МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

Т.М.КАДИЛЬНИКОВА, І.Л.ШИНКОВСЬКА, І.П.ЗАЄЦЬ,
О.Є.ЗАПОРОЖЧЕНКО

ВИЩА МАТЕМАТИКА В ПРИКЛАДАХ ТА ЗАДАЧАХ

Частина II

Дніпропетровськ НМетАУ 2010

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

Т.М.КАДИЛЬНИКОВА, І.Л.ШИНКОВСЬКА, І.П.ЗАЄЦЬ, О.Є.ЗАПОРОЖЧЕНКО

ВИЩА МАТЕМАТИКА
В ПРИКЛАДАХ ТА ЗАДАЧАХ

Частина ІІ

**Затверджено на засіданні Вченої Ради академії
як навчальний посібник**

Дніпропетровськ НМетАУ 2010

УДК 517(07)
Кадильникова Т.М.,.Шинковська І.Л,.Заєць І.П, Запорожченко О.Є. Вища математика в прикладах та задачах. Частина ІІ. : Навч. посібник.- Дніпропетровськ: НМетАУ, 2010.- 91 с.

Наведені докладні рекомендації до вивчення дисципліни «Вища математика». Теоретичні положення супроводжуються необхідними поясненнями та ілюстраціями, а також розв'язуванням типових задач. Рекомендуються завдання для самостійної роботи.

Посібник призначений для студентів технічних спеціальностей всіх форм навчання.

Іл. 10 . Бібліогр.: 7 найм.

Друкується за авторською редакцією.

Відповідальний за випуск А.П.Павленко, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рецензенти: Т.С.Кагадій, д-р фіз.-мат. наук, проф. (НГУ)
Ю.Я.Годес, канд. фіз.-мат. наук, доц. (ДНУ)

ВСТУП

Основна форма навчання студентів – самостійна робота над навчальним матеріалом, яка складається з вивчення теоретичних положень за підручником, розгляду прикладів і розв'язання задач. При вивченні матеріалу за підручником треба переходити до наступного питання тільки після правильного зрозуміння попереднього, виконуючи на папері усі обчислення, навіть і ті, які пропущені у підручнику. Розв'язання задач при вивченні дисципліни «Вища математика» часто пов'язано з багатьма складностями. Якщо складається скрутне становище при розв'язанні задачі, то треба вказати характер цього утруднення, привести припущення відносно плану розв'язку.

Відомо, що при самостійному розв'язуванні задач студентам потрібні постійні консультації щодо способів їх розв'язування, оскільки знайти шлях до розв'язування задачі без допомоги викладача або відповідного підручника студентові не під силу. Допомогти студентам технічних спеціальностей всіх форм навчання подолати ці складності, навчити їх застосовувати теоретичні знання до розв'язування задач - основне призначення цього навчального посібника.

У третій частині навчального посібника викладено матеріал з таких розділів вищої математики: «Визначений інтеграл», «Невласні інтеграли» та «Застосування визначеного інтеграла до задач геометрії». Основні теоретичні положення, формули та теореми ілюструються докладним розв'язанням великої кількості задач різного ступеня складності з їх повним аналізом. Для ефективності засвоєння матеріалу пропонуються завдання для самостійної роботи.

Автори сподіваються, що саме така побудова посібника надає студентові широкі можливості до активної самостійної роботи, яка, безумовно, сприятиме засвоєнню матеріалу при вивченні дисципліни «Вища математика».

Розділ 1
ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

1.1. Зростання і спадання функції

Функція $y=f(x)$ називається ***зростаючою*** на інтервалі (a,b), якщо для будь-яких x_1 і x_2, що належать до цього інтервалу, і таких, що $x_1<x_2$, справджується нерівність $f(x_1)<f(x_2)$.

Функція $y=f(x)$ називається ***спадною*** на інтервалі (a,b), якщо для будь-яких x_1 і x_2, що належать до цього інтервалу, і таких, що $x_1<x_2$, справджується нерівність $f(x_1)>f(x_2)$.

Як зростаючі, так і спадні функції називаються ***монотонними***, а інтервали, в яких функція зростає або спадає – ***інтервалами монотонності***.

Зростання і спадання функції $y=f(x)$ характеризується знаком її похідної: якщо у деякому інтервалі $f'(x)>0$, то функція зростає в цьому інтервалі; якщо ж $f'(x)<0$, то функція спадає в цьому інтервалі.

Інтервали монотонності можуть відділятися один від одного або точками, де похідна дорівнює нулю, або точками, де похідна не існує. Ці точки називаються ***критичними точками***.

Отже, щоб знайти інтервали монотонності функції $f(x)$, треба:

1) знайти область визначення функції;
2) знайти похідну даної функції;
3) знайти критичні точки з рівняння $f'(x)=0$ та за умови, що $f'(x)$ не існує;
4) розділити критичними точками область визначення на інтервали і у кожному з них визначити знак похідної.

   На інтервалах, де похідна додатна, функція зростає, а де від'ємна – спадає.

Зразки розв'язування задач

Знайти інтервали монотонності функції.

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4$.

1) Область визначення $D(f): x \in (-\infty; +\infty)$.

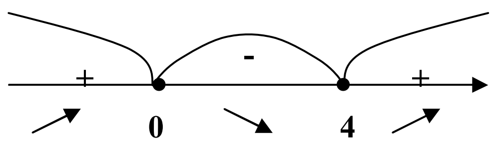
2) $f'(x) = 3x^2 - 12x$.

3) Критичні точки:

$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 12 = 0$ або $3x(x-4) = 0$, звідки $x_1 = 0, \quad x_2 = 4$.

Похідна існує на всій області визначення.

4) Знаки похідної:



Функція зростає на інтервалах $(-\infty; 0)$ і $(4; +\infty)$. Функція спадає на інтервалі $(0; 4)$.

2. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 5$.

1) Область визначення $D(f): x \in (-\infty; \infty)$.

2) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 6$.

3) Критичні точки: $f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 6x + 6 = 0$ або $x^2 - 2x + 2 = 0$. Оскільки $D = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0$, рівняння не має коренів, тобто похідна не обертається в нуль. $f'(x)$ існує на всій області визначення. Отже, критичних точок немає.

4) $f'(x)$ приймає тільки додатні значення, функція зростає на інтервалі $(-\infty; \infty)$.

3. $f(x) = \dfrac{4}{x} - 2x$.

1) Область визначення $D(f): x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

2) $f'(x) = -\dfrac{4}{x^2} - 2 = \dfrac{-4 - 2x^2}{x^2} = \dfrac{-2(2 + x^2)}{x^2}$.

3) Критичні точки:

$f'(x) \neq 0$, бо $2 + x^2 \neq 0$.

Похідна не існує в точці $x = 0$, але ця точка не входить в $D(f)$. Тобто критичних точок немає.

4) На всій області визначення $f'(x) < 0$, отже функція всюди спадає.

4. $f(x) = \ln x - x^2$.

1) Область визначення $D(f): x \in (0;\infty)$.

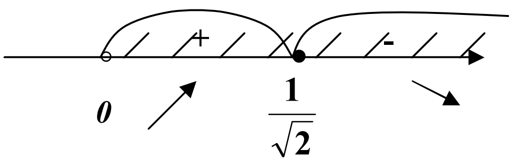
2) $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 2x = \dfrac{1-2x^2}{x}$.

3) Критичні точки:

$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 1 - 2x^2 = 0$, звідки $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, але $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \notin D(f)$.

Похідна існує на всій області визначення.

4) Знаки $f'(x)$:



Функція зростає на інтервалі $\left(0; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, спадає на інтервалі $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \infty\right)$.

5. $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1) Область визначення $D(f): x \in (-\infty;\infty)$.

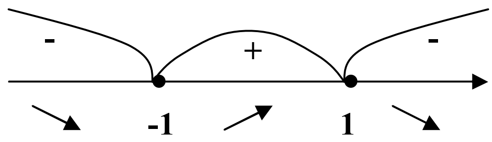
2) $f'(x) = \dfrac{2(1+x^2) + 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2+2x^2+4x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2+2x^2}{(1+x^2)^2}$.

3) Критичні точки:

$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 2 - 2x^2 = 0$ або $1 - x^2 = 0$, звідки $x = \pm 1$.

