y(0)=0; \qquad y'(0)=-2.$$

Розв’язання. Аналогічно попередньому, маємо: $y'=P(x), \quad y''=P'(x)$. Тоді

$$P'ctgx+P=2.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремлюємо змінні та обчислюємо отримані інтеграли:

$$P'ctgx = 2 - P \;\Rightarrow \frac{dP}{dx}\cdot ctgx = 2 - P \;\;\Rightarrow \frac{dP}{2-P} = \frac{dx}{ctgx} \;\;\Rightarrow \int\frac{dP}{2-P} = \int tgx\,dx \;\;\Rightarrow$$

$$-ln|2-P| = -ln|\cos x| - ln\,C_1 \;\;\Rightarrow\;\; ln|2-P| = ln|C_1 \cos x| \;\;\Rightarrow\;\; 2 - P = C_1 \cos x \;\;\Rightarrow$$

$$P = 2 - C_1 \cos x \;\;\Rightarrow\;\; y' = 2 - C_1 \cos x \;\;\Rightarrow\;\; y = \int\left(2 - C_1 \cos x\right)dx;$$

$y = 2x - C_1 \sin x + C_2$ – загальний розв'язок рівняння.

Використаємо початкові умови:

$y'(0) = -2 \;\;\Rightarrow\;\; -2 = 2 = C_1 \cos 0, \;\;\Rightarrow\;\; C_1 = 4,$

$y(0) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; 0 = 2\cdot 0 - C_1 \sin 0 + C_2, \;\;\Rightarrow\;\; C_2 = 0.$

Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд

$$y = 2x - 4\sin x\,.$$

3. Диференціальне рівняння вигляду $F\left(y, y', y''\right) = 0$,

що явно не містить незалежну зміну x, підстановкою $y' = P(y),\;\; y'' = P'_y \cdot y'_x = P'P$ зводять до диференціального рівняння першого порядку $F\left(y, P, P'\right) = 0.$ Потім визначають тип отриманого рівняння і відповідним методом його розв'язують. Нехай розв'язок рівняння першого порядку буде мати вигляд $P = \varphi(y, C_1)$. Тоді, $y' = \varphi(y, C_1)$ - це рівняння є рівнянням першого порядку з відокремлюваними змінними, інтегруючи яке отримаємо загальний інтеграл у вигляді $\int\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$

Приклад 20.6. Розв'язати рівняння: $1 + \left(y'\right)^2 = 2y\,y''$.

Розв'язання. Це рівняння явно не містить незалежну змінну x, тому слід використати підстановку $y' = P(y),\;\; y'' = P'P,$ яка зведе наше рівняння до рівняння першого порядку.

$$1 + P'^2 = 2yP'P\,.$$

Відокремимо змінні, та обчислимо одержані інтеграли:

$$1+P^2=2y\frac{dP}{dy}\cdot P \quad\Rightarrow\quad \frac{2PdP}{1+P^2}=\frac{dy}{y}\Rightarrow\quad \int\frac{2PdP}{1+P^2}=\int\frac{dy}{y}\quad\Rightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l}1+P^2=t\\ dt=2PdP\end{array}\right| \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dt}{t}=\int\frac{dy}{y}\quad\Rightarrow\quad ln|t|=ln|y|+ln|C_1|\quad\Rightarrow\quad ln|t|=ln|C_1y|\quad\Rightarrow$$

$$t=C_1y\ \Rightarrow\ 1+P^2=C_1y\ \Rightarrow\ P^2=C_1y-1\ \Rightarrow\ P=\sqrt{C_1y-1}\ \Rightarrow y'=\sqrt{C_1y-1}.$$

Останнє рівняння – це диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Розв’яжемо його:

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{C_1y-1}\quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{\sqrt{C_1y-1}}=dx\quad\Rightarrow$$

$$\int\frac{dy}{\sqrt{C_1y-1}}=\int dx\quad\Rightarrow\quad x=\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1y-1}+C_2.$$

Отже, загальним інтегралом даного рівняння другого порядку є

$$x=\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1y-1}+C_2.$$

Приклад 20.7. Знайти частинний розв’язок рівняння

$$y\cdot y''-(y')^2=y^2\,ln\,y,\qquad y(0)=1;\qquad y'(0)=1.$$

Розв’язання. Підстановкою $y'=P(y),\quad y''=P'\cdot P$ початкове рівняння зводиться до рівняння Бернуллі першого порядку

$$P\cdot yP'-P^2=y^2\,ln\,y,\quad \text{або}\quad P'-\frac{P}{y}=\frac{y\,ln\,y}{P}.$$

Розв’язок цього рівняння шукаємо у вигляді $P=uv$. Тоді $P'=u'v+uv'$.

$$u'v+uv'-\frac{uv}{y}=\frac{y\,ln\,y}{uv},$$

$$u\left(v'-\frac{v}{y}\right)+u'v=\frac{y\,ln\,y}{uv}.$$

$$\begin{array}{l}I\\ \\ II\end{array}\left\{\begin{array}{l}v'-\dfrac{v}{y}=0,\\ u'v=\dfrac{y\,ln\,y}{uv},\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l}I\\ \\ II\end{array}\left\{\begin{array}{l}v'=\dfrac{v}{y},\\ u'=\dfrac{y\,ln\,y}{uv^2}.\end{array}\right.$$

I. $\dfrac{dv}{dy}=\dfrac{v}{y}\quad\Rightarrow\quad \int\dfrac{dv}{v}=\int\dfrac{dy}{y}\quad\Rightarrow\quad ln|v|=ln|y|\quad\Rightarrow\quad v=y$.

II. $u'=\dfrac{y\ln y}{y^2}\quad\Rightarrow\quad\dfrac{udu}{dy}=\dfrac{\ln y}{y}\quad\Rightarrow\quad\int u\,du=\int\dfrac{\ln y\,dy}{y}\quad\Rightarrow\quad\left|\begin{matrix}t=\ln y\\ dt=\dfrac{dy}{y}\end{matrix}\right|\quad\Rightarrow$

$$\int udu=\int t\,dt,\quad\Rightarrow\quad\frac{u^2}{2}=\frac{t^2}{2}+\frac{C_1}{2}\quad\Rightarrow\quad u^2=t^2+C_1\quad\Rightarrow\quad u=\sqrt{\ln^2 y+C_1}\,.$$

Дістанемо: $P=\sqrt{\ln^2 y+C_1}\cdot y$. Отже

$$y'=\sqrt{\ln^2 y+C_1}\cdot y\quad\Rightarrow\quad\frac{dy}{dx}=y\sqrt{\ln^2 y+C_1}\quad\Rightarrow\quad\int\frac{dy}{y\sqrt{\ln^2 y+C_1}}=\int dx\quad\Rightarrow$$

$$\left|\begin{matrix}\ln y=t\\ dt=\dfrac{dy}{y}\end{matrix}\right|\quad\Rightarrow\quad\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+C_1}}=\int dx\quad\Rightarrow\quad\ln\left|\,t+\sqrt{t^2+C_1}\,\right|=x+C_2\,.$$

Загальний інтеграл рівняння матиме вигляд

$$\ln\left|\,\ln y+\sqrt{\ln^2 y+C_1}\,\right|=x+C_2.$$

Використовуючи початкові умови, знайдемо C_1 та C_2:

$$\begin{matrix}y(0)=1,\\ y'(0)=1\end{matrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\ln\left|\ln 1+\sqrt{\ln^2 1+C_1}\right|=C_2,\\ 1=\sqrt{\ln^2 1+C_1}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}C_2=\ln\sqrt{C_1},\\ C_1=1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{matrix}C_2=0\\ C_1=1\end{matrix}.$$

Таким чином, частинний розв'язок рівняння має вигляд

$$\ln\left|\,\ln y+\sqrt{\ln^2 y+1}\,\right|=x\,.$$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 25. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ЩО ДОПУСКАЮТЬ ЗНИЖЕННЯ ПОРЯДКУ

25.1. Рівняння вигляду $y^{(n)}=f(x)$.

Розв'язок цього рівняння отримується n- кратним інтегруванням, тобто

$$y^{(n)}=f(x);$$

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + C_1 = f_1(x) + C_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int \left(f_1(x) + C_1\right) dx = f_2(x) + C_1 x + C_2;\ \ldots;$$

$$y = f_n(x) + \frac{C_1}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!} x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n, \text{ де}$$

$$f_n(x) = \underbrace{\int\int\int\ldots\int}_{n \ \ \text{разів}} f(x)\,dx^n.$$

Приклад 25.1. Розв'язати рівняння: $y''' = \frac{2}{x^5} - \cos 4x + 5$.

Розв'язання. Права частина рівняння не містить невідомої функції y та її похідної y', тому для отримання розв'язку тричі послідовно інтегруємо обидві його частини:

$$y'' = \int\left(\frac{2}{x^5} - \sin 4x + 5\right) dx = \frac{2x^{-4}}{-4} - \frac{1}{4}\sin 4x + 5x + C_1 =$$

$$= -\frac{x^{-4}}{2} - \frac{1}{4}\sin 4x + 5x + C_1,$$

$$y' = \int\left(-\frac{x^{-4}}{2} - \frac{1}{4}\sin 4x + 5x + C_1\right) dx = \frac{x^{-3}}{6} + \frac{1}{16}\cos 4x + \frac{5x^2}{2} + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int\left(\frac{x^{-3}}{6} + \frac{1}{16}\cos 4x + \frac{5x^2}{2} + C_1 x + C_2\right) dx = -\frac{x^{-2}}{12} + \frac{1}{64}\sin 4x +$$

$$+ \frac{5x^3}{6} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 = -\frac{1}{12x^2} + \frac{\sin 4x}{64} + \frac{5x^3}{6} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Отже, загальний розв'язок даного рівняння:

$$y = -\frac{1}{12x^2} + \frac{\sin 4x}{64} + \frac{5x^3}{6} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Приклад 25.2. Знайти загальний розв'язок рівняння: $y'' = x\cos\frac{x}{2}$.

Розв'язання. Дане рівняння того ж типу, що і попереднє, тому його розв'язок знаходимо аналогічно, тобто:

$$y' = \int x\cos\frac{x}{2}\,dx = \left| \begin{array}{ll} \multicolumn{2}{l}{\textit{Використовуємо метод}} \\ \multicolumn{2}{l}{\textit{інтегрування частинами}} \\ u = x & dv = \cos\frac{x}{2}dx \\ du = dx & v = \int\cos\frac{x}{2}dx = 2\sin\frac{x}{2} \end{array} \right| =$$

$$= y' = 2x\sin\frac{x}{2} - 2\int\sin\frac{x}{2}dx = 2x\sin\frac{x}{2} + 4\cos\frac{x}{2} + C_1,$$

$$y = \int\left(2x\sin\frac{x}{2} + 4\cos\frac{x}{2} + C_1\right)dx = 2\int x\sin\frac{x}{2}dx + 8\sin\frac{x}{2} + C_1x + C_2,$$

$$\int x\sin\frac{x}{2}dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \sin\frac{x}{2}dx \\ du = dx & v = \int\sin\frac{x}{2}dx = -2\cos\frac{x}{2} \end{array} \right| =$$

$$= -2x\cos\frac{x}{2} + 2\int\cos\frac{x}{2}dx = -2x\cos\frac{x}{2} + 4\sin\frac{x}{2}.$$

Тоді загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = -4x\cos\frac{x}{2} + 16\sin\frac{x}{2} + C_1x + C_2.$$

Приклад 25.3. Розв'язати задачу Коші: $y'' = \frac{2x}{x^2+1}, \quad y'(0) = 0, \quad y(0) = 2.$

Розв'язання. $y' = \int\frac{2x}{x^2+1}dx = ln\left(x^2+1\right) + C_1,$

$$y = \int\left(ln\left(x^2+1\right) + C_1\right)dx = \int ln\left(x^2+1\right)dx + C_1x + C_2$$

$$\int ln\left(x^2+1\right)dx = \left| \begin{array}{ll} \textbf{Використовуємо} & \textbf{метод} \\ \textbf{інтегрування} & \textbf{частинами} \\ u = ln\left(x^2+1\right) & dv = dx \\ du = \dfrac{2x}{x^2+1}dx & v = x \end{array} \right| = x\,ln\left(x^2+1\right) - 2\int \frac{x^2}{x^2+1}dx =$$

$$= x\,ln\left(x^2+1\right) - 2\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = x\,ln\left(x^2+1\right) - 2\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= x\,ln\left(x^2+1\right) - 2x + 2arctgx.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння:

$$y = x\,ln\left(x^2+1\right) - 2x + 2arctgx + C_1x + C_2.$$

Для того, щоб отримати частинний розв'язок, тобто, розв'язати задачу Коші, треба знайти C_1 та C_2, використовуючи початкові умови:

$$0 = ln(0+1) + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0;$$

$$2 = 0\cdot ln(0+1) - 2\cdot 0 + 2arctg0 + C_1\cdot 0 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 2.$$

Таким чином $y = x\,ln\left(x^2+1\right) - 2x + 2arctgx + 2$ - частинний розв'язок рівняння.