Похідна існує для всіх $x \in (-\infty;\infty)$.

4) Знаки похідної:



Функція зростає на інтервалі $(-1;1)$, спадає на інтервалах $(-\infty;-1)$ і $(1;\infty)$.

6. $f(x)=x-arctgx$.

1) Функція визначена на множині дійсних чисел, крім точок $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,$ $n\in z$.

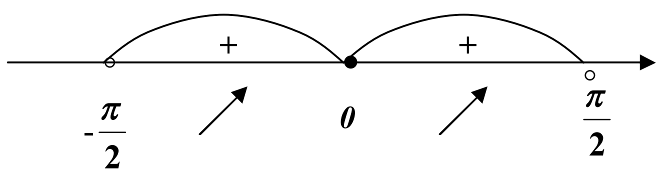
2) $f'(x)=1-\frac{1}{1+x^2}=\frac{1+x^2-1}{1+x^2}=\frac{x^2}{1+x^2}$.

3) Критичні точки:

$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{1+x^2}=0$, звідки $x^2=0, x=0$.

Похідна існує на всій області визначення.

4) Знаки $f'(x)$ визначимо на інтервалі неперервності $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.



Так як $f'(x)>0$ на інтервалах $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ та $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, і $f(x)$ визначена в точці $x=0$, то функція зростає на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. З урахуванням періодичності, маємо: функція зростає на інтервалах $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in z$.

Завдання для самостійної роботи

Знайти інтервали монотонності функцій:

1. $y = \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$;

2. $y = ln\left(1 + x^2\right)$;

3. $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$;

4. $y = \sqrt{x - x^2}$.

1.2. Локальний екстремум функції

Точка x_0 називається ***точкою максимуму (або мінімуму)*** функції $f(x)$, якщо існує такий окіл $0 < |x - x_0| < \delta$ цієї точки, який належить області визначення функції, і для всіх x з цього околу виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$ (або $f(x) > f(x_0)$).

Правило знаходження екстремумів (максимумів і мінімумів) за допомогою першої похідної:

1) знайти область визначення $f(x)$;
2) знайти похідну $f'(x)$;
3) знайти критичні точки;
4) дослідити знак $f'(x)$ на інтервалах, на які знайдені критичні точки ділять область визначення $f(x)$.

   При цьому критична точка x_0 є точкою мінімуму, якщо при переході через неї зліва направо $f'(x)$ змінює знак з “-” на “+”, x_0 є точкою максимуму, якщо $f'(x)$ змінює знак з “+” на “-”.
5) обчислити значення функції в точках екстремуму (екстремуми).

Зразки розв'язування задач

Знайти екстремуми функцій.

1. $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-4x+5$.

1) Область визначення $D(f):\ x\in(-\infty;\infty)$.

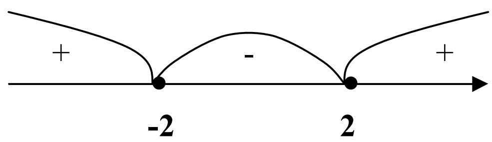
2) $f'(x)=x^2-4$.

3) Критичні точки:

$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-4=0,\ x=\pm 2$.

$f'(x)$ існує для всіх $x\in(-\infty;\infty)$.

4) Знаки y':



При переході через точку $x=-2$ похідна змінює знак з « + » на « - », отже $x=-2$ - точка максимуму. При переході через точку $x=2$ похідна змінює знак з « - » на « + », тому $x=2$ - точка мінімуму.

5) $y_{max}=y(-2)=-\dfrac{8}{3}+8+5=10\dfrac{1}{3}$. $\quad y_{min}=y(2)=\dfrac{8}{3}-8+5=-\dfrac{1}{3}$.

2. $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+4}$.

1) Область визначення функції $D(f):\ x\in(-\infty;\infty)$.

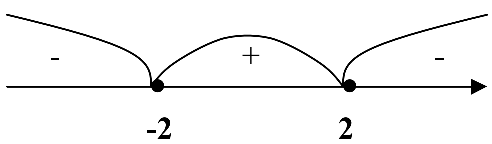
2) $f'(x)=\dfrac{4(x^2+4)-4x\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\dfrac{4x^2+16-8x^2}{(x^2+4)^2}=\dfrac{16-4x^2}{(x^2+4)^2}$.

3) Критичні точки:

$f'(x)=0\Rightarrow 16-4x^2=0$ або $4-x^2=0$, звідки $x=\pm 2$.

$f'(x)$ існує для всіх $x\in(-\infty;\infty)$.

4) Знаки y':



При переході через точку $x=-2$ похідна змінює знак з « - » на « + », тому точка $x=-2$ є точкою мінімуму. При переході через точку $x=2$ похідна змінює знак з « + » на « - ». Отже, точка $x=2$ є точкою максимуму.

5) $y_{min}=y(-2)=\dfrac{4\cdot(-2)}{(-2)^2+4}=-\dfrac{8}{16}=-\dfrac{1}{2}$; $\quad y_{max}=y(2)=\dfrac{4\cdot 2}{2^2+4}=\dfrac{8}{16}=\dfrac{1}{2}$.

3. $f(x)=\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{8}{x^2}$.

1) Область визначення $D(f): x\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)$.

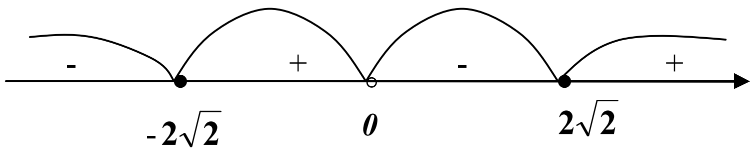
2) $f'(x)=\dfrac{2x}{8}+8\cdot\left(-2x^{-3}\right)=\dfrac{x}{4}-\dfrac{16}{x^3}=\dfrac{x^4-64}{4x^3}$.

3) Критичні точки:

$f'(x)=0 \quad\Rightarrow\quad x^4-64=0$, звідки $x=\pm\sqrt[4]{64}=\pm 2\sqrt{2}$.

$f'(x)$ існує на всій області визначення.

4) Знаки y':



При переході через точки $x=\pm 2\sqrt{2}$ похідна змінює знак з « - » на « + ». Отже, точки $x=\pm 2\sqrt{2}$ є точками мінімуму. При переході через точку $x=0$ похідна змінює знак, але $x=0\notin D(f)$, тому $x=0$ не є точкою екстремуму.

5) Так як функція $f(x)$ парна, то $y\left(-2\sqrt{2}\right)=y\left(2\sqrt{2}\right)=\dfrac{\left(2\sqrt{2}\right)^2}{8}+\dfrac{8}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}=$

$=1+1=2$. Тобто $y_{min}=2$.

4. $f(x)=x\cdot e^{-x^2}$.

1) $D(f): x\in(-\infty;\infty)$.

2) $f'(x)=1\cdot e^{-x^2}+x\cdot\left(-2xe^{-x^2}\right)=e^{-x^2}-2x^2e^{-x^2}=e^{-x}\left(1-2x^2\right)$.

3) Критичні точки:

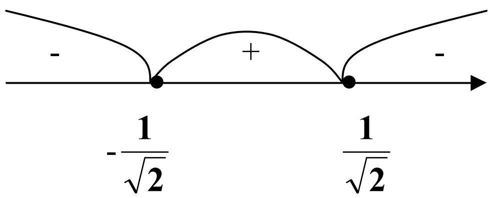
$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad e^{-x}\left(1-2x^2\right)=0.$$

Функція $y=e^{-x}$ приймає тільки додатні значення, причому $e^{-x}\neq 0$.

Критичну точку знайдемо з умови: $1-2x^2=0$. Отримаємо $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$f'(x)$ існує для всіх $x\in(-\infty;\infty)$.

4) Знаки y':



Функція має дві екстремальні точки: $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ - точка мінімуму; $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ -точка максимуму.

5) $y_{min}=y\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$; $y_{max}=y\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$.

5. $f(x)=x\cdot\sqrt[3]{1-x}$.

1) Область визначення $D(f): x\in(-\infty;\infty)$.