Приклад 25.4. Знайти частинний розв'язок рівняння:

$$y'' = 2\cos x \sin^2 x - \cos^3 x, \qquad y(0) = \frac{7}{3}; \quad y'(0) = -1.$$

Розв'язання. Знайдемо загальний розв'язок інтегруванням:

$$y' = \int\left(2\cos x \sin^2 x - \cos^3 x\right)dx = \int\left(2\sin^2 x \cos x - \cos^2 x\cdot\cos x\right)dx =$$

$$= \int\left(2\sin^2 x - \cos^2 x\right)\cos x dx = \int\left(2\sin^2 x - 1 + \sin^2 x\right)\cos x dx =$$

$$\int\left(3\sin^2 x-1\right)\cos x dx=\left|\begin{array}{l}\sin x=t,\\ dt=\cos x dx\end{array}\right|=\int\left(3t^2-1\right)dt=\frac{3t^3}{3}-t+C_1=$$

$$=\sin^3 x-\sin x+C_1.$$

$$y=\int\left(\sin^3 x-\sin x+C_1\right)dx=\int\left(\sin^2 x-1\right)\sin x dx+C_1\int dx=$$

$$=-\int\cos^2 x\sin x dx+C_1 x=\left|\begin{array}{l}\cos x=t,\\ dt=-\sin x dx.\end{array}\right|=\int t^2 dt+C_1 x=\frac{t^3}{3}+C_1 x+C_2=$$

$$=\frac{\cos^3 x}{3}+C_1 x+C_2.$$

Знайдемо C_1 та C_2. Підставимо початкові умови у вирази для y' та y.

$$-1=-\cos^3 0+\cos 0+C_1 \quad\Rightarrow\quad C_1=-1;$$

$$\frac{7}{3}=\frac{\cos^3 0}{3}+C_1\cdot 0+C_2 \quad\Rightarrow\quad C_2=2.$$

Тоді частинний розв'язок рівняння має вигляд $y=\frac{\cos^3 x}{3}-x+2$.

25.2. Диференціальні рівняння, що явно не містять шукану функцію $y(x)$

$F(x, y', y'')=0$

Диференціальне рівняння $F(x, y', y'')=0$, що явно не містить шукану функцію y, за допомогою підстановки $y'=P(x)$; $y''=P'(x)$ зводять до відповідного рівняння першого порядку $F(x, P(x), P'(x))=0$. Розв'язок цього рівняння знаходять, враховуючи його тип, а потім, для отримання загального розв'язку початкового рівняння, інтегрують рівняння $y'=P$.

Приклад 25.5. Розв'язати рівняння: $y''(1+x^2)=2xy'$.

Розв'язання. Дане рівняння не містить явно функції y, тому зводимо його до рівняння першого порядку підстановкою $y'=P(x)$, $y''=P'(x)$.

Маємо: $P'(1+x^2)=2xP$,

$$(1+x^2)\frac{dP}{dx}=2xP \quad\Rightarrow\quad \frac{dP}{P}=\frac{2xdx}{1+x^2} \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dP}{P}=\int\frac{2xdx}{1+x^2} \quad\Rightarrow$$

$$ln|P|=ln\left|1+x^2\right|+ln\,C_1 \quad\Rightarrow\quad ln|P|=ln\left|C_1(1+x^2)\right| \quad\Rightarrow\quad P=C_1(1+x^2).$$

Отже, $y'=C_1(1+x^2)$. Інтегруючи це рівняння, дістанемо

$$y=C_1x+\frac{C_1x^3}{3}+C_2.$$

Приклад 25.6. Розв'язати рівняння: $x^2y''+xy'=1$.

Розв'язання. Аналогічно попередньому прикладу введемо підстановку $y'=P(x)$, $y''=P'(x)$. Отримаємо рівняння першого порядку:

$$x^2P+xP=1.$$

Це рівняння є лінійним. Його розв'язок будемо шукати за допомогою підстановки $P=uv$, $P=u'v+uv'$:

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=\frac{1}{x^2},\qquad u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=\frac{1}{x^2},$$

$$\begin{cases} I & v'+\dfrac{v}{x}=0, \\ II & u'v=\dfrac{1}{x^2}. \end{cases}$$

I. $\dfrac{dv}{v}=-\dfrac{dx}{x} \quad\Rightarrow\int\dfrac{dv}{v}=-\int\dfrac{dx}{x} \quad\Rightarrow\; ln|v|=-ln|x| \quad\Rightarrow\; ln\,v=ln\dfrac{1}{x} \quad\Rightarrow v=\dfrac{1}{x}.$

II. $u'\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x^2} \quad\Rightarrow\; du=\dfrac{1}{x}ln\,x \quad\Rightarrow\int du=\int\dfrac{1}{x}dx \quad\Rightarrow u=ln\,x+C_1.$

Маємо $P=\left(ln\,x+C_1\right)\cdot\dfrac{1}{x}$, тоді $y'=P=\dfrac{ln\,x+C_1}{x}$.

$$y=\int\left(\frac{ln\,x+C_1}{x}\right)dx.$$

Після інтегрування отримаємо $y=\dfrac{ln^2 x}{2}+C_1\,ln|x|+C_2$ - загальний розв'язок.

Приклад 25.7. Знайти частинний розв'язок рівняння:

$$xy''=y'\,ln\frac{y'}{x},\quad y(1)=e,\quad y'(1)=e^2.$$

Розв'язання. Рівняння явно не залежить від функції y, тому підстановкою $y'=P(x),\quad y''=P'(x)$ зводимо його до диференціального рівняння першого порядку:

$$x\,P'=P\,ln\frac{P}{x},$$

яке є однорідним. Використовуємо заміну $P=ux,\quad P'=u'x+u$ та отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$x\left(u'x+u\right)=u\,x\,ln\frac{ux}{x},$$

або

$$u'x+u=u\,ln\,u\quad\Rightarrow\quad u'x=u\,ln\,u-u\quad\Rightarrow\quad\frac{du}{dx}=u(ln\,u-1)\quad\Rightarrow$$

$$\int\frac{du}{u(ln\,u-1)}=\int\frac{dx}{x}.$$

До інтеграла, що стоїть у лівій частині останнього рівняння застосуємо заміну $t=ln\,u-1\quad\Rightarrow\quad dt=\dfrac{du}{u}$. Дістанемо:

$$\int\frac{dt}{t}=\int\frac{dx}{x}\quad\Rightarrow\quad ln|t|=ln|x|+ln|C_1|\quad\Rightarrow\quad ln|t|=ln|C_1x|\quad\Rightarrow\quad t=C_1x\quad\Rightarrow$$

$$ln\,u-1=C_1x\quad\Rightarrow\quad ln\,u=C_1x+1\quad\Rightarrow\quad u=e^{C_1x+1}\quad\Rightarrow\quad\frac{p}{x}=e^{C_1x+1}\quad\Rightarrow$$

$$p=xe^{C_1x+1}\quad\Rightarrow\quad y'=xe^{C_1x+1}.$$

Маємо диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними, яке розв’язуємо інтегруванням:

$$y = \int x e^{C_1+1} dx\,.$$

$$y = \int x e^{C_1 x+1} dx \quad \left|\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{l}{\textit{використовуємо метод інтегрування частинами}} \\ u = x & dv = e^{C_1 x+1} dx \\ du = dx & v = \int e^{C_1 x+1} dx = \dfrac{1}{C_1} e^{C_1 x+1} \end{array}\right|$$

$$y = x \frac{1}{C_1} e^{C_1 x+1} - \int \frac{1}{C_1} e^{C_1 x+1} dx = x \frac{1}{C_1} e^{C_1 x+1} - \frac{1}{C_1^{\,2}} e^{C_1 x+1} + C_2\,.$$

Отже, загальним розв’язком даного рівняння буде функція:

$y = x \dfrac{1}{C_1} e^{C_1 x+1} - \dfrac{1}{C_1^{\,2}} e^{C_1 x+1} + C_2$ або $y = \dfrac{C_1 x - 1}{C_1^2} e^{C_1 x+1} + C_2$.

Підставимо початкові умови $y(1) = e, \quad y'(1) = e^2$. Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} e = \dfrac{C_1 - 1}{C_1^2} e^{C_1+1} + C_2, \\ e^2 = e^{C_1+1}. \end{cases}$$

Звідси $C_1 = 1, C_2 = e$.

Отже, частинний розв’язок рівняння має вигляд: $y = (x-1)e^{x+1} + e$.

25.3. Диференціальні рівняння, що явно не містять незалежну змінну x $F(y, y', y'') = 0$

Диференціальне рівняння вигляду $F(y, y', y'') = 0$, що явно не містить незалежну змінну x, підстановкою $y' = P(y), \quad y'' = P'_y \cdot y'_x = P'P$ зводять до диференціального рівняння першого порядку $F(y, P, P') = 0.$ Розв’язуючи його знаходять функцію $P(y)$ або $y' = P(y)$. Остання рівність є рівнянням з відокремлюваними змінними, з якого і визначають загальний розв’язок початкового рівняння.

Приклад 25.8. Розв'язати рівняння: $(y')^2 = y\,y'' + 1$.

Розв'язання. Це рівняння явно не містить незалежну змінну x, тому слід використати підстановку $y' = P(y),\quad y'' = P'P,$ яка зведе наше рівняння до рівняння першого порядку:

$$yP'P + 1 = P^2.$$

Відокремимо змінні, та обчислимо одержані інтеграли:

$$P^2 = y\frac{PdP}{dy} + 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{PdP}{P^2 - 1} = \frac{dy}{y} \quad\Rightarrow\quad \int\frac{PdP}{P^2 - 1} = \int\frac{dy}{y} \quad\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}ln\left|P^2 - 1\right| = ln|y| = ln\,C_1 \Rightarrow \sqrt{P^2 - 1} = C_1 y \Rightarrow P = \sqrt{C_1^2 y^2 + 1}$$

Останнє рівняння – це диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{C_1^2 y^2 + 1} \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{\sqrt{C_1^2 y^2 + 1}} = dx \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{C_1}ln\left|y + \sqrt{y^2 + \frac{1}{C_1^2}}\right| + C_2 = x.$$

Отже, загальний інтеграл даного рівняння:

$$\frac{1}{C_1}ln\left|y + \sqrt{y^2 + \frac{1}{C_1^2}}\right| + C_2 = x.$$

Приклад 25.9. Знайти частинний розв'язок рівняння:

$$y^2 y'' = -`1,\qquad y(1) = 1;\qquad y'(1) = 0.$$

Розв'язання. Підстановкою $y' = P(y),\quad y'' = P'\cdot P$ початкове рівняння зводиться до рівняння першого порядку:

$$y^3 PP' = -1 \Rightarrow PdP = -\frac{dy}{y^3}$$

$$\int PdP = -\int\frac{dy}{y^3} \Rightarrow \frac{P^2}{2} = \frac{1}{2y^2} + C_1 \Rightarrow P = \pm\sqrt{\frac{1}{y^2} + 2C_1},$$

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{\sqrt{1+2C_1y^2}}{y}\Rightarrow dx=\pm\frac{ydy}{\sqrt{1+2C_1y^2}}$$

$$x=\pm\int\frac{ydy}{\sqrt{1+2C_1y^2}}+C_2=\frac{\pm 1}{4C_1}\int\frac{1}{\sqrt{1+2C_1y^2}}d\left(1+2C_1y^2\right)$$

$x=\pm\dfrac{1}{2C_1}\sqrt{1+2C_1y^2}+C_2$ - загальний розв'язок рівняння.

Використовуючи початкові умови $y(1)=1,\ y'(1)=0$, знайдемо частинний розв'язок рівняння:

$$\begin{cases}\pm\dfrac{1}{2C_1}\sqrt{1+2C_1}+C_2=1,\\ \pm\sqrt{1+2C_1}=0.\end{cases}$$

Звідки $C_1=-\dfrac{1}{2}, C_2=1$

Отже $x=\pm\sqrt{1-y^2}+1$ - частинний розв'язок рівняння.

Приклад 25.10. Знайти частинний розв'язок рівняння:

$$yy''=y^2+\left(y'\right)^2,\qquad y(0)=1;\quad y'(0)=1.$$

Розв'язання. Підстановкою $y'P(y);\quad y''=P'P$ зведемо дане рівняння до однорідного рівняння І-го порядку $yPP'=y^2+P^2$, яке за допомогою заміни $P=uy,\quad P'=u'y+u$ перетвориться на диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$yuy\left(u'y+u\right)=y^2+\left(uy\right)^2\quad\Rightarrow\quad u\left(u'y+u\right)=1+u^2\quad\Rightarrow uu'y+u^2=1+u^2\quad\Rightarrow$$

$$uu'y=1\quad\Rightarrow\quad udu=\frac{1}{y}\quad\Rightarrow\quad\int udu=\int\frac{dy}{y}$$

$$\frac{u^2}{2}=\ln y+C_1\quad\Rightarrow\quad u^2=2\left(\ln y+C_1\right)\quad\Rightarrow\quad u=\pm\sqrt{2\left(\ln y+C_1\right)}.$$

Оскільки $P=uy$, то маємо, що $P=\pm y\sqrt{2\left(\ln y+C_1\right)}$. Звідки $y'=\pm y\sqrt{2\left(\ln y+C_1\right)}$.

Ми отримали диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$\frac{dy}{dx} = \pm y\sqrt{2(\ln y + C_1)} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y\sqrt{2(\ln y + C_1)}} = \pm dx \;\Rightarrow\; \int \frac{dy}{y\sqrt{2(\ln y + C_1)}} = \pm \int dx$$

$\sqrt{2(\ln y + C_1)} = \pm x + C_2$ - загальний розв'язок рівняння.

Знайдемо частинний розв'язок рівняння. З початкових умов випливає:

$$\begin{cases} y(0) = 1, \\ y'(0) = 1 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \sqrt{2C_1} = C_2, \\ 1 = \sqrt{2C_1} \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} C_2 = 1, \\ C_1 = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Зауважимо, що початкові умови приводять до однозначного вибору знака у виразі для $y'(x)$, а отже, і у розв'язку $y(x)$. Частинний розв'язок даного рівняння має вигляд $\sqrt{2\ln y + 1} = x + 1$ або $y = e^{(x^2 + 2x)/2}$.

Завдання для самостійної роботи

Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь другого порядку:

1) $y'' = \sin^2 3x$;
2) $y'' = x^2 \ln x$;
3) $y''' = e^{5x} - x^3$;
4) $y''' = \dfrac{2}{x^3} - 5\sin 7x$;
5) $xy'' - y' = 0$;
6) $y'' + y' tgx = \sin 2x$;
7) $x^2 y'' + xy' = 1$;
8) $xy'' = y' + x\sin\dfrac{y'}{x}$;
9) $yy'' - y'\left(2\sqrt{yy'} - y'\right) = 0$;
10) $2yy'' = 3(y')^2 = 4y^2$;
11) $y''y^3 = 4$;
12) $y'' = \dfrac{y'}{\sqrt{y}}$.

ЛЕКЦІЯ 21. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ. ЛІНІЙНІ ОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ (ЛОДР)

21.1 Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків. Загальні означення та поняття

Рівняння вигляду

$$b_0(x)y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1}(x)y' + b_n(x)y = F(x) \tag{21.1}$$

називається лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку, де $b_0(x), b_1(x), \ldots, b_{n-1}(x),\ b_n(x), F(x)$ - задані функції, y- шукана функція, $y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, y'$ - похідні цієї функції. Функції $b_0(x), b_1(x), \ldots,\ b_{n-1}(x), b_n(x)$ називаються коефіцієнтами диференціального рівняння, функція $F(x)$ називається правою частиною диференціального рівняння. Якщо $F(x)$ тотожно дорівнює нулю, то рівняння (21.1) називається ***однорідним***, якщо $F(x) \neq 0$, то рівняння (21.1) називається ***неоднорідним***. В рівнянні (21.1) завжди $b_0(x) \neq 0$, оскільки, якщо б це було не так, то рівняння (21.1) було б рівнянням $n-1$ порядку. Це означає, що рівняння (21.1) можна розділити на $b_0(x)$ і отримати:

$$y^{(n)} + \frac{b_1(x)}{b_0(x)}y^{(n-1)} + \ldots + \frac{b_{n-1}(x)}{b_0(x)}y' + \frac{b_n(x)}{b_0(x)}y = \frac{F(x)}{b_0(x)} \quad \text{або}$$

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \tag{21.2}$$

де $a_1(x) = \dfrac{b_1(x)}{b_0(x)}, \quad a_2(x) = \dfrac{b_2(x)}{b_0(x)}, \ldots, \quad a_{n-1}(x) = \dfrac{b_{n-1}(x)}{b_0(x)}, \quad a_n(x) = \dfrac{b_n(x)}{b_0(x)}$.

Далі будемо розглядувати рівняння (21.2), як більш зручніше.

Якщо, у деякому інтервалі $(a;b)$ функції $a_i(x)$ та $f(x)$ неперервні, то рівняння (21.2) при будь-яких початкових умовах

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0\ ,\ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},\ x_0\in(a;b)$$

має єдиний розв'язок.

21.2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння (ЛОДР) другого порядку:

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0 \qquad (21.3)$$

Теорема 21. 1. Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є частинними розв'язками рівняння (21.1), то функція

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x),$$

де $C_1,\ C_2$ – довільні сталі, є також розв'язком цього рівняння.

Доведення. Підставимо функцію $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ та її похідні в ліву частину ЛОДР (21.3). Отримаємо:

$$\left(C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\right)''+a_1\left(C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\right)'+a_2\left(C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\right)=0,$$

$$C_1y_1''(x)+C_2y_2''(x)+a_1C_1y_1'(x)+a_1C_2y_2'(x)+a_2C_1y_1(x)+a_2C_2y_2(x)=0,$$

$$C_1\left(y_1''(x)+a_1y_1'(x)+a_2y_1(x)\right)+C_2\left(y_2''(x)+a_1y_2'(x)+a_2y_2(x)\right)=0.$$

Оскільки функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – є розв'язками рівняння (21.3), то, вирази в дужках тотожно дорівнюють нулю, тобто $C_1\cdot 0+C_2\cdot 0\equiv 0$. Таким чином, функція $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ також є розв'язком рівняння (21.3).

Означення. Функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ називаються ***лінійно незалежними*** на інтервалі $(a;b)$, якщо рівність $\alpha_1y_1(x)+\alpha_2y_2(x)=0$ де α_1 та α_2 деякі дійсні числа, виконується тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1=\alpha_2=0$. Якщо хоча б одне з чисел α_1 та α_2 відмінно від нуля то функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ називаються ***лінійно залежними*** на $(a;b)$. Зрозуміло, що функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони пропорційні, тобто $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}=const.$

Засобом вивчення лінійної залежності системи функцій є так званий ***визначник Вронського*** або ***вронскіан***. Для двох диференційованих функцій $y_1(x)$ та $y_2(x)$ вронскіан має вигляд

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}. \tag{21.4}$$

Теорема 21.2. Якщо диференційовані функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ лінійно залежні на $(a;b)$, то визначник Вронського на цьому інтервалі тотожно дорівнює нулю.

Доведення. Оскільки функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ лінійно залежні на $(a;b)$, то вони є пропорційними, тобто $y_2(x)=\lambda\, y_1(x)$, де λ - коефіцієнт пропорційності. Тоді, $y_2'(x)=\lambda\, y_1'(x)$. Отримаємо:

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & \lambda\, y_1(x) \\ y_1'(x) & \lambda\, y_1'(x) \end{vmatrix}=y_1(x)\cdot\lambda\, y_1'(x)-y_1'(x)\cdot\lambda\, y_1(x)\equiv 0.$$

Теорема 21.3. Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ - лінійно незалежні розв'язки рівняння (21.3) на $(a;b)$, то визначник Вронського на цьому інтервалі в жодній точці не дорівнює нулю.

Сукупність будь-яких двох лінійно незалежних на інтервалі $(a;b)$ частинних розв'язків ЛОДР другого порядку $y_1(x)$ та $y_2(x)$ визначає ***фундаментальну систему розв'язків*** цього рівняння.

Теорема 21.4. (***структура загального розв'язку ЛОДР другого порядку***). Якщо два частинні розв'язки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ЛОДР (21.3) утворюють на інтервалі $(a;b)$ фундаментальну систему, то загальним розв'язком цього рівняння є функція

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x), \tag{21.5}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Доведення. Згідно теореми 21.1 функція (21.5) є розв'язком рівняння (21.3). Треба тільки довести, що цей розв'язок є загальним, тобто, що із нього можна виділити єдиний частинний розв'язок, який задовольняє початкові умови $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$, де $x_0\in(a;b)$. Підставивши ці початкові умови в (21.5), дістанемо систему

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0), \\ y_0' = C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x_0), \end{cases}$$

де $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ з невідомими C_1, C_2. Визначник цієї системи $\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0)$ дорівнює значенню вронскіана при $x = x_0$. Оскільки розв'язки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків цього рівняння на $(a;b)$ та $x_0 \in (a;b)$, то відповідно до теореми 21.3 визначник $W(x_0) \neq 0$.

Отже, система рівнянь має єдиний розв'язок:

$$C_1 = C_1^0 = \frac{1}{W(x_0)} \begin{vmatrix} y_0 & y_2(x_0) \\ y_0' & y_2'(x_0) \end{vmatrix}, \quad C_2 = C_2^0 = \frac{1}{W(x_0)} \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_0 \\ y_1'(x_0) & y_0' \end{vmatrix}.$$

Розв'язок $y = C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x)$ є частинним розв'язком (єдиним внаслідок теореми єдиності) рівняння (21.3), що задовольняє задані початкові умови.

21.3. Інтегрування ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо ЛОДР другого порядку

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0, \tag{21.6}$$

де p та q є сталі числа.

Для знаходження загального розв'язку рівняння (21.6) досить знайти два його частинних розв'язки, що утворюють фундаментальну систему.

Будемо шукати частинні розв'язки рівняння (21.6) у вигляді $y = e^{kx}$, де k-деяке число (запропоновано Л. Ейлером). Тоді $y' = k e^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$. Після підстановки цих виразів в рівняння (21.6) отримаємо:

$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$, або $e^{kx}\left(k^2 + pk + q\right) = 0$. Остаточно дістанемо:

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{21.7}$$

Рівняння (21.7) називається ***характеристичним рівнянням*** ЛОДР (21.6), і є квадратним алгебраїчним рівнянням.

При розв'язанні характеристичного рівняння (21.7) можливі наступні три випадки.

1. Корені k_1 та k_2 рівняння (21.7) дійсні і різні ($k_1 \neq k_2, D = p^2 - 4q > 0$). В цьому випадку частинними розв'язками $y_1(x)$ та $y_2(x)$ рівняння (21.6) є

функції $y_1 = e^{k_1 x}$ та $y_2 = e^{k_2 x}$. Вони утворюють фундаментальну систему розв'язків, оскільки вронскіан

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = e^{k_1 x} \cdot k_2 e^{k_2 x} - k_1 e^{k_1 x} \cdot e^{k_2 x} =$$

$$= e^{k_1 x} \cdot e^{k_2 x}(k_2 - k_1) \neq 0.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (21.6), за теоремою 21.4 має вигляд:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \qquad (21.8)$$

2. Корені k_1 та k_2 рівняння (21.7) дійсні і однакові ($k_1 = k_2, D = p^2 - 4q = 0$). В цьому випадку маємо лише один частинний розв'язок $y_1 = e^{k_1 x}$.

Покажемо, що функція $y_2 = x e^{k_1 x}$ також є розв'язком рівняння (21.6). Маємо $y_2 = x e^{k_1 x}, y_2' = e^{k_1 x} + k_1 x e^{k_1 x}$,

$y_2'' = k_1 e^{k_1 x} + k_1 e^{k_1 x} + k_1^2 x e^{k_1 x} = 2k_1 e^{k_1 x} + k_1^2 x e^{k_1 x}$. Підставляючи цю функцію та її похідні в рівняння (21.6) дістанемо

$$2k_1 e^{k_1 x} + k_1^2 x e^{k_1 x} + p\left(e^{k_1 x} + k_1 x e^{k_1 x}\right) + q x e^{k_1 x} = 0$$

або $2k_1 + k_1^2 x + p(1 + k_1 x) + qx = 0 \Rightarrow \quad x\left(k_1^2 + pk_1 + q\right) + (p + 2k_1) = 0$

Оскільки k_1 - корінь характеристичного рівняння (21.7), то $k_1^2 + pk_1 + q \equiv 0$ і $p + 2k_1 \equiv 0$, тобто останнє рівняння перетворюється на тотожність $0 \equiv 0$. Таким чином, функція $y_2 = x e^{k_1 x}$ є розв'язком рівняння (21.6).