2) $f'(x)=1\cdot(1-x)^{\frac{1}{3}}+x\cdot\dfrac{1}{3}(1-x)^{-2/3}\cdot(-1)=\sqrt[3]{1-x}-\dfrac{x}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}=\dfrac{3(1-x)-x}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}=$

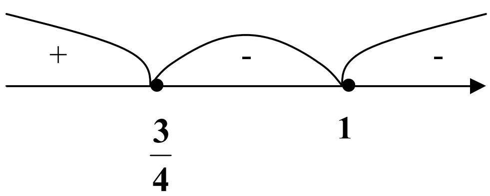
$$=\frac{3-3x-x}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}=\frac{3-4x}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}.$$

3) Критичні точки:

а) $f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad 3-4x=0,\ x=\dfrac{3}{4}$.

б) $f'(x)$ не існує при $x=1\in D(f)$.

4) Знаки y':



При переході через точку $x=\dfrac{3}{4}$ похідна змінює знак з « + » на « - », тому $x=\frac{3}{4}$ є точкою максимуму. При переході через точку $x=1$ похідна не змінює свій знак. Отже, критична точка $x=1$ не є екстремальною.

5) $y_{max}=y\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$.

6. $f(x)=e^{-x}+e^{2x}$.

1) $D(f): x\in(-\infty;\infty)$.

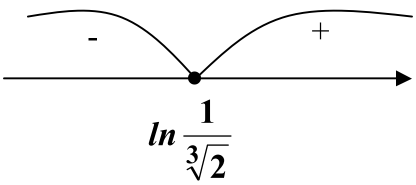
2) $f'(x)=-e^{-x}+2e^{2x}=-\frac{1}{e^x}+2e^{2x}=\frac{-1+2e^{3x}}{e^x}$.

3) Критичні точки:

а) $f'(x)=0 \Rightarrow 2e^{3x}-1=0$, тоді $e^{3x}=\frac{1}{2}$, звідки $x=\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2}$ або $x=\ln\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

б) $f'(x)$ існує для всіх $x\in(-\infty;\infty)$.

4)Знаки y':



При переході через точку $x=\ln\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ похідна змінює знак з « - » на « + », тому $x=\ln\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ - точка мінімуму.

5) $y_{min}=e^{-\ln\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}+e^{2\ln\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}=e^{\ln\sqrt[3]{2}}+e^{\ln\frac{1}{\sqrt[3]{4}}}=\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[3]{8}+1}{\sqrt[3]{4}}=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

7. $f(x)=x^2-2\ln x$.

1) Область визначення $D(f): x\in(0;\infty)$.

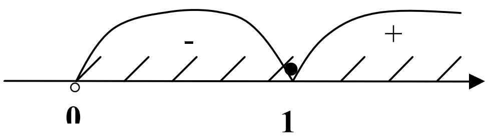
2) $f'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2x^2-2}{x}=\frac{2(x^2-1)}{x}$.

3) Критичні точки:

а) $f'(x)=0 \Rightarrow x^2-1=0$, звідки $x=\pm1$. Але $x=-1$ не входить в $D(f)$.

б) $f'(x)$ існує на всій області визначення.

4) Знаки y':



При переході через точку $x = 1$ похідна змінює знак з « - » на « + », тому $x = 1$ - точка мінімуму.

5) $y_{min} = y(1) = 1 - 2\ln 1 = 1$.

8. $f(x) = x^3 + x^2 + 16x - 1$.

1) Область визначення $D(f): x \in (-\infty; \infty)$.

2) $f'(x) = 3x^2 + 2x + 16$.

3) Критичні точки:

а) $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x + 16 = 0$. Знайдемо $D = 4 - 192 = -188 < 0$, тому рівняння не має коренів, тобто $f'(x) \neq 0$.

б) $f'(x)$ існує на всій області визначення.

Отже, критичних точок не має і функція не має екстремумів.

Завдання для самостійної роботи

Знайти екстремуми функцій:

1. $f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 84x + 8$;

2. $f(x) = \ln(x^2 + 16)$;

3. $f(x) = \dfrac{3 - x^2}{x + 2}$;

4. $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$;

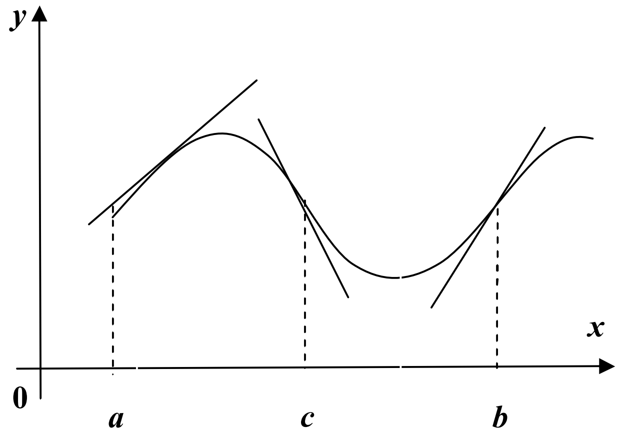
5. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(x - 5)$.

1.3. Опуклість і вгнутість кривих. Точки перегину

Крива $y = f(x)$ називається ***опуклою*** на інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче довільної її дотичної на цьому інтервалі.

Крива $y = f(x)$ називається ***вгнутою*** на інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать вище довільної її дотичної на цьому інтервалі.

Точкою перегину називається така точка кривої, яка відділяє її опуклу частину від вгнутої.



На рисунку крива опукла на (a,c), вгнута на (c,b), $x = c$ - точка перегину.

Опуклість і вгнутість кривої, яка є графіком функції $y = f(x)$, характеризується знаком її другої похідної: якщо в деякому інтервалі $f''(x) < 0$, то крива ***опукла*** на цьому інтервалі, а якщо $f''(x) > 0$, то крива ***вгнута*** на цьому інтервалі.

Інтервали опуклості і вгнутості можуть відділятися один від одного або точками, де друга похідна дорівнює нулю, або точками, де друга похідна не існує. Ці точки називаються ***критичними точками ІІ роду.***

Якщо при переході через критичну точку ІІ роду x_0 друга похідна $f''(x)$ змінює знак, то графік функції має точку перегину $(x_0; f(x_0))$.

<u>Правило знаходження точок перегину</u> графіка функції $y = f(x)$:

1) знайти область визначення функції;
2) знайти критичні точки ІІ роду функції $y = f(x)$;
3) дослідити знак $f''(x)$ в інтервалах, на які критичні точки ділять область визначення функції $f(x)$. Якщо критична точка x_0 поділяє інтервали, де $f''(x)$ різних знаків, то x_0 є абсцисою точки перегину графіка функції;
4) обчислити значення функції в точках перегину.

Зразки розв'язування задач

Знайти точки перегину і інтервали опуклості та вгнутості графіків функцій.

1. $f(x)=3x^5-5x^4+4$.

1) Область визначення $D(f): x\in(-\infty;\infty)$.

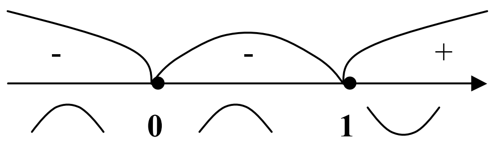
2) Критичні точки II роду:

$$f'(x)=15x^4-20x^3;\quad f''(x)=60x^3-60x^2.$$

а) $f''(x)=0 \;\Rightarrow\; 60x^3-60x^2=0$ або $x^3-x^2=0$. Маємо $x^2(x-1)=0$, звідки $x=0,\ x=1$.

б) $f''(x)$ існує на всій області визначення.

3) Знаки $f''(x)$:



$f''(x)>0$ при $x\in(1;\infty)$; $f''(x)<0$ при $x\in(-\infty;0)\cup(0;1)$.

Отже, на інтервалі $(1;\infty)$ крива вгнута. Враховуючи, що в точці $x=0$ функція неперервна, робимо висновок, що крива опукла на інтервалі $(-\infty;1)$. При переході через точку $x=1$ друга похідна змінює знак, тому $x=1$ - точка перегину. В точці $x=0$ перегину немає.

4) $f(1)=3-5+4=2$. $(1;2)$ - точка перегину.

2. $f(x)=2x^3-x^4+36x^2-100$.

1) $D(f): x\in(-\infty;\infty)$.