Частинні розв'язки $y_1 = e^{k_1 x}$ та $y_2 = x e^{k_1 x}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків, оскільки вронскіан

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & x e^{k_1 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & (1 + k_1 x) e^{k_1 x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{k_1 x} \cdot (1 + k_1 x) e^{k_1 x} - k_1 x e^{k_1 x} \cdot e^{k_1 x} = e^{2k_1 x} \neq 0.$$

Це означає, що функція $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x}$ або

$$y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x) \qquad (21.9)$$

є загальним розв'язком диференціального рівняння (21.6).

3. Корені k_1 та k_2 характеристичного рівняння (21.7) комплексно-спряжені ($k_{1,2} = \alpha \pm \beta\, i$, $D = p^2 - 4q < 0$, де $i^2 = -1$).

У цьому випадку частинними розв'язками диференціального рівняння (21.6) є функції $y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}$ та $y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}$. За формулами Ейлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$ маємо

$$y_1 = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y_2 = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Знайдемо два дійсних частинних розв'язки ЛОДР (21.6). Для цього складемо дві лінійні комбінації розв'язків $y_1(x)$ та $y_2(x)$:

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x = \tilde{y}_1, \qquad \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x = \tilde{y}_2.$$

Функції $\tilde{y}_1$ та $\tilde{y}_2$ є розв'язками диференціального рівняння (21.6), що випливає з властивостей розв'язків ЛОДР другого порядку. Ці розв'язки $\tilde{y}_1$ та $\tilde{y}_2$ утворюють фундаментальну систему розв'язків, оскільки вронскіан

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x & \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + \beta e^{\alpha x}\cos\beta x \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2\alpha x}\begin{vmatrix} \cos\beta x & \sin\beta x \\ \alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x & \alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x \end{vmatrix} = e^{2\alpha x}\big(\alpha\sin\beta x\cos\beta x +$$

$$+ \beta\cos^2\beta x - \alpha\sin\beta\, x\cos\beta x + \beta\sin^2\beta x\big) = \beta e^{2\alpha x} \neq 0.$$

Отже, функція

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right) \tag{21.10}$$

є загальним розв'язком ЛОДР (21.6).

Таким чином, результати дослідження можливих випадків розв'язків ЛОДР з постійними коефіцієнтами можна записати у вигляді наступної таблиці.

Таблиця 1.

k_1, k_2 – корені характеристичного рівняння $k^2 + pk + q = 0$	y_1, y_2 – частинні розв'язки ЛОДР	$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ – загальний розв'язок ЛОДР
k_1, k_2 – дійсні різні числа, $k_1 \neq k_2$	$y_1 = e^{k_1 x}$ $y_2 = e^{k_2 x}$	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
$k_1 = k_2$ – дійсні однакові числа	$y_1 = e^{k_1 x}$ $y_2 = x\, e^{k_1 x}$	$y = e^{k_1 x}\left(C_1 + C_2 x\right)$
$k_{1,2} = \alpha \pm \beta\, i$ – комплексно -спряжені числа, $i^2 = -1$ – уявна одиниця, α, β – дійсні числа.	$y_1 = e^{\alpha x} \cos\beta x$ $y_2 = e^{\alpha x} \sin\beta x$	$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right)$

Приклад 21.1. Розв'язати рівняння: $y'' - 6y' + 8y = 0$.

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння

$$k^2 - 6k + 8 = 0,$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 4,$$

$$k_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2};$$

$k_1 = 4; \quad k_2 = 2$ – корені характеристичного рівняння дійсні та різні, тобто, загальний розв'язок рівняння має вигляд (21.8) $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{2x}$.

Приклад 21.2. Розв'язати рівняння: $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вигляд $k^2 + 6k + 9 = 0$. Його корені – дійсні, рівні – $k_{1,2} = -3$. Тоді загальний розв'язок рівняння має вигляд (21.9) $y = e^{-3x}\left(C_1 x + C_2 x\right)$.

Приклад 21.3. Розв'язати рівняння: $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Розв'язання. Маємо характеристичне рівняння $k^2 + 4k + 13 = 0$.

$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -36$,

$k_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = -2 \pm 3i, \quad \Rightarrow \quad \alpha = -2; \quad \beta = 3$.

Загальний розв'язок рівняння (21.10) – $y = e^{-2x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right)$.

Приклад 21.4. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - 5y + 6y' = 0, \quad y(0) = 3; \quad y'(0) = 7.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вигляд

$$k^2 - 5k + 6 = 0.$$

Його корені $k_1 = 2; \; k_2 = 3$. Тоді, загальний розв'язок (21.8) – $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$. Для того, щоб знайти частинний розв'язок треба визначити C_1 та C_2. Це можна зробити, використовуючи початкові умови, але спочатку треба знайти похідну y' від загального розв'язку: $y' = 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x}$. Дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y(0) = 3, \\ y'(0) = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = C_1 e^0 + C_2 e^0, \\ 7 = 2C_1 e^0 + 3C_2 e^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 3, \\ 2C_1 + 3C_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Отже, частинний розв'язок рівняння має вигляд $y = 2e^{2x} + e^{3x}$.

Приклад 21.5. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = 4; \quad y'(0) = 5.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 - 2x + 1 = 0$. Його корені $k_1 = k_2 = 1$. Тоді загальний розв'язок $y = e^x\left(C_1 + C_2 x\right)$. Знайдемо похідну y': $y' = e^x\left(C_1 + C_2 x\right) + e^x \cdot C_2$.

Маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} y(0) = 4, \\ y'(0) = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = e^0\left(C_1 + C_2 \cdot 0\right), \\ -5 = e^0\left(C_1 + C_2 \cdot 0\right) + e^0 \cdot C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 4, \\ -5 = C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 4, \\ C_2 = -9. \end{cases}$$

Отже, розв'язок задачі Коші матиме вигляд $y = e^x\left(4 - 9x\right)$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 26. ЛІНІЙНІ ОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Рівняння $y'' + py' + qy = 0$ називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами.

Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння має вигляд

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

де $y_1(x)$ та $y_2(x)$– лінійно-незалежні частинні розв'язки рівняння, тобто $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq const$, а C_1, C_2 – довільні сталі.

Для знаходження y_1, y_2 треба розв'язати характеристичне рівняння:

$$k^2 + pk + q = 0.$$

1) Якщо k_1, k_2 – дійсні різні числа, то загальний розв'язок рівняння має вигляд (21.8) $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

2) Якщо $k_1 = k_2 = k$, то загальним розв'язком рівняння є (21.9) $y = e^{k_1 x}\left(C_1 + C_2 x\right)$.

3) Якщо k_1, k_2 – спряжені комплексні числа, тобто $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, то загальний розв'язок рівняння має вигляд (21.10) $y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right)$.

Приклад 26.1. Розв'язати рівняння: $y'' - 7y' + 6y = 0$.

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 7k + 6 = 0.$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25, \quad k_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2} \text{ тобто}$$

$k_1 = 6, k_2 = 1$ - корені характеристичного рівняння дійсні та різні, тому загальний розв'язок має виглд: $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{x}$.

Приклад 26.2. Розв'язати рівняння: $y'' - 10y' + 25y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вигляд $k^2 - 10k + 25 = 0$. Його корені $k_{1,2} = 5$ – дійсні, рівні.

Тоді загальний розв'язок рівняння $y = e^{5x}\left(C_1 + C_2 x\right)$.

Приклад 26.3. Розв'язати рівняння: $y'' - 2y' + 10y = 0$.

Розв'язання. Маємо характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 10 = 0$.

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -36,$$

$$k_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i, \qquad (\ \alpha = 1; \quad \beta = 3\ ).$$

Загальний розв'язок рівняння $y = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

Приклад 26.4. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - 6y + 5y' = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -2.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вигляд $k^2 - 6k + 5 = 0$, звідки маємо корені $k_1 = 1, k_2 = 5$. Тоді загальний розв'язок: $y = C_1 e^x + C_2 e^{5x}$. Для того, щоб знайти частинний розв'язок треба визначити C_1 та C_2. Це можна зробити, використовуючи початкові умови, але спочатку треба знайти похідну y' від загального розв'язку: $y' = C_1 e^x + 5C_2 e^{5x}$. Дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y(0) = 2, \\ y'(0) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = C_1 e^0 + C_2 e^0, \\ -2 = C_1 e^0 + 5C_2 e^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ C_1 + 5C_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 3, \\ C_2 = -1. \end{cases}$$

Отже, частинний розв'язок рівняння $y = 3e^x - e^{5x}$.

Приклад 26.5. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' + 3y' = 0, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 3.$$

Розв'язання. Отримаємо характеристичне рівняння: $k^2 + 3k = 0$. Це неповне квадратне рівняння, тому розв'яжемо його наступним чином: $k \cdot (k + 3) = 0$, звідки знайдемо $k_1 = 0$, $k_2 = -3$. Тоді загальний розв'язок рівняння $y = C_1 e^0 + C_2 e^{-3x}$ або $y = C_1 + C_2 e^{-3x}$.

Знайдемо $y' = 0 + C_2 e^{-3x} \cdot (-3) = -3C_2 e^{-3x}$.

Підставляючи початкові умови, будемо мати:

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 e^0, \\ 3 = -3C_2 e^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 - C_2, \\ C_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2, \\ C_2 = -1. \end{cases}$$

Тоді частинний розв’язок рівняння: $y = 2 - e^{-3x}$.

Приклад 26.6. Розв’язати задачу Коші:

$$y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = -1.$$

Розв’язання. Характеристичне рівняння $k^2 - 6k + 9 = 0$. Його корені $k_1 = k_2 = 3$. Тоді загальний розв’язок $y = e^{3x}(C_1 + C_2 x)$. Знайдемо похідну y':

$$y' = 3e^{3x}(C_1 + C_2 x) + e^{3x} \cdot C_2.$$

Маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} y(0) = 1, \\ y'(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = e^0(C_1 + C_2 \cdot 0), \\ -1 = 3e^0(C_1 + C_2 \cdot 0) + e^0 \cdot C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ -1 = 3C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = -4. \end{cases}$$

Отже, частинний розв’язок рівняння $y = e^{3x}(1 - 4x)$.

Приклад 26.7. Розв’язати задачу Коші:

$$y'' + 25y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = -2..$$

Розв’язання. Характеристичне рівняння $k^2 + 25 = 0$, звідки $k^2 = -25$, тому $k_{1,2} = \pm 5i$ $(\alpha = 0, \beta = 5)$.

Тоді загальний розв’язок запишеться у вигляді $y = e^0(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$ або $y = (C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$.

Знайдемо $y' = -5C_1 \sin 5x + 5C_2 \cos 5x$.

Для знаходження C_1, C_2 отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 1 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0, \\ -2 = -5C_1 \sin 0 + 5C_2 \cos 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ 5C_2 = -2 \Rightarrow C_2 = -\dfrac{2}{5}. \end{cases}$$

Тоді $y = \cos 5x - \dfrac{2}{5}\sin 5x$ - частинний розв’язок.

Приклад 26.8. Розв’язати задачу Коші:

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \quad y(0) = -2; \quad y'(0) = -3.$$

Розв’язання. Характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 2 = 0$.

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4; \quad k_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}; \quad k_{1,2} = 1 \pm i \; (\alpha = 1, \beta = 1).$$

Загальний розв'язок $y = e^x\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right)$.

Обчислимо y':

$$y' = e^x\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right) + e^x\left(-C_1 \sin x + C_2 \cos x\right).$$

Використовуючи початкові умови, знайдемо C_1 та C_2:

$$\begin{cases} y(0) = -2, \\ y'(0) = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 = e^0\left(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0\right), \\ -3 = e^0\left(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0\right) + e^0\left(-C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C_1 = -2, \\ C_1 + C_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -2, \\ C_2 = -1. \end{cases}$$

Отже, частинний розв'язок однорідного рівняння $y = e^x\left(-2\cos x - \sin x\right)$ або $y = -e^x\left(2\cos x + \sin x\right)$.

Приклад 26.9. Знаючи корені характеристичного рівняння, записати відповідне диференціальне рівняння:

а) $k_1 = 2,\quad k_2 = 3$; б) $k_1 = k_2 = 2$; в) $k_1 = 2i,\quad k_2 = -2i$.

Розв'язання. а) За теоремою Вієта маємо $p = -\left(k_1 + k_2\right) = -5$, $q = k_1 k_2 = 6$. Отже, характеристичне рівняння має вигляд $k^2 - 5k + 6 = 0$, а відповідним диференціальним рівнянням є $y'' - 5y' + 6y = 0$.

б) Оскільки маємо двократний корінь, то характеристичне рівняння запишеться так: $(k-2)^2 = 0$ або $k^2 - 4k + 4 = 0$. Тому диференціальне рівняння матиме вигляд $y'' - 4y' + 4y = 0$.