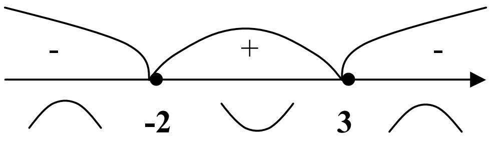
2) Критичні точки II роду:

$$f'(x)=6x^2-4x^3+72x;\quad f''(x)=12x-12x^2+72.$$

а) $f''(x)=0 \;\Rightarrow\; -12x^2+12x+72=0$ або $x^2-x-6=0$, звідки $x_1=-2$, $x_2=3$.

б) $f''(x)$ існує для всіх $x\in(-\infty;\infty)$.

3) Знаки $f''(x)$:



Крива опукла на інтервалах $(-\infty;-2)$ і $(3;\infty)$, вгнута на інтервалі $(-2;3)$.

В точках $x=-2$ і $x=3$ графік має перегин.

4) $f(-2)=2\cdot(-2)^3-(-2)^4+36\cdot(-2)^2-100=12$.

$f(3)=2\cdot 3^3-3^4+36\cdot 3^2-100=197$.

$(-2;12)$ і $(3;197)$ - точки перегину.

3. $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$.

1) Область визначення $D(f): x\in(-\infty;\infty)$.

2) Критичні точки II роду:

$$f'(x)=\frac{1(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2};$$

$$f''(x)=\frac{-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}=\frac{(1+x^2)\left[-2x(1+x^2)-4x(1-x^2)\right]}{(1+x^2)^4}=$$

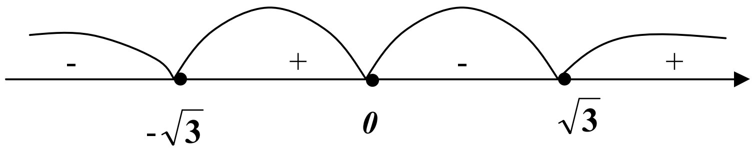
$$=\frac{-2x-2x^3-4x+4x^3}{(1+x^2)^3}=\frac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3}.$$

а) $f''(x)=0 \;\Rightarrow\; 2x^3-6x=0$, $x(x^2-3)=0$, звідки $x=0$ або

$x^2-3=0 \;\Rightarrow\; x=\pm\sqrt{3}$.

б) $f''(x)$ існує для всіх $x\in D(f)$.

3) Знаки $f''(x)$:



Крива опукла на інтервалах $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$ і $\left(0;\sqrt{3}\right)$, вгнута на інтервалах $\left(-\sqrt{3};0\right)$ і $\left(\sqrt{3};\infty\right)$.

В точках $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{3}$ графік має перегини.

4) $f(0)=0$.

$$f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{4},\qquad f\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{4}.$$

$(0;0)$; $\left(\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$; $\left(-\sqrt{3};-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ - точки перегину.

4. $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^3}$.

1) Область визначення: $x\neq-1$.

$D(f): x\in(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$.

2) Критичні точки II роду:

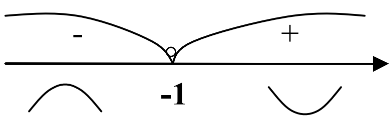
$$f'(x)=-3(x+1)^{-4};\qquad f''(x)=12(x+1)^{-5}=\frac{12}{(x+1)^5}.$$

а) $f''(x)\neq 0$.

б) $f''(x)$ не існує при $x=-1$, але $x=-1\notin D(f)$.

Критичних точок II роду немає, графік не має точок перегину.

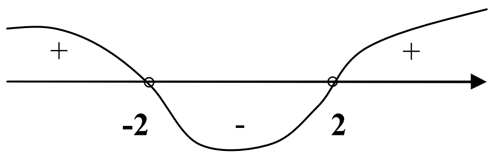
3) Знаки $f''(x)$:



Крива опукла на інтервалі $(-\infty;-1)$, вгнута на інтервалі $(-1;\infty)$.

5. $f(x)=1-\ln\left(x^2-4\right)$.

1) Область визначення функції: $x^2-4>0$.



$D(f): x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$.

2) Критичні точки II роду:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2-4} \cdot 2x = -\frac{2x}{x^2-4};$$

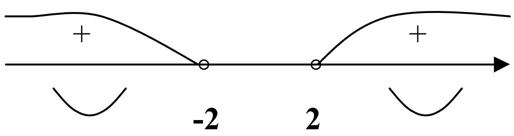
$$f''(x) = \frac{-2(x^2-4)+2x\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-2x^2+8+4x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^2+8}{(x^2-4)^2}.$$

а) $f''(x) \neq 0$, тому що $2x^2+8 \neq 0$.

б) $f''(x)$ існує на всій області визначення.

Критичних точок немає. Отже, немає і перегинів графіка.

3) Знаки $f''(x)$:



Графік функції вгнутий на всій області визначення.

6. $f(x) = 3 + \sqrt[3]{x+2}$.

1) Область визначення $D(f): x \in (-\infty; \infty)$.

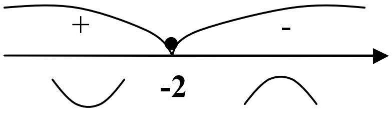
2) Критичні точки II роду:

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x+2)^{-2/3}; \quad f''(x) = -\frac{2}{9}(x+2)^{-5/3} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x+2)^5}}.$$

а) $f''(x) \neq 0$.

б) $f''(x)$ не існує при $x = -2 \in D(f)$, тому $x = -2$ - критична точка.

3) Знаки $f''(x)$:



Крива опукла на інтервалі $(-2; \infty)$, вгнута на інтервалі $(-\infty; -2)$. При $x = -2$ графік має перегин.

4) $f(-2)=3$.

$(-2;3)$ - точка перегину.

7. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$.

1) Область визначення: $x^2-4\neq 0 \quad \Rightarrow \quad x\neq \pm 2$.

$D(f): x\in(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;\infty)$.

2) Критичні точки II роду:

$$f'(x)=-\frac{1}{\left(x^2-4\right)^2}\cdot 2x=-\frac{2x}{\left(x^2-4\right)^2};$$

$$f''(x)=\frac{-2\left(x^2-4\right)^2+2x\cdot 2\left(x^2-4\right)\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^4}=\frac{\left(x^2-4\right)\left[-2\left(x^2-4\right)+8x^2\right]}{\left(x^2-4\right)^4}=$$

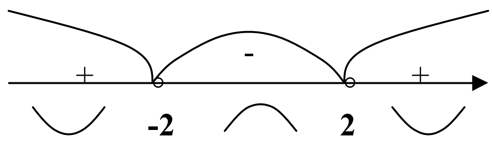
$$=\frac{-2x^2+8+8x^2}{\left(x^2-4\right)^3}=\frac{6x^2+8}{\left(x^2-4\right)^3}.$$

а) $f''(x)\neq 0$, тому що $6x^2+8\neq 0$.

б) $f''(x)$ існує для всіх $x\in D(f)$.

Критичних точок немає. Отже, немає і перегинів графіка.

3) Знаки $f''(x)$:



Крива опукла на інтервалі $(-2;0)$, вгнута на інтервалах $(-\infty;-2)$ і $(2;\infty)$.

Завдання для самостійної роботи

Знайти точки перегину і інтервали опуклості та вгнутості графіків функцій.

1. $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-x^3$;

2. $f(x)=(x+1)\cdot e^{x+1}$;

3. $f(x)=\sqrt[3]{x^5}-2$;

4. $f(x)=\dfrac{3x-2}{5x}$;

5. $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$.

1.4. Асимптоти кривих

Пряма називається ***асимптотою кривої***, якщо точка кривої необмежено наближується до неї при віддалені її від початку координат. Розрізняють вертикальні, похилі (горизонтальні) асимптоти.

а) Вертикальні асимптоти.

Графік функції $y = f(x)$ при $x \to a$ має вертикальну асимптоту, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ або $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$; при цьому точка $x = a$ є точкою розриву II роду. Рівняння вертикальної асимптоти має вигляд $x = a$.

б) Похилі асимптоти.

Рівняння похилої асимптоти $y = kx + b$, де $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx]$, якщо ці границі існують і скінченні.

Слід окремо розглянути випадки коли $x \to +\infty$ та $x \to -\infty$.