в) У цьому випадку числа k_1 і k_2 суто уявні, тому скористаємося основною теоремою алгебри і складемо алгебраїчне рівняння за його коренями. Маємо $(k - 2i)(k + 2i) = 0$ або $k^2 + 4 = 0$ і $y'' + 4y = 0$.

Завдання для самостійної роботи

Знайти загальні та частинні розв'язки однорідних диференціальних рівнянь другого порядку:

1. $y'' + 2y' + 5y = 0;$
2. $y'' - y' - 12y = 0;$
3. $2y'' - 5y' = 0;$
4. $y'' - y' = 0;$
5. $9y'' + y' = 0;$
6. $4y'' - 4y' + y = 0,\ y(0) = 5,\ y'(0) = -1;$
7. $y'' - 7y' + 12 = 0,\ y(0) = 4,\ y'(0) = 13;$
8. $y'' + y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 0.$

ЛЕКЦІЯ 22. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛІНІЙНИХ НЕОДНОРІДНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ (ЛНДР) ДРУГОГО ПОРЯДКУ

22.1. Структура загального розв'язку ЛНДР другого порядку

Розглянемо ЛНДР другого порядку

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \tag{22.1}$$

де $a_1(x)$, $a_2(x)$, $f(x)$ - задані неперервні на $(a;b)$ функції.

Відповідним ЛОДР для рівняння (22.1) є рівняння

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0. \tag{22.2}$$

Теорема 22.1. ***(структура загального розв'язку ЛНДР)***. Загальним розв'язком y рівняння (22.1) є сума його довільного частинного розв'язку y^* та загального розв'язку $\overline{y}$ відповідного ЛОДР (22.2), тобто

$$y = \overline{y} + y^*. \tag{22.3}$$

Доведення. Спочатку переконаємось, що функція $y = \overline{y} + y^*$ взагалі є розв'язком диференціального рівняння (22.1). За умовою y^* є розв'язком ЛНДР (22.1). Таким чином, $\left(y^*\right)'' + a_1(x)\left(y^*\right)' + a_2(x)\left(y^*\right) = f(x)$. З другого боку $\overline{y}$ - розв'язок ЛОДР (22.2), тобто $\left(\overline{y}\right)'' + a_1(x)\left(\overline{y}\right)' + a_2(x)\left(\overline{y}\right) = 0$. Тоді, маємо

$$\left(y^* + \overline{y}\right)'' + a_1(x)\left(y^* + \overline{y}\right)' + a_2(x)\left(y^* + \overline{y}\right) = \left(y^*\right)'' + a_1(x)\left(y^*\right)' + a_2(x)\left(y^*\right) +$$
$$+ \left(\overline{y}\right)'' + a_1(x)\left(\overline{y}\right)' + a_2(x)\left(\overline{y}\right) = f(x) + 0 = f(x).$$

Це означає, що функція $y = \overline{y} + y^*$ є розв'язком рівняння (22.1). Треба довести, що цей розв'язок є загальним, тобто з нього можна виділити єдиний частинний розв'язок, що задовольняє початкові умови $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$.

Оскільки $\overline{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, то

$$y = \overline{y} + y^* = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y^*. \tag{22.4}$$

Похідна цієї функції матиме вигляд

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + \left(y^*\right)' \tag{22.5}$$

Підставимо початкові умови в (22.4) та (22.5). Дістанемо

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + y^*(x_0), \\ y_0' = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + y^{*\prime}(x_0). \end{cases}$$

Перепишемо цю систему наступним чином

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0 - y^*(x_0), \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0' - y^{*\prime}(x_0). \end{cases}.$$

Це система лінійних алгебраїчних рівнянь з невідомими C_1, C_2.

Визначником цієї системи є визначник Вронського

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \text{ у точці } x_0.$$

Функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є лінійно незалежними та утворюють фундаментальну систему розв'язків, тому визначник Вронського $W(x_0) \neq 0$. Отже, система має єдиний розв'язок $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$. Функція $y = C_1^0 y_1 + C_2^0 y_2 + y^*$ є частинним розв'язком ЛНДР, що задовольняє задані початкові умови.

<u>Теорема 22.2</u> (***про накладання розв'язків***). Якщо права частина ЛНДР (22.1) є сумою двох функцій $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, а $y_1^*(x)$ та $y_2^*(x)$ - частинні розв’язки рівнянь $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f_1(x)$ та $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f_2(x)$ відповідно, то функція $y^*=y_1^*+y_2^*$ буде розв’язком рівняння (22.1).

<u>Доведення.</u> Підставимо функцію $y^*=y_1^*+y_2^*$ в рівняння (22.1)

$$\left(y_1^*+y_2^*\right)''+a_1(x)\left(y_1^*+y_2^*\right)+a_2(x)\left(y_1^*+y_2^*\right)=\left[\left(y_1^*\right)''+a_1(x)\left(y_1^*\right)'+\right.$$

$$\left.+a_2(x)\left(y_1^*\right)\right]+\left[\left(y_2^*\right)''+a_1(x)\left(y_2^*\right)'+a_2(x)\left(y_2^*\right)\right]=f_1(x)+f_2(x)=f(x).$$

Теорема доведена.

22.2. Інтегрування ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами із спеціальною правою частиною

Розглянемо ЛНДР другого порядку із сталими коефіцієнтами:

$$y''+p\,y'+q\,y=f(x). \tag{22.6}$$

Як відомо з пункту 22.1 загальний розв’язок такого рівняння складається із суми загального розв’язку відповідного однорідного рівняння та будь-якого частинного розв’язку даного рівняння, тобто $y=\bar{y}+y^*$. Метод знаходження $\bar{y}$ описаний у пункті 21.2. Покажемо як визначати y^* в залежності від вигляду правої частини. (Такий спосіб називається методом невизначених коефіцієнтів)

Можливі такі випадки:

1. Нехай $f(x)=e^{ax}P_n(x)$, де $P_n(x)-$ многочлен степеня n, тобто

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}\,x^{n-1}+...+a_1x+a_0.$$

Будемо розшукувати частинний розв’язок y^* ЛНДР (22.6) у вигляді

$$y^*=x^re^{ax}Q_n(x), \tag{22.7}$$

де r- число, що дорівнює кратності a коренів характеристичного рівняння (21.7) ЛОДР другого порядку із сталими коефіцієнтами (тобто число r показує, скільки раз a є коренем рівняння $k^2+pk+q=0$). $Q_n(x)-$ многочлен степеня n з невідомими коефіцієнтами, тобто, якщо

$$n = 0 \qquad Q_n(x) = A,$$

$$n = 1 \qquad Q_n(x) = Ax + B,$$

$$n = 2 \qquad Q_n(x) = Ax^2 + Bx + C,$$

$$n = 3 \qquad Q_n(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

……………………………………………….

Іншими словами:

а) якщо $k_1 \neq a, \quad k_2 \neq a$, тоді $\quad y^* = e^{ax} Q_n(x)$,

б) якщо $k_1 \neq a, \qquad k_2 = a$, тоді $\quad y^* = x e^{ax} Q_n(x)$;

в) якщо $k_1 = k_2 = a$, тоді $\quad y^* = x^2 e^{ax} Q_n(x)$.

Для знаходження невідомих коефіцієнтів многочлена $Q_n(x)$ треба підставити функцію y^* та її похідні першого та другого порядку в вихідне рівняння, скоротити обидві частини рівняння на e^{ax} та прирівняти коефіцієнти при однакових степенях n з обох його частин. Таким чином, дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої визначимо невідомі коефіцієнти.

2. Нехай $f(x) = e^{ax}\left[P_n(x)\cos bx + R_m(x)\sin bx\right]$, де $P_n(x), R_m(x)$ – задані многочлени степенів n та m, тоді частинний розв’язок ЛДНР

$$y'' + p\,y' + q\,y = e^{ax}\left[P_n(x)\cos bx + R_m(x)\sin bx\right] \qquad (22.8)$$

будемо шукати у вигляді

$$y^* = x^r e^{ax}\left[Q_S(x)\cos bx + L_S(x)\sin bx\right], \qquad (22.9)$$

де r - число, що дорівнює кратності $a + bi$ як кореня характеристичного рівняння (21.7) ЛОДР другого порядку із сталими коефіцієнтами (тобто число r показує чи є число $a + bi$ коренем рівняння $k^2 + pk + q = 0$ чи ні). Функції $Q_S(x), \; L_S(x)$ – многочлени степеня $s = max\{n, m\}$ з невідомими коефіцієнтами. Отже,

а) якщо $k_{1,2} \neq a \pm bi$, тоді $y^* = e^{ax}\left[Q_S(x)\cos bx + L_S(x)\sin bx\right]$,

б) якщо $k_{1,2} = a \pm bi$, тоді $y^* = x e^{ax}\left[Q_S(x)\cos bx + L_S(x)\sin bx\right]$.

Зауваження 1. У цьому випадку для знаходження невідомих коефіцієнтів многочленів $Q_S(x)$ та $L_S(x)$ діємо так само, як і в попередньому випадку, але після підстановки функції (22.9) та її похідних першого і другого порядків в рівняння (22.8) прирівнюємо коефіцієнти при $\cos bx, \quad \sin bx$, внаслідок чого знов дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої визначимо невідомі коефіцієнти.

Зауваження 2. Якщо в рівнянні (22.8) одна із функцій $P_n(x)$, $R_m(x)$ тотожно дорівнює нулю, то загальний вигляд y^* не зміниться, тобто $y^* = x^r e^{ax}\left[Q_S(x)\cos bx + L_S(x)\sin bx\right]$.

Зауваження 3. Якщо права частина рівняння (22.6) буде складатися з суми двох або більше функцій, наприклад, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, де $f_1(x)$ та $f_2(x)$ – функції спеціального вигляду, то частинний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння y^* має вигляд

$$y^* = y_1^* + y_2^*,$$

де y_1^* та y_2^* – частинні розв'язки лінійних неоднорідних рівнянь $y'' + py' + qy = f_1(x)$ та $y'' + py' + qy = f_2(x)$ відповідно.

Приклад 22.1. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння $y'' - 6y' + 5y = e^{5x}\left(12x^2 - 8\right)$.

Розв'язання. Загальний розв'язок цього неоднорідного диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами складається з двох доданків $y = \bar{y} + y^*$, де $\bar{y}$ - загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, а y^* - будь-який частинний розв'язок заданого рівняння.

Характеристичне рівняння однорідного рівняння $y'' - 6y' + 5y = 0$ має вигляд $k^2 - 6k + 5 = 0$. Його корені: $k_1 = 5; \; k_2 = 1$ (Перевірити самостійно). Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд: $\bar{y} = C_1 e^{5x} + C_2 e^x$ (за таблицею 1).

Враховуючи, що $f(x) = e^{5x}\left(12x^2 - 8\right)$, тобто, $a = 5, n = 2$, а також, що $k_1 = 5 = a, \quad k_2 \neq a$ дістанемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$y* = xe^{5x}\left(Ax^2 + Bx + C\right) \quad \text{або} \quad y^* = e^{5x}\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx\right).$$

Знаходимо похідні першого та другого порядку від y^*:

$$y^{*'} = 5e^{5x}\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx\right) + e^{5x}\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right),$$

$$y^{*''} = 25e^{5x}\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx\right) + 5e^{5x}\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) +$$
$$+ 5e^{5x}\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) + e^{5x}\left(6Ax + 2B\right).$$

Підставляючи $y^*, y^{*'}, y^{*''}$ в початкове рівняння, отримаємо

$$25e^{5x}\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx\right) + 10e^{5x}\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) + e^{5x}\left(6Ax + 2B\right) -$$
$$-6\left(5e^{5x}\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx\right) + e^{5x}\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right)\right) +$$
$$+ 5e^{5x}\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx\right) = e^{5x}\left(12x^2 - 8\right).$$

Розділимо обидві частини на e^{5x} та приведемо подібні доданки

$$12Ax^2 + 8Bx + 6Ax + 4C + 2B = 12x^2 - 8.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 12A = 12 \quad \Rightarrow \quad A = 1, \\ x & 8Bx - 6A = 0, \quad \Rightarrow \quad 8B = 6A \quad \Rightarrow \quad B = \frac{3}{4}A \quad \Rightarrow \quad B = \frac{3}{4}, \\ x^0 & 4C + 2B = -8 \ \Rightarrow \ 2C = -4 - B \ \Rightarrow \ C = \frac{-4-\frac{3}{4}}{2} \Rightarrow \ C = -\frac{19}{8}. \end{array}$$

Тоді $y^* = e^{5x}\left(x^2 + \dfrac{3}{4}x - \dfrac{19}{8}\right)$ - частинний розв'язок рівняння.