Зразки розв'язування задач

Знайти асимптоти кривих.

1. $y = x + \dfrac{1}{x}$.

а) $D(y): x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

В точці $x = 0$ функція має розрив II роду, тому що $\lim\limits_{x \to 0 \pm 0} \left(x + \dfrac{1}{x} \right) = \pm\infty$.

Отже, $x = 0$ - вертикальна асимптота.

б) Знайдемо похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (y - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(x + \frac{1}{x} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Тоді $y = x$ - похила асимптота.

2. $y = \dfrac{5x}{x^2 - 4}$.

а) Область визначення функції:

$x^2 - 4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$.

$D(y): x \in (-\infty;-2) \cup (-2;2) \cup (2;\infty)$.

В точках $x = \pm 2$ функція має розриви II роду, тому що $\lim\limits_{x \to \pm 2 \pm 0} \dfrac{5x}{x^2 - 4} = \pm\infty$.

Тому графік має дві вертикальні асимптоти $x = -2$ та $x = 2$.

б) Знайдемо похилі асимптоти:

$k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{5}{x^2 - 4} = 0$, $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{5x}{x^2 - 4} \right) = 0$. Тоді $y = 0$ - горизонтальна асимптота.

3. $y = \dfrac{x^2 - 6x + 3}{x - 3}$.

а) Область визначення функції:

$x - 3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 3$.

$D(y): x \in (-\infty;3) \cup (3;\infty)$

Обчислимо $\lim\limits_{x \to 3 \pm 0} \dfrac{x^2 - 6x + 3}{x - 3} = \mp\infty$, тому $x = 3$ - точка розриву II роду.

Отже, $x = 3$ - вертикальна асимптота.

б) Похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x - 6 + \frac{3}{x}}{x - 3} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 6x + 3 - x^2 + 3x}{x - 3} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-3x + 3}{x - 3} = -3.$$

Маємо: $y = x - 3$ - похила асимптота.

4. $y = x e^x$.

а) Область визначення функції $D(y): x \in (-\infty;+\infty)$.

Точок розриву II роду немає, тому графік функції не має вертикальних асимптот.

б) Знайдемо похилі асимптоти:

$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{x e^x}{x} = \lim_{x \to \infty} e^x = \infty, \qquad k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{x e^x}{x} = \lim_{x \to -\infty} e^x = 0.$$

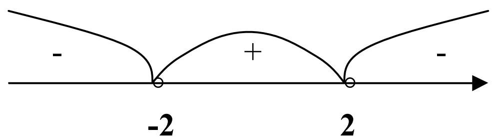
При k_1 (коли $x \to +\infty$) похилої асимптоти не існує. Знайдемо $b_2 = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x e^x \right) = \{\infty \cdot 0\}$. Щоб обчислити границю, перетворимо вираз

$x e^x$ до вигляду $\dfrac{x}{e^{-x}}$. Тоді маємо невизначеність $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, до якої можна застосувати правило Лопіталя, а саме: $b_2 = \lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{e^{-x}} =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{-e^{-x}} = 0$. Маємо: $y = 0$ - горизонтальна асимптота.

5. $y = ln\left(4 - x^2\right)$.

а) Область визначення функції: $4 - x^2 > 0$.



$D(y): x \in (-2; 2)$.

Обчислимо $\lim\limits_{x \to -2+0} ln\left(4 - x^2\right) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2-0} ln\left(4 - x^2\right) = -\infty$. В точках $x = \pm 2$ функція має розрив ІІ роду. Отже, $x = -2$ та $x = 2$ - вертикальні асимптоти.

б) Похилих асимптот немає, тому що неможливо обчислити коефіцієнти k і b (функція не визначена при $x \to \pm\infty$).

Завдання для самостійної роботи

Знайти асимптоти кривих:

1. $y = 12x - x^3$;
2. $y = \dfrac{x^2}{x+3}$;
3. $y = e^{-x^2}$;
4. $y = \dfrac{2x}{x+2}$;
5. $y = \dfrac{ln\, x}{x}$;
6. $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$;
7. $y = \dfrac{4}{1+x^2}$.

1.5. Схема дослідження функції та побудова її графіка

Щоб дослідити функцію та побудувати її графік треба:

1) знайти область визначення функції;
2) знайти (якщо можна) точки перетину графіка з координатними осями;
3) дослідити функцію на періодичність, парність і непарність;
4) знайти точки розриву та дослідити їх;

5) знайти інтервали монотонності, точки екстремумів та значення функції в цих точках;
6) знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину;
7) знайти асимптоти кривої;
8) побудувати графік функції.

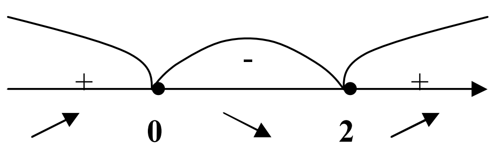
Зразки розв'язування задач

Дослідити функції та побудувати їхні графіки.

1. $y = x^3 - 3x^2$.

1) Функція є многочленом, область існування якого – вся множина дійсних чисел.
   $D(y): x \in (-\infty; +\infty)$.
2) Знайдемо точки перетину графіка с віссю Ox, для цього покладемо $y = 0$:
   $x^3 - 3x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x^2(x-3) = 0$, звідки $x_1 = 0,\ x_2 = 3$. Отже, в точках $O(0;0)$ та $A(3;0)$ графік перетинає вісь Ox.
   Точки перетину з віссю Oy: покладемо $x = 0$, тоді знайдемо $y = 0$. Тобто, графік перетинає вісь Oy у точці $O(0;0)$.
3) Функція не періодична, вона не є парною, не є непарною $\big(y(-x) \neq y(x)$ та $y(-x) \neq -y(x)\big)$.
4) Функція є неперервною на всій числовій прямій. Тобто точок розриву не має.
5) Досліджуємо функцію на монотонність та екстремум. Обчислимо $y' = 3x^2 - 6x$. Знайдемо критичні точки з рівняння $y' = 0$: $3x^2 - 6x = 0$ або $3x(x-2) = 0$. Отримаємо, що $x_1 = 0$ та $x_2 = 2$.

Знак y'



Функція зростає на інтервалах $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$; функція спадає на інтервалі $(0; 2)$.
Згідно з правилом знаходження екстремуму, $x = 0$ - точка максимуму, $x = 2$ - точка мінімуму.

Обчислимо $y_{max} = y(0) = 0$,

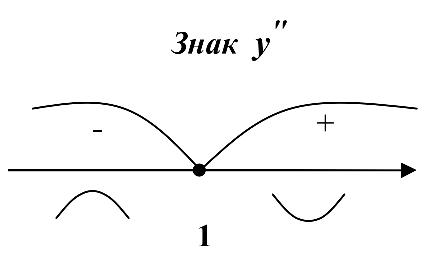
$$y_{min} = y(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = -4 .$$

Таким чином, екстремальні точки: $O(0;0)$ та $B(2;-4)$.

6) Знайдемо інтервали вгнутості та опуклості, точки перегину.

$y'' = \left(3x^2 - 6x\right)' = 6x - 6$.

Розв'яжемо рівняння $y'' = 0 :\ 6x - 6 = 0 \ \Rightarrow\ x = 1$ - критична точка другого роду.



Функція вгнута на інтервалі $(1;+\infty)$ та опукла на інтервалі $(-\infty;1)$.
Значення $x = 1$ є абсцисою точки перегину.
Знайдемо $y(1) = 1 - 3 = -2$, тобто точка $C(1;-2)$ - точка перегину графіка.

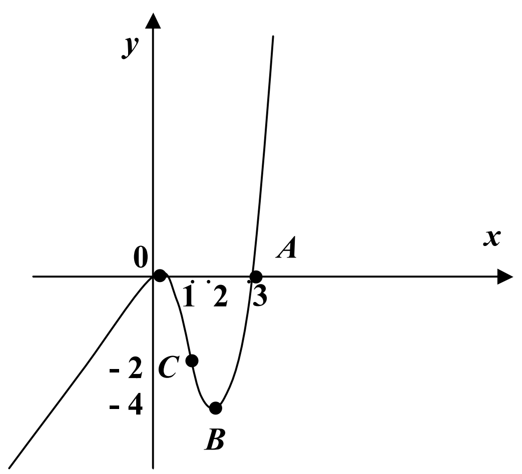
7) Знайдемо асимптоти заданої кривої.