Дістанемо загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння у вигляді

$$y = C_1e^{5x} + C_2e^{x} + e^{5x}\left(x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{19}{8}\right).$$

22.3. Метод Лагранжа (метод варіації довільних сталих)

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \qquad (22.10)$$

де $f(x)$ – будь-яка функція.

Розв'язок цього рівняння буде мати вигляд

$$y = C_1(x)\,y_1 + C_2(x)\,y_2, \qquad (22.11)$$

де y_1, y_2 – частинні розв'язки відповідного диференціального однорідного рівняння, які знаходимо за таблицею 1, а $C_1(x)$, $C_2(x)$ - деякі, поки що невідомі функції. Ці функції будемо розшукувати, виходячи з тієї умови, що $y = C_1(x)\,y_1 + C_2(x)\,y_2$ - загальний розв'язок вихідного рівняння, тобто, якщо підставити цей вираз у рівняння, то воно перетвориться на тотожність. Виконаємо цю процедуру. Для цього знайдемо похідні першого та другого порядку функції (22.11):

$$y' = C_1'(x)\,y_1 + C_2'(x)\,y_2 + C_1(x)\,y_1' + C_2(x)\,y_2'.$$

Підберемо функції $C_1(x),\ \ C_2(x)$ так, щоб $C_1'(x)\,y_1 + C_2'(x)\,y_2 = 0$. Тоді

$$y'' = C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2' + C_1(x)\,y_1'' + C_2(x)\,y_2''.$$

Підставимо $y,\ y',\ y''$ в рівняння (22.10). Дістанемо:

$$C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2' + C_1(x)\,y_1'' + C_2(x)\,y_2'' + a_1(x)\big(C_1(x)\,y_1' + C_2(x)\,y_2'\big) +$$
$$+ a_2(x)\big(C_1(x)\,y_1 + C_2(x)\,y_2\big) = f(x) \text{ або}$$

$$C_1(x)\left[\,y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1\right] + C_2(x)\left[\,y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2\right] +$$
$$+ C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2' = f(x).$$

В останньому рівнянні вирази, що знаходяться у квадратних дужках тотожно дорівнюють нулю, оскільки функції y_1, y_2 − розв'язки однорідного рівняння $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$. Тоді маємо

$$C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2' = f(x).$$

Таким чином, функція $y = C_1(x)\,y_1 + C_2(x)\,y_2$ буде розв'язком рівняння (22.10), якщо $C_1(x),\ \ C_2(x)$ задовольняють системі лінійних алгебраїчних рівнянь відносно функцій $C_1'(x),\ \ C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)\,y_1 + C_2'(x)\,y_2 = 0, \\ C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2' = f(x). \end{cases} \qquad (22.12)$$

Визначник цієї системи $\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$ є визначником Вронського для функцій $y_1(x),\ y_2(x)$, що утворюють фундаментальну систему розв'язків ЛОДР (21.3). Значить, система (22.12) має єдиний розв'язок $C_1'(x) = \varphi_1(x),\ \ C_2'(x) = \varphi_2(x)$, звідки $C_1(x)$ та $C_2(x)$ знаходяться простим інтегруванням.

Приклад 22.2 . Розв'язати рівняння:

$$y''+5y'+6y=\frac{1}{1+e^{3x}}$$

Розв'язання. Частинні розв'язки відповідного однорідного рівняння $y''+5y'+6y=0$ з характеристичним рівнянням $k^2+5k+6=0$ $(k_1=-3,\,k_2=-2)$ мають вигляд $y_1=e^{-3x}$; $y_2=e^{-2x}$.

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння отримаємо у вигляді $y=C_1(x)e^{-3x}+C_2(x)e^{-2x}$, де невідомі функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$ задовольняють системі алгебраїчних лінійних рівнянь відносно $C_1'(x)$ та $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'e^{-3x}+C_2'e^{-2x}=0, \\ -3C_1'e^{-3x}-2C_2'e^{-2x}=\dfrac{1}{1+e^{3x}}. \end{cases}$$

Цю систему розв'яжемо за формулами Крамера

$$\Delta=\begin{vmatrix} e^{-3x} & e^{-2x} \\ -3e^{3x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix}=-2e^{-5x}+3e^{-5x}=e^{-5x}.$$

$$\Delta_{C_1'}=\begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ \frac{1}{1+e^{3x}} & -2e^{-2x} \end{vmatrix}=-\frac{e^{-2x}}{1+e^{3x}},$$

$$\Delta_{C_2'}=\begin{vmatrix} e^{-3x} & 0 \\ -3e^{-3x} & \frac{1}{1+e^{3x}} \end{vmatrix}=\frac{e^{-3x}}{1+e^{3x}}.$$

Отже, $C_1'=\dfrac{\Delta_{C_1'}}{\Delta}=-\dfrac{e^{3x}}{1+e^{3x}}$; $\quad C_2'=\dfrac{\Delta_{C_2'}}{\Delta}=\dfrac{e^{2x}}{1+e^{3x}}$.

Проінтегруємо останні два рівняння:

$$C_1=\int-\frac{e^{3x}dx}{1+e^{3x}}=\begin{vmatrix} t=1+e^{3x} \\ dt=3e^{3x}dx \end{vmatrix}=-\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}=-\frac{1}{3}ln|t|+C_1^*=-\frac{1}{3}ln\left|1+e^{3x}\right|+C_1^*.$$

$$C_2=\int\frac{e^{2x}dx}{1+e^{3x}}=\begin{vmatrix} e^x=t \\ e^xdx=dt \end{vmatrix}=\int\frac{tdt}{1+t^3}.$$

Маємо під знаком інтеграла правильний раціональний дріб, який розкладемо на простіші:

$$\frac{t}{t^3+1}=\frac{t}{(t+1)\left(t^2-t+1\right)}=\frac{A}{t+1}+\frac{Bt+C}{t^2-t+1}=\frac{A\left(t^2-t+1\right)+(Bt+C)(t+1)}{(t+1)\left(t^2-t+1\right)}.$$

Звідки, дістанемо:

$$t=A\left(t^2-t+1\right)+Bt\,(t+1)+C\,(t+1).$$

$$\begin{array}{r|l} t=-1 & \qquad -1=3A, \quad\Rightarrow\quad A=-1/3, \\ t^2 & \qquad 0=A+B, \quad\Rightarrow\quad B=1/3, \\ t & 1=-A+B+C \quad \Rightarrow C=1+A-B=1-1/3-1/3=1/3. \end{array}$$

Отже, $C_2=\int\left(\frac{-1/3}{t+1}+\frac{1/3\,t+1/3}{t^2-t+1}\right)\,dt=1/3\left[\int\frac{-dt}{t+1}+\int\frac{(t+1)\,dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right].$

Обчислимо окремо інтеграли:

$$\int\frac{t+1}{(t-1/2)^2+\dfrac{3}{4}}\,dt=\left|\begin{array}{l} t-1/2=z \\ t=z+1/2 \\ dz=dt \end{array}\right|=\int\frac{z+1/2+1}{z^2+3/4}\,dz=\int\frac{z\,dz}{z^2+\frac{3}{4}}+\frac{3}{2}\int\frac{dz}{z^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l} z^2+\frac{3}{4}=w \\ dw=2z\,dz \end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{dw}{w}+\frac{3}{2}\int\frac{dt}{z^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}ln|\,w\,|+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot arctg\frac{2z}{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{1}{2}ln\left|(t-1/2)^2+\frac{3}{4}\right|+\sqrt{3}\,arctg\frac{2(t-1/2)}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}ln\left|\,t^2-t+1\,\right|+\sqrt{3}\,arctg\frac{2t-1/2}{\sqrt{3}},$$

$$C_2=-\frac{1}{3}ln\left|\,e^x+1\,\right|+\frac{1}{6}ln\left|\,e^{2x}-e^x+1\,\right|+\frac{\sqrt{3}}{3}arctg\frac{2e^x-1}{\sqrt{3}}+C_1^*.$$

Загальний розв’язок лінійного неоднорідного рівняння дістанемо у вигляді

$$y=\left(-\frac{1}{3}ln\left|1+e^{3x}\right|+C_1^*\right)e^{-2x}+\left(-\frac{1}{3}ln\left|e^x+1\right|+\frac{1}{6}ln\left|\,e^{2x}-e^x+1\,\right|+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{3}}{3}arctg\frac{2e^x-1}{\sqrt{3}}+C_1^*\right)e^{-3x}.$$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 27. РОЗВЯЗАННЯ ЛІНІЙНИХ НЕОДНОРІДНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ. МЕТОД НЕВИЗНАЧЕНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ.

Розглянемо ЛНДР другого порядку із сталими коефіцієнтами:

$$y'' + p\,y' + q\,y = f(x)$$

де права частина рівняння може мати один з двох виглядів:

1) $f(x) = e^{ax} P_n(x)$, де $P_n(x)-$ многочлен степеня n, тобто

$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ або

2) $f(x) = e^{ax}\left[P_n(x)\cos bx + R_m(x)\sin bx\right]$, де $P_n(x), R_m(x)$ – задані многочлени степенів n та m

Тоді загальний розв'язок цього рівняння набуває вигляду

$$y = \bar{y} + y^*,$$

де $\bar{y} -$ загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння,

$y^* -$ частинний розв'язок неоднорідного рівняння, який залежить від функції $f(x)$ та коренів k_1, k_2 характеристичного рівняння $k^2 + pk + q = 0$.

Розв'язок $\bar{y} -$ знаходиться за таблицею 1 (див. лекцію 21.3), а

$y^* -$ за наступними формулами :

1) $y^* = x^r e^{ax} Q_n(x)$,

де r - число, яке показує скільки разів a є коренем рівняння $k^2 + pk + q = 0$; $Q_n(x) -$ многочлен степеня n з невідомими коефіцієнтами;

2) $y^* = x^r e^{ax}\left[Q_S(x)\cos bx + L_S(x)\sin bx\right]$,

де r - число, що показує чи є число $a + bi$ коренем рівняння $k^2 + pk + q = 0$ ($r = 1$) чи ні ($r = 0$). Функції $Q_S(x),\ L_S(x)$ – многочлени степеня $s = max\{n, m\}$ з невідомими коефіцієнтами.

Приклад 27.1. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$y'' - y' - 6y = e^{2x}(4x - 6)$.

Розв'язання. Загальний розв'язок рівняння має вигляд $y = \bar{y} + y^*$, де

$\bar{y}-$ загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y''-y'-6y=0$. Характеристичне рівняння $k^2-k-6=0$ має корені $k_1=3;\quad k_2=-2$. Отже $\bar{y}=C_1e^{3x}+C_2e^{-2x}$.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння залежить від вигляду правої частини $f(x)=e^{2x}(4x-6)$ (маємо $a=2;\quad n=1;\quad k_1=3;\quad k_2=-2$).

Тоді $y^*=e^{2x}(Ax+B)$. Для визначення невідомих коефіцієнтів A та B підставимо y^* в початкове рівняння. Щоб це було можливим, знайдемо першу і другу похідні від частинного розв'язку y^*:

$$y^{*'}=2e^{2x}(Ax+B)+e^{2x}\cdot A,$$
$$y^{*''}=4e^{2x}(Ax+B)+2e^{2x}A+2e^{2x}A=4e^{2x}(Ax+B)+4e^{2x}A.$$

Після підстановки $y^*, y^{*'}, y^{*''}$ в початкове рівняння отримаємо

$$4e^{2x}(Ax+B)+4e^{2x}A-\left(2e^{2x}(Ax+B)+e^{2x}A\right)-6e^{2x}(Ax+B)=e^{2x}(4x-6).$$

Розділимо рівняння на e^{2x} та приведемо подібні доданки. Маємо:

$-4A+3A-4B=4x-6$.

Прирівняємо коефіцієнти при x в однакових степенях:

$$\begin{array}{c|l} x & -4A=4 \qquad \Rightarrow \quad A=-1, \\ x^0 & 3A-4B=-6 \quad \Rightarrow \quad 4B=3A+6 \quad \Rightarrow \quad B=\dfrac{3}{4}. \end{array}$$

Тобто, $y^*=e^{2x}\left(-x+\dfrac{3}{4}\right)$.

Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{3x}+e^{2x}\left(-x+\frac{3}{4}\right).$$

Приклад 27.2. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$y''+6y'+9y=3\,e^{-3x}$.

Розв'язання. Аналогічно попередньому, маємо $y=\bar{y}+y^*$.

Характеристичне рівняння $k^2+6k+9=0$ має однакові корені $k_{1,2}=-3$. Отже, $\bar{y}=e^{-3x}(C_1+C_2x)$.