Вертикальних асимптот немає. З'ясуємо, чи є похилі асимптоти

Обчислимо $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(3x^2 - 6x\right) = +\infty$.

Отже, наша крива не має і похилих асимптот

8) Побудуємо графік функції.



2. $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$.

1) $D(y): x \neq 0$, тобто $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

2) Точки перетину графіка з координатними осями. При $y = 0: \frac{x}{2} + \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow$

$\frac{x^2+4}{2x} = 0$, звідки $x^2 + 4 \neq 0$, тобто з віссю Ox графік не перетинається. Зважаючи на те, що $x \neq 0$, робимо висновок, що графік не перетинає вісь Oy.

3) Функція не періодична, вона непарна бо $y(-x) = -\frac{x}{2} - \frac{2}{x} = -\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) =$

$= -y(x)$. Тому її графік є симетричним відносно початку координат.

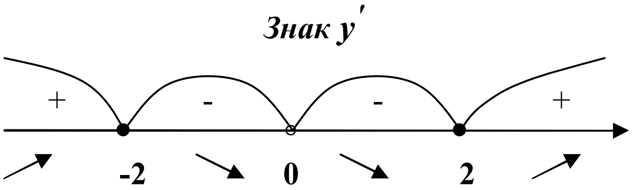
4) В точці $x = 0$ функція має розрив II-го роду, тому що $\lim\limits_{x \to 0 \pm 0}\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to 0 \pm 0} \frac{x^2+4}{2x} = \pm\infty$.

Отже, пряма $x = 0$ - вертикальна асимптота.

5) Знайдемо $y' = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}$. Розв'яжемо рівняння $y' = 0: \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = 0$, $\frac{2}{x^2} = \frac{1}{2}$,

$x^2 = 4$, звідки $x_1 = 2,\ x_2 = -2$ - критичні точки функції. Похідна не існує при $x = 0 \notin D(y)$.



Функція зростає на інтервалах $(-\infty;-2)$ та $(2;+\infty)$; функція спадає на інтервалі $(-2;2)$.

$x = -2$ - точка максимуму функції, а $x = 2$ - точка мінімуму.

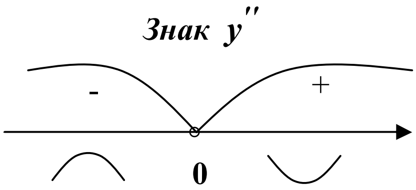
Обчислимо $y_{max} = y(-2) = -1 - 1 = -2$,

$y_{min} = y(2) = 1 + 1 = 2$.

Отже, $A_1(-2;-2)$, $A_2(2;2)$ - екстремальні точки.

6) Знайдемо $y'' = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}\right)' = \frac{4}{x^3}$.

Зважаючи на те, що $y'' = \frac{4}{x^3} \neq 0$ робимо висновок, що точок перегину графік функції не має.



Функція вгнута на інтервалі $(0;+\infty)$ та опукла на інтервалі $(-\infty;0)$.

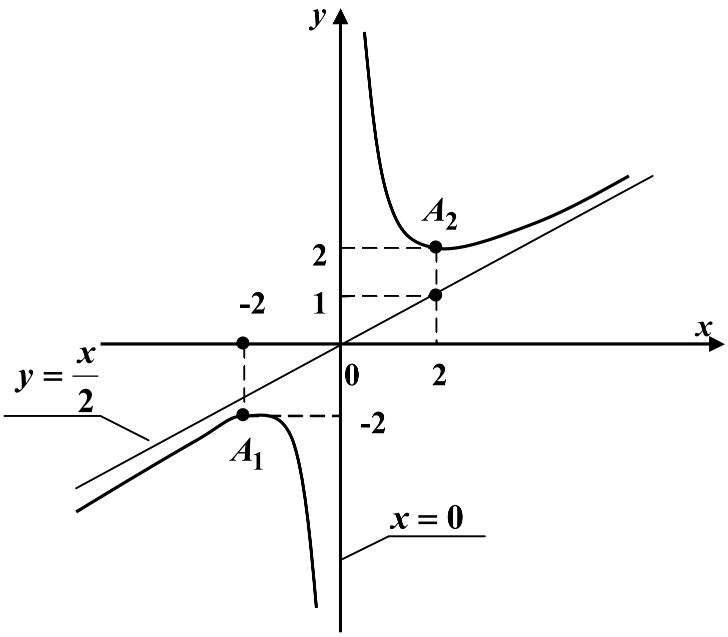
7) Вертикальну асимптоту ми вже знайшли: $x=0$. Знайдемо похилу асимптоту.

Обчислимо $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{x^2}\right)=\dfrac{1}{2}$,

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-k\cdot x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x}=0.$$

Тоді пряма $y=\dfrac{x}{2}$ - похила асимптота.

8) Побудуємо графік.



3. $y=ln\left(x^2+4\right)$.

1) $D(y): x\in(-\infty;+\infty)$.

2) Розглянемо перетин графіка з координатними осями.

З віссю $0y: x=0 \quad\Rightarrow\quad y=ln\,4\approx 1{,}4$, тобто у точці $A(0;ln\,4)$ графік перетинає вісь $0y$. З віссю $0x: y=0 \quad\Rightarrow\quad ln\left(x^2+4\right)=0$, звідки $x^2+4=1$

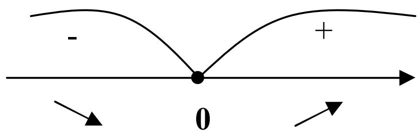
або $x^2 = -3$. Зрозуміло, що остання рівність розв'язків не має. Отже, графік не перетинає вісь $0x$.

3) Функція не періодична, але є парною, бо $y(-x) = ln(x^2+4) = y(x)$, тому її графік є симетричним відносно осі $0y$.

4) Точок розриву функція не має.

5) $y' = \dfrac{2x}{x^2+4}$. Знайдемо критичні точки: $\dfrac{2x}{x^2+4} = 0 \;\Rightarrow\; 2x = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$.

Знак y'



Функція зростає на інтервалі $(0;+\infty)$ та спадає на інтервалі $(-\infty;0)$.

Точка $x = 0$ є точкою мінімуму функції.

Обчислимо $y_{min} = y(0) = ln\,4 \approx 1{,}4$.

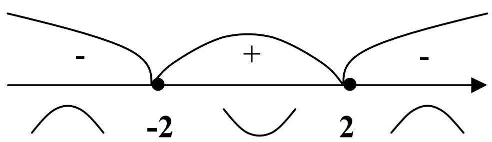
Тобто точка екстремуму нашої функції $A(0;1{,}4)$.

6) Знайдемо $y'' = \left(\dfrac{2x}{x^2+4}\right)' = \dfrac{2(x^2+4) - 2x\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \dfrac{8-2x^2}{(x^2+4)^2}$.

Дослідимо функцію на вгнутість та опуклість.

$y'' = 0: \dfrac{8-2x^2}{(x^2+4)^2} = 0 \;\Rightarrow\; 8 - 2x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = 4$, звідки $x_1 = -2, x_2 = 2$ - критичні точки.

Знак y''



Функція вгнута на інтервалі $(-2;2)$, опукла на інтервалах $(-\infty;-2)$ та $(2;+\infty)$. У точках $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ функція має перегин графіку.

Знайдемо $y(-2) = ln\,8 \approx 2{,}1$, $y(2) = ln\,8 \approx 2{,}1$.

Отже, $C_1(-2;ln\,8)$, $C_2(2;ln\,8)$ - точки перегину.

7) Вертикальних асимптот графік не має.

Для похилих асимптот знайдемо k і b.