$f(x)=3e^{-3x}$, тобто, $a=-3;\quad n=0;\quad k_{1,2}=-3=a$. Частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння буде мати вигляд

$$y^*=Ax^2e^{-3x},$$

$$y^{*'}=2Axe^{-3x}-3Ax^2e^{-3x},$$

$$y^{*''}=2Ae^{-3x}-6Axe^{-3x}-6Axe^{-3x}+9Ax^2e^{-3x},$$ або

$$y^{*''}=2Ae^{-3x}-12Axe^{-3x}+9Ax^2e^{-3x}.$$

Після підстановки цих виразів в початкове рівняння, дістанемо

$$2Ae^{-3x}-12Axe^{-3x}+9Ax^2+6\left(2Axe^{-3x}-3Ax^2e^{-3x}\right)+9Ax^2e^{-3x}=3e^{-3x},$$

або

$$2A=3\quad\Rightarrow\quad A=\frac{3}{2}.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння буде:

$$y^*=\frac{3}{2}x^2e^{-3x},$$

а загальний: $y=e^{-3x}\left(C_1+C_2x-\frac{3}{2}x^2\right)$.

Приклад 27.3. Знайти загальний розв'язок рівняння:
$y''-5y'=4\cos 2x+8\sin 2x$.

Розв'язання. Маємо: $k^2-5k=0\quad\Rightarrow\quad k(k-5)=0\quad\Rightarrow\quad k_1=0;\quad k_2=5$.

$$y^*=A\cos 2x+B\sin 2x,$$

$$y^{*'}=-2A\sin 2x+2B\cos 2x,$$

$$y^{*''}=-4A\cos 2x-4B\sin 2x.$$

Отримаємо:

$$-4A\cos 2x-4B\sin 2x-5\left(-2A\sin 2x+2B\cos 2x\right)=4\cos 2x+8\sin 2x.$$

Порівняємо коефіцієнти при $\cos 2x$ та $\sin 2x$ в обох частинах останнього рівняння:

$$\begin{array}{r|l} \cos 2x & -4A-10B=4, \\ \sin 2x & -4B+10A=8. \end{array}$$

Дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2A+5B=-2, \\ 5A-2B=4. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему рівнянь за формулами Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -4-25=-29.$$

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 4-20=-16; \qquad \Delta_B = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8+20=28.$$

$$A=\frac{\Delta_A}{\Delta}=\frac{16}{29}; \qquad B=-\frac{28}{29}.$$

Отже: $y^*=\frac{16}{29}\cos 2x-\frac{28}{29}\sin 2x$, а

$y=\bar{y}+y^*=C_1+C_2e^{5x}+\frac{16}{29}\cos 2x-\frac{28}{29}\sin 2x$ – загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння.

Приклад 27.4. Знайти загальний розв'язок рівняння:
$y''-8y'+25y=26e^{4x}\cos 3x$.

Розв'язання. Маємо:
$y''-8y'+25y=0 \quad \Rightarrow \quad k^2-8k+25=0; \quad D=64-100=-36$.

$k_{1,2}=4\pm 3i$, де $i=\sqrt{-1}$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння $\bar{y}=e^{4x}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x\right)$.

Частинний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння шукатимемо у вигляді $\left(a=4; \quad b=3; \quad k_{1,2}=a\pm ib\right)$:

$$y^*=xe^{4x}\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right),$$

$$y^{*'}=4e^{4x}\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right)x+e^{4x}\left(-3A\sin 3x+3B\cos 3x\right)x+$$
$$+e^{4x}\left(A\cos 3x+3\sin 3x\right),$$

$$y^{*''}=16e^{4x}\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right)\cdot x+4e^{4x}\left(-3A\sin 3x+3B\cos 3x\right)\cdot x+$$
$$+4e^{4x}\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right)+4e^{4x}\left(-3A\sin 3x+3B\cos 3x\right)\cdot x+$$
$$+e^{4x}\left(-9A\cos 3x-9B\sin 3x\right)\cdot x+e^{4x}\left(3A\sin 3x+3B\cos 3x\right)+$$

$$+e^{4x}\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right)=16e^{4x}\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right)\cdot x+$$
$$+8e^{4x}\left(-3A\sin 3x+3B\cos 3x\right)x+4e^{4x}\left(-3A\sin 3x+3B\cos 3x\right)\cdot x+$$
$$+e^{4x}\left(-9A\cos 3x-9B\sin 3x\right)\cdot x+2e^{4x}\left(-3A\sin 3x+3B\cos 3x\right)+$$
$$+4e^{4x}\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right).$$

Підставимо $y^*, y^{*'}$ та $y^{*''}$ в початкове рівняння та отримаємо:

$$16e^{4x}\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right)\cdot x+8e^{4x}\left(-3A\sin 3x+3B\cos 3x\right)\cdot x+$$
$$+e^{4x}\left(-9A\cos 3x-9B\sin 3x\right)\cdot x+2e^{4x}\left(-3A\sin 3x+3B\cos 3x\right)+$$
$$+4e^{4x}\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right)-8\Big[4e^{4x}\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right)\cdot x+$$
$$+e^{4x}\left(-3A\sin 3x+3B\cos 3x\right)\cdot x+e^{4x}\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right)\Big]+$$
$$+25e^{4x}\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right)\cdot x=26e^{4x}\cos 3x.$$

Після низки арифметичних перетворень останнє рівняння набуває вигляду

$$6B\cos 3x-4\cos 3x-4B\sin 3x-6A\sin 3x=26\cos 3x.$$

Порівняємо коефіцієнти при $\cos 3x$ та $\sin 3x$:

$$\begin{array}{l|l} \cos 3x & 6B-4A=26, \\ \sin 3x & -4B-6A=0. \end{array}$$

Отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} -2A+3B=13, \\ -3A-2B=0, \end{cases}$$

яку розв'яжемо за формулами Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=4+9=13,$$

$$\Delta_A=\begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=-26, \qquad \Delta_B=\begin{vmatrix} -1 & 13 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}=39.$$

Тоді

$$A=\frac{\Delta_A}{\Delta}=-2; \qquad B=\frac{\Delta_B}{\Delta}=-3.$$

Отже, маємо $y^*=x\,e^{4x}\left(-2\cos 3x-3\sin 3x\right)$.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння дістанемо у вигляді

$$y=e^{4x}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x\right)+x\cdot e^{4x}\left(-2\cos 3x-3\sin 3x\right).$$

Приклад 27.5. Знайти загальний розв'язок рівняння:
$y''+9y=4\cos 3x+2\sin 3x$.

Розв'язання. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y''+9y=0$ має вигляд $\bar{y}=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$. Оскільки $f(x)=4\cos 3x+2\sin 3x$, тобто $a=0;\quad b=3;\quad k_{1,2}=\pm 3i=a\pm bi$, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння буде:

$$y^*=x(A\cos 3x+B\sin 3x),$$

$$y^{*\prime}=A\cos 3x+B\sin 3x+x(-3A\sin 3x+3B\cos 3x),$$

$$y^{*\prime\prime}=-3A\sin 3x+3B\cos 3x-3A\sin 3x+3B\cos 3x+x(-9A\cos 3x-9B\sin 3x)=$$
$$=-6A\sin 3x+6B\cos 3x+x(-9A\cos 3x-9B\sin 3x).$$

Дістанемо:

$$-6A\sin 3x+6B\cos 3x+x(-9A\cos 3x-9B\sin 3x)+9x(A\cos 3x-B\sin 3x)=$$
$$=4\cos 3x+2\sin 3x\ ,$$

Звідки, $A=-1/3;\quad B=2/3$. Отже $y^*=x\left(-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{2}{3}\sin 3x\right)$.

Загальним розв'язком лінійного неоднорідного рівняння буде функція

$$y=\bar{y}+y^*=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+x\left(-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{2}{3}\sin 3x\right).$$

Приклад 27.6. Знайти загальний розв'язок рівняння**:**
$y''-10y'=30x^2+200\sin 10x$.

Розв'язання. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y''-10y'=0$ має вигляд $\bar{y}=C_1+C_2e^{10x}$.

Права частина початкового рівняння складається з двох доданків: $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, де $f_1(x)=30x^2;\quad f_2(x)=200\sin 10x$. Тому, частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння теж складається з двох доданків: $y^*=y_1^*+y_2^*$, де y_1^* та y_2^* є частинними розв'язками рівнянь $y''-10y'=30x^2$ та $y''-10y'=200\sin 10x$ відповідно.

Аналогічно попередньому, маємо:

$$y_1^*=x(Ax^2+Bx+C)=Ax^3+Bx^2+Cx,$$

$$y_1^{*'} = 3Ax^2 + 2Bx + C,$$

$$y_1^{*''} = 6Ax + 2B.$$

Отримаємо:

$$6Ax + 2B - 10\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) = 30x^2,$$ або

$$-30Ax^2 + (6A - 20B)x + 2B - 10C = 30x^2.$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & -30A = 30, \ \Rightarrow A = -1, \\ x & 6A - 20B = 0, \ \Rightarrow 20B = 6A, \ \Rightarrow B = \frac{3}{10}, \\ x^0 & 2B - 10C = 0, \ \Rightarrow C = \frac{6}{100}. \end{array}$$

Отже, $y_1^* = -x^3 + 0{,}3x^2 + 0{,}06x$.

$$y_2^* = A\cos 10x + B\sin 10x,$$

$$y_2^{*'} = -10A\sin 10x + 10B\cos 10x,$$

$$y_2^{*''} = -100A\cos 10x - 100B\sin 10x.$$

Тоді,

$$-100A\cos 10x - 100B\sin 10x - 10\left(-10A\sin 10x + 10B\cos 10x\right) = 200\sin 10x.$$

$$\begin{array}{c|lll} \cos 10x & -100A - 100B = 0, & \Rightarrow & A + B = 0, \\ \sin 10x & -100B + 100A = 200, & & A - B = 2. \end{array}$$

Звідки, $A = 1; \quad B = -1$. Отже, $y_2^* = \cos 10x - \sin 10x$.

Загальний розв’язок початкового лінійного неоднорідного рівняння дістанемо у вигляді

$$y = C_1 + C_2e^{10x} - x^3 + 0{,}06x + \cos 10x - \sin 10x.$$

Приклад 27.7. Розв’язати задачу Коші:

$$y'' - y' - 2y = e^{4x}(10x + 7), \quad y(0) = 3; \quad y'(0) = 0.$$

Розв’язання. Аналогічно попередньому маємо:

$$y'' - y' - 2y = 0,$$

$$k^2 - k - 2 = 0, \quad \Rightarrow \quad k_1 = 2; \quad k_2 = -1.$$

Отже, загальний розв’язок однорідного рівняння буде

$$\bar{y} = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}.$$

$$f(x) = e^{4x}(10x + 7).$$

$$a=4;\quad n=1,\quad k_1=2;\quad k_2=-1\quad\Rightarrow\quad y^*=e^{4x}\left(Ax+B\right),$$

$$y^{*\prime}=4e^{4x}\left(Ax+B\right)+e^{4x}\cdot A,$$

$$y^{*\prime\prime}=16e^{4x}\left(Ax+B\right)+4e^{4x}\cdot A+4e^{4x}\cdot A=16e^{4x}\left(Ax+B\right)+8e^{4x}A.$$

Підставимо $y^*, y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$ в початкове рівняння:

$$16e^{4x}\left(Ax+B\right)+8e^{4x}A-\left(4e^{4x}\left(Ax+B\right)+e^{4x}A\right)-2e^{4x}\left(Ax+B\right)=e^{4x}\left(10x+7\right),$$

або

$$16(Ax+B)+8A-4(Ax+B)-A-2(Ax+B)=10x+7.$$

$$\begin{array}{c|l} x & 16A-4A-2A=10\quad\Rightarrow\quad A=1, \\ x^0 & 16B+8A-4B-A-2B=7\quad\Rightarrow\quad 7A-10B=7\quad\Rightarrow\quad B=0. \end{array}$$

Частинний розв'язок диференціального рівняння має вигляд $y^*=xe^{4x}$, а загальний розв'язок - $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}+xe^{4x}$.