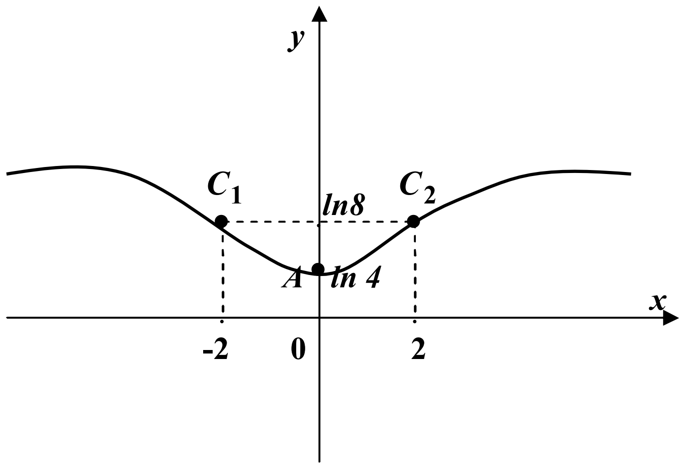
Будемо мати: $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{ln\left(x^2+4\right)}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x^2+4}=$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2}{2x}=0,$$

$$b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(y-k\cdot x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}ln\left(x^2+4\right)=+\infty.$$

Отже, похилих асимптот не буде.

8) Будуємо графік.



4. $y=x\cdot e^{-x}$.

1) $D(y): x\in(-\infty;+\infty)$.

2) Якщо $x=0$, то $y=0$. Знайшли, що графік перетинає вісь $0y$ у точці $O(0;0)$. Якщо $y=0$, то $x\cdot e^{-x}=0$, звідки $e^{-x}\neq 0$, тому $x=0$. Знову отримали ту саму точку $O(0;0)$, в якій графік перетинає вісь $0x$. З'ясовано , що тільки у початку координат графік перетинає обидві координатні осі.

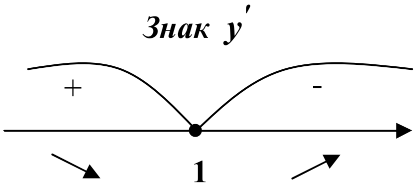
3) Функція не періодична, не є парною або непарною $\left(y(-x)\neq y(x)\right.$ та $\left.y(-x)\neq -y(x)\right)$.

4) Функція неперервна в області визначення, тому точок розриву не має.

5) Обчислимо $y'=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)$.

З умови $y'=0$ знайдемо критичні точки.

Будемо мати: $e^{-x}(1-x)=0 \quad\Rightarrow\quad e^{-x}\neq 0$, тому $1-x=0$, звідки $x=1$.



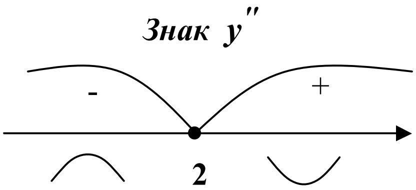
Функція зростає на інтервалі $(-\infty;1)$ та спадає на інтервалі $(1;+\infty)$. Зрозуміло, що $x=1$ - точка максимуму функції.

$$y_{max} = y(1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0{,}4 .$$

Точка $B\left(1;\frac{1}{e}\right)$ - екстремальна точка функції.

6) Знайдемо $y'' = \left(e^{-x} - xe^{-x}\right)' = -e^{-x} - e^{-x} + x e^{-x} = e^{-x}(x-2)$.

Тоді $y'' = 0 : e^{-x}(x-2) = 0 \Rightarrow e^{-x} \neq 0$, тому $x-2=0$, звідки $x=2$ - критична точка функції.



Функція вгнута на інтервалі $(2;+\infty)$ та опукла на інтервалі $(-\infty;2)$.

Отже, у точці $x=2$ функція має перетин.

$y(2) = 2 \cdot e^{-2} = \frac{2}{e^2} \approx 0{,}3$.

Тому $A\left(2;\frac{2}{e^2}\right)$ - точка перетину графіка функції.

7) Вертикальної асимптоти графік функції не має.

Для похилих асимптот знайдемо k і b.

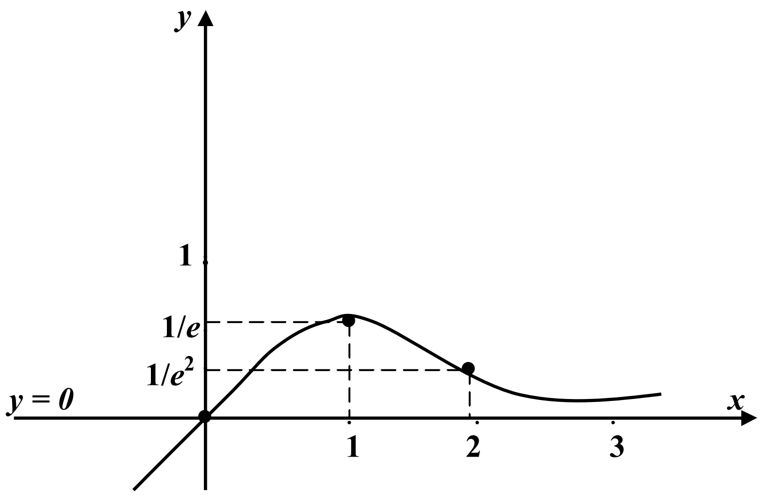
Отримаємо: $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$,

$$b = \lim_{x\to+\infty}(y-kx) = \lim_{x\to+\infty} x e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0 .$$

Тому $y=0$ - пряма, яка співпадає з віссю $0x$, буде горизонтальною асимптотою.

У випадку коли $x \to -\infty$: $k = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x} = +\infty$, тому ніякої асимптоти не буде.

8) Будуємо графік.



5. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

1) Оскільки задана функція дробово-раціональна, то вона не існує в тих точках, де знаменник дорівнює нулю: $x^2 - 1 = 0$, звідки $x_{1,2} = \pm 1$.

   Отже, $D(y): x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

2) Нехай $y = 0$, тоді $\dfrac{x^3}{x^2 - 1} = 0$, звідки $x = 0$.

   Нехай $x = 0$, тоді $y = 0$. Отже, графік перетинає обидві координатні осі в точці $O(0;0)$, тобто проходить через початок координат.

3) Функція не періодична, вона непарна, тому що $y(-x) = \dfrac{-x^3}{(-x)^2 - 1} =$

   $= -\dfrac{x^3}{x^2 - 1} = -y(x)$.

   Її графік є симетричним відносно початку координат.

4) Маємо дві точки розриву ІІ-го роду: $x_1 = -1$ та $x_2 = -1$, тому що

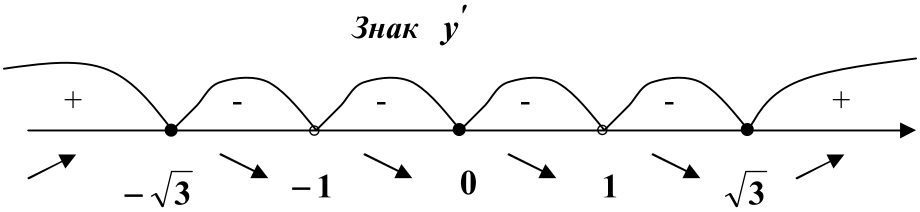
   $\lim\limits_{x \to -1 \pm 0} \dfrac{x^3}{x^2 - 1} = \pm\infty$ та $\lim\limits_{x \to 1 \pm 0} \dfrac{x^3}{x^2 - 1} = \pm\infty$.

   Отже, прямі $x = -1$ та $x = 1$ є вертикальними асимптотами.

5) Знайдемо $y' = \dfrac{3x^2(x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$.

Розв'яжемо рівняння $y' = 0 : \dfrac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2} = 0$, звідки $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$ - критичні точки функції.

Помітимо, що похідна не існує при $x = \pm 1$, але вони обидві не входять до області визначенності функції.



Функція зростає на інтервалах $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$, функція спадає на інтервалах $\left(-\sqrt{3};-1\right)\cup\left(-1;0\right)\cup\left(0;1\right)\cup\left(1;\sqrt{3}\right)$.