Використаємо початкові умови, для цього знайдемо y':

$$y'=2C_1e^{2x}-C_2e^{-x}+e^{4x}+4xe^{4x}.$$

Маємо:

$$\begin{cases}3=C_1e^0+C_2e^0+0,\\0=2C_1-C_2+e^0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1+C_2=3,\\2C_1-C_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3C_1=3,\\C_1-C_2=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=1,\\C_2=2.\end{cases}$$

Отже, дістанемо розв'язок задачі Коші:

$$y=e^{2x}+2e^{-x}+xe^{4x}.$$

Приклад 27.8. Розв'язати задачу Коші:

$$y''-10y'+25y=\left(-100x+30\right)e^{-5x}+4\cos 5x,\qquad y(0)=-1{,}9;\qquad y'(0)=-1{,}1.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння відповідного однорідного диференціального рівняння має два рівні корені $k_{1,2}=5$. Отже, $\bar{y}=e^{5x}\left(C_1+C_2x\right)$. Оскільки права частина складається з суми двох різних функцій $f_1(x)=\left(-100x+30\right)e^{-5x}$, $f_2(x)=4\cos 5x$, то кожній з них будуть відповідати окремі частинні розв'язки y_1^* та y_2^*, а $y^*=y_1^*+y_2^*$.

$$y_1^*=e^{-5x}\left(Ax+B\right),$$

$$y_1^{*\prime}=-5e^{-5x}\left(Ax+B\right)+e^{-5x}\cdot A,$$

$$y_1^{*''} = 25e^{-5x}\left(Ax+B\right) - 5e^{-5x}\cdot A - 5e^{-5x}\cdot A = 25e^{-5x}\left(Ax+B\right) - 10e^{-5x}\cdot A.$$

Підставимо $y_1^*, y_1^{*'}, y_1^{*''}$ в рівняння $y'' - 10y' + 25y = \left(-100x+30\right)e^{-5x}$. Маємо:

$$25e^{-5x}\left(Ax+B\right) - 10e^{-5x}\cdot A - 10\left(-5e^{-5x}\left(Ax+B\right) + e^{-5x}\cdot A\right) + 25e^{-5x}\left(Ax+B\right) =$$
$$= \left(-100x+30\right)e^{-5x}.$$

Розділимо обидві частини рівняння на e^{-5x}:

$$25\left(Ax+B\right) - 10A - 10\left(-5\left(Ax+B\right) + A\right) + 25\left(Ax+B\right) = \left(-100x+30\right).$$

Прирівняємо коефіцієнти при x в однакових степенях:

$$\begin{array}{c|l} x & 25A + 50A + 25A = -100 \quad \Rightarrow \quad A = -1, \\ x^0 & 25B - 10A + 50B - 10A + 25B = 30 \quad \Rightarrow \quad -20A + 100B = 30 \quad \Rightarrow \quad B = 0{,}1. \end{array}$$

Дістанемо $y_1^* = e^{-5x}\left(-x+0{,}1\right)$.

$$y_2^* = A\cos 5x + B\sin 5x,$$
$$y_2^{*'} = -5A\sin 5x + 5B\cos 5x,$$
$$y_2^{*''} = -25A\cos 5x - 25B\sin x.$$

Підставимо $y_2^*, y_2^{*'}, y_2^{*''}$ в рівняння $y'' - 10y' + 25y = 4\cos 5x,$ отримаємо:

$$-25A\cos 5x - 25B\sin 5x - 10\left(-5A\sin 5x + 5B\cos 5x\right) + 25\left(A\cos 5x + B\sin 5x\right) =$$
$$= 4\cos 5x.$$

$$\begin{array}{c|l} \cos 5x & -50B = 4 \quad \Rightarrow \quad B = -0{,}08, \\ \sin 5x & 50A = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0. \end{array}$$

Дістанемо $y_2^* = -0{,}08\sin 5x$. Підсумовуючи результати, маємо:

$$y^* = y_1^* + y_2^* = e^{-5x}\left(-x+0{,}1\right) - 0{,}08\sin 5x.$$

Отже, загальний розв’язок вихідного рівняння буде:

$$y = e^{5x}\left(C_1 + C_2x\right) + e^{-5x}\left(-x+0{,}1\right) - 0{,}08\sin 5x.$$

Щоб знайти розв’язок задачи Коші, знайдемо похідну від загального розв’язку рівняння

$$y' = 5e^{5x}\left(C_1 + C_2x\right) + e^{5x}C_2 - 5e^{-5x}\left(-x+0{,}1\right) - e^{-5x} - 0{,}4\cos 5x.$$

Використаємо початкові умови: $y(0) = -1{,}9;\qquad y'(0) = -1.$

$$\begin{cases} -1{,}9 = e^0(C_1 + C_2 \cdot 0) + e^0(0{,}1) - 0{,}08\sin 0, \\ -1 = 5e^0(C_1 + C_2 \cdot 0) + e^0 C_2 - 5e^0(0{,}1) - e^0 - 0{,}4\cos 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1{,}9 = C_1 + 0{,}1, \\ -1 = 5C_1 + C_2 - 0{,}5 - 1 - 0{,}4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -2, \\ C_2 = 10{,}9. \end{cases}$$

Отримали розв'язок задачи Коші

$y = e^{5x}(-2 - 10{,}9x) + e^{-5x}(-x + 0{,}1) - 0{,}08\sin 5x$.

Завдання для самостійної роботи

Знайти частинний та загальний розв'язки диференціальних рівнянь:

1) $y'' + 7y' + 10y = 5x^2 + 1$;

2) $y'' + 4y = 4e^{2x}$;

3) $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$;

4) $y'' + 9y = 3x^2 + 2x + 5$;

5) $y'' - 7y' + 6y = 3\cos 2x, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 3$;

6) $y'' - 4y = e^{2x}(12x + 15), \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -6$;

7) $y'' + 5y' = e^{-5x}(2x + 3)$;

8) $y'' - y' = 2\cos x - \sin x$;

9) $y'' - 5y' = 4x^2 - 2x + 2\sin 2x$;

10) $y'' - 4y = e^{2x}\cos x$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 28. РОЗВЯЗАННЯ ЛІНІЙНИХ НЕОДНОРІДНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ. МЕТОД ЛАГРАНЖА.

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

де $f(x)$ – будь-яка функція.

Розв'язок цього рівняння буде мати вигляд

$$y = C_1(x)\, y_1 + C_2(x)\, y_2,$$

де y_1, y_2 – частинні розв'язки відповідного диференціального однорідного рівняння, які знаходимо за таблицею 1 (лекція 21, пункт 21.2), $C_1(x)$, $C_2(x)$ – функції, які є розв'язком системи рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x)\, y_1 + C_2'(x)\, y_2 = 0, \\ C_1'(x)\, y_1' + C_2'(x)\, y_2' = f(x). \end{cases}$$

Приклад 28.1. Розв'язати рівняння: $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

Розв'язання. Знайдемо розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$y'' + y = 0, \;\Rightarrow\; k^2 + 1 = 0, \;\Rightarrow\; k^2 = -1, \;\Rightarrow\; k = \pm i, \;\Rightarrow$

$\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$

$y_1 = \cos x, \qquad y_2 = \sin x,$

$y_1' = -\sin x, \qquad y_2' = \cos x.$

Загальний розв'язок початкового рівняння буде мати той же вигляд, що і загальний розв'язок однорідного рівняння, але C_1 та C_2 – не довільні сталі, а деякі функції, які знайдемо із системи рівнянь:

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2'(x) \sin x = 0, \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$$\Delta_{C_1'} = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -tgx; \qquad \Delta_{C_2'} = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1.$$

Тоді, $C_1' = \dfrac{\Delta_{C_1'}}{\Delta} = -tgx;$ $\qquad C_2' = \dfrac{\Delta_{C_2'}}{\Delta} = 1.$

Дістанемо функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$:

$C_1(x) = \int -tgx\, dx = \ln|\cos x| + C_1^*,$

$C_2(x) = \int dx = x + C_2^*.$

Отже, загальний розв'язок рівняння отримаємо у вигляді

$y = \left(\ln|\cos x| + C_1^*\right)\cos x + \left(x + C_2^*\right)\sin x.$

Приклад 28.2. Розв'язати рівняння:

$$y'' + y' = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 + k = 0$ відповідного однорідного диференціального рівняння має корені $k_1 = 0;\quad k_2 = -1$, тому частинні розв'язки однорідного рівняння

$y_1 = 1;\quad y_2 = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad y_1' = 0;\quad y_2' = -e^{-x}$.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді $y = C_1(x) + C_2(x)e^{-x}$.

Для знаходження невідомих функцій $C_1(x)$ та $C_2(x)$ складемо систему:

$$\begin{cases} C_1' + C_2' e^{-x} = 0, \\ \quad -C_2' e^{-x} = \dfrac{e^x}{e^x + 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = C_2' e^{-x}, \\ C_2' = \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = \dfrac{e^x}{e^x + 1}, \\ C_2' = \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1}. \end{cases}$$

Проінтегруємо кожне з отриманих рівнянь:

$$C_1 = \int \frac{e^x dx}{e^x + 1} = \left| \begin{matrix} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t+1} = ln|t+1| + C_1^* = ln\left|e^x + 1\right| + C_1^*;$$

$$C_2 = \int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} = \left| \begin{matrix} e^x + 1 = t \\ e^x = t - 1 \\ dt = e^x dx \end{matrix} \right| = \int \frac{t-1}{t} dt = \int \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt = t - ln|t| + C_2^* =$$

$$= e^x + 1 - ln\left|e^x + 1\right| + C_2^*.$$

Дістанемо загальний розв'язок початкового рівняння

$$y = ln\left|e^x + 1\right| + C_1^* + \left(e^x + 1 - ln\left|e^x + 1\right| + C_2^*\right) e^{-x}.$$

Приклад 28.3. Розв'язати рівняння: $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\, ln\, x.$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 + 4k + 4 = 0$ відповідного однорідного диференціального рівняння має корені $k_{1,2} = -2$,

тому частинні розв'язки однорідного рівняння

$y_1 = e^{-2x};\quad y_2 = xe^{-2x} \quad \Rightarrow \quad y_1' = -2e^{-2x};\quad y_2' = e^{-2x} - 2xe^{-2x}.$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді $y = \left(C_1(x) + xC_2(x)\right)e^{-2x}$.

Для знаходження невідомих функцій $C_1(x)$ та $C_2(x)$ складемо систему:

$$\begin{cases} C_1' e^{-2x} + C_2' x e^{-2x} = 0, \\ -2C_1' e^{-2x} + C_2' e^{-2x}(1-2x) = e^{-2x}\, ln\, x. \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} C_1' + C_2' x = 0, \\ -2C_1' + C_2'(1-2x) = ln\, x. \end{cases}$$

Цю систему розв'яжемо за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x \\ -2 & 1-2x \end{vmatrix} = 1 - 2x + 2x = 1.$$

$$\Delta_{C_1'} = \begin{vmatrix} 0 & x \\ ln\, x & 1-2x \end{vmatrix} = -x\, ln\, x,$$

$$\Delta_{C_2'} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & ln\, x \end{vmatrix} = ln\, x.$$

Отже, $C_1' = \dfrac{\Delta_{C_1'}}{\Delta} = -x\, ln\, x;$ $\qquad C_2' = \dfrac{\Delta_{C_2'}}{\Delta} = ln\, x$.

Проінтегруємо кожне з отриманих рівнянь:

$$C_1 = \int -x\, ln\, x\, dx = \left| \begin{array}{ll} \text{За методом інтегрування} & \\ \text{частинами маємо} & \\ u = ln\, x, & du = \dfrac{dx}{x}, \\ dv = x\, dx, & v = \dfrac{x^2}{2}, \end{array} \right| =$$

$$= -ln\, x \cdot \frac{x^2}{2} + \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} = -ln\, x \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\int x dx \quad \Rightarrow$$

$$C_1 = -\frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} + C_1^*$$

$$C_2 = \int C_2' \, dx = \int \ln x dx = \left| \begin{array}{l} \textit{За методом інтегрування} \\ \textit{частинами маємо} \\ u = \ln x, \qquad du = \dfrac{dx}{x}, \\ dv = dx, \qquad v = x, \end{array} \right| =$$

$$= \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = \ln x \cdot x - \int dx = x \ln x - x + C_2^* .$$

Отже, загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = e^{-2x} \left(-\frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} + C_1^* \right) + x e^{-2x} \left(x \ln x - x + C_2^* \right).$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

1) $y'' + 4y = \dfrac{10}{\sin 2x}$

2) $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^2}$

3) $y'' + 7y' + 12y = \dfrac{1}{1 + e^{4x}}$

ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик В. П. Вища математика : навч. посібник / В. П. Дубовик, І.І. Юрик. – К. : Видавництво А.С.К., 2009. – 648 с.
2. Дубовик В. П. Вища математика : збірник задач : навч. посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : Видавництво А.С.К., 2003. – 480 с.
3. Овчинников П. П. та ін. Вища математика : підручник / П. П. Овчинников та ін. – К. : Техніка, 2003. – Ч. 2. – 600 с.
4. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-Пресс, 2000. – Ч. 2. – 252 с.

Навчальне видання

Копорулін Володимир Львович
Щербина Ірина Володимирівна
Пасічник Ірина Володимирівна
Бас Тетяна Петрівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 6

Навчальний посібник

Тем. план 2016, поз.

Підписано до друку . Формат 60x84 1/16. Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид. арк. Умов. друк. арк. Тираж 100 пр. Замовлення №

Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпро-5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