Похідна змінює знак при переході через точки $x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$. А саме: $x_2 = \sqrt{3}$ є точкою мінімуму функції, а $x_3 = -\sqrt{3}$ - точкою максимуму.

$$y_{min} = y\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3^3}}{3-1} = \frac{3\sqrt{3}}{2},\quad y_{max} = y\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Отже, екстремальні точки $A_1\left(\sqrt{3};\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $A_2\left(-\sqrt{3};-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

6) Обчислимо

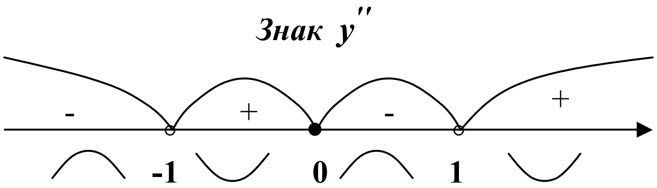
$$y'' = \left(\frac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}\right)' = \frac{\left(4x^3-6x\right)\cdot\left(x^2-1\right)^2 - \left(x^4-3x^2\right)\cdot 2\left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^4} =$$

$$= \frac{2x\left(2x^2-3\right)\cdot\left(x^2-1\right)^2 - 4x^3\cdot\left(x^2-3\right)\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)^4} =$$

$$= \frac{2x\cdot\left(x^2-1\right)\cdot\left[\left(2x^2-3\right)\cdot\left(x^2-1\right) - 2x^2\cdot\left(x^2-3\right)\right]}{\left(x^2-1\right)^4} = \frac{2x\cdot\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}.$$

Розв'яжемо рівняння $y'' = 0 : \dfrac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3} = 0$, звідки $2x\left(x^2+3\right) = 0$, а саме $x = 0$ - це критична точка функції.

Помічаємо, що y'' не існує при $x = \pm 1 \notin D(y)$.



Функція вгнута на інтервалах $(-1;0)\cup(1;+\infty)$, функція опукла на інтервалах $(-\infty;-1)\cup(0;1)$.

При переході через $x=0$ y'' змінює знак.

$y(0)=\dfrac{0}{0-1}=0$. Точка $O(0;0)$ є точкою перегину.

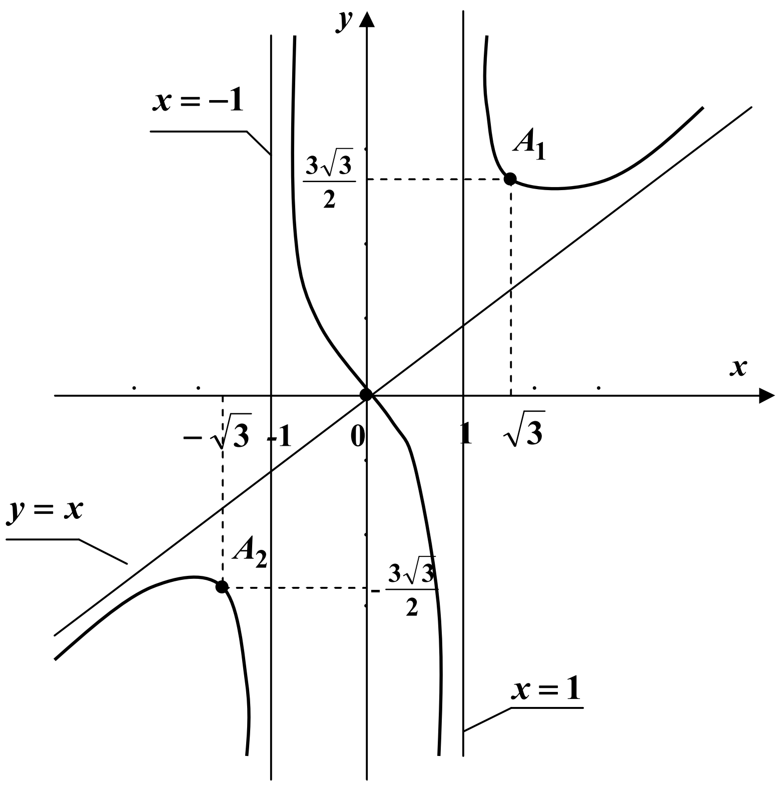
7) Вертикальні асимптоти: $x=\pm 1$. Для похилих асимптот знайдемо k і b.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{(x^2-1)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=0.$$

Отже, рівняння похилої асимптоти: $y=x$.

8) Побудуємо графік функції.



Завдання для самостійної роботи

Дослідити функції та побудувати їхні графіки:

1. $y = 2x^4 - x^2 + 1$;
2. $y = x^2\sqrt{x-3}$;
3. $y = x^2 - 2\ln x$;
4. $y = \dfrac{e^x}{x}$;
5. $y = \dfrac{1-x^3}{x^2}$.

Розділ 2
ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

2.1. Означення та область визначення. Частинні похідні першого порядку

Нехай D - множина упорядкованих пар чисел (x, y). Якщо кожній парі чисел $(x, y) \in D$ за певним законом відповідає число z, то кажуть, що на множині D визначено функцію z від двох змінних x і y і записують $z = f(x, y)$.

Змінну z називають ***залежною змінною (функцією)***, а змінні x та y - ***незалежними змінними (аргументами)***.

Множину пар чисел (x, y), для яких функція $z = f(x, y)$ визначена, називають ***областю визначення функції*** і позначають $D(f)$. Множину значень z позначають $E(f)$.

Оскільки кожній упорядкованій парі чисел (x, y) відповідає в прямокутній системі координат Oxy єдина точка $M(x, y)$ площини, і, навпаки, кожній точці $M(x, y)$ площини відповідає єдина упорядкована пара чисел (x, y), то функцію $z = f(x, y)$, де $(x, y) \in D$, можна розглядати як функцію точки M і замість $z = f(x, y)$ писати $z = f(M)$. Областю визначення функції у цьому випадку є деяка множина точок площини Oxy.

Значення функції $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ позначають $z_0 = f(x_0, y_0)$ або $z_0 = f(M_0)$, або $z = z\Big|_{M_0}$.

Величина $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ називається ***частинним приростом*** функції $z = f(x, y)$ по змінній x.

Величина $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ називається ***частинним приростом*** функції $z = f(x, y)$ по змінній y.

Якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$, то вона називається ***частинною похідною*** функції $z = f(x, y)$ по змінній x і позначається

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$, то вона називається ***частинною похідною*** функції $z = f(x, y)$ по змінній y і позначається

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

При обчисленні частинних похідних функції двох змінних користуються вже відомими формулами і правилами диференціювання функції однієї змінної. Слід лише пам'ятати, що при знаходженні частинної похідної $\frac{\partial z}{\partial x}$ обчислюють звичайну похідну функції змінної x, вважаючи змінну y сталою. При знаходженні похідної $\frac{\partial z}{\partial y}$ сталою вважається змінна x.

Зразки розв'язування задач

1. **Знайти та зобразити області визначення функцій двох змінних:**

а) $z = \frac{2x - y}{x + y}$.

Функція не визначена лише тоді, коли $y = -x$. Геометрично це означає, що область визначення функції складається із двох півплощин, одна з яких лежить вище, а друга нижче прямої $y = -x$ (рис. 2.1)

б) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Функція визначена при умові $4 - x^2 - y^2 \geq 0$, тобто $x^2 + y^2 \leq 4$. Рівняння $x^2 + y^2 = 4$ визначає в площині Oxy коло з центром в початку координат і радіусом 2. Функція визначена в точках, які лежать усередині кола та на його межі, так як для всіх точок, які лежать поза колом, має місце нерівність $x^2 + y^2 \geq 4$ (рис.2.2).

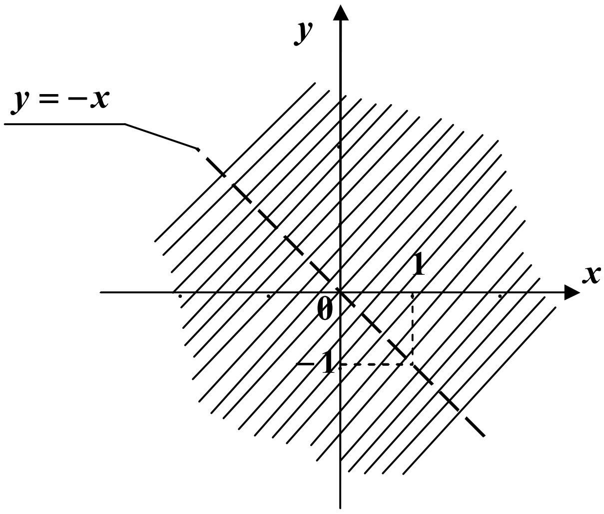


Рис. 2.1

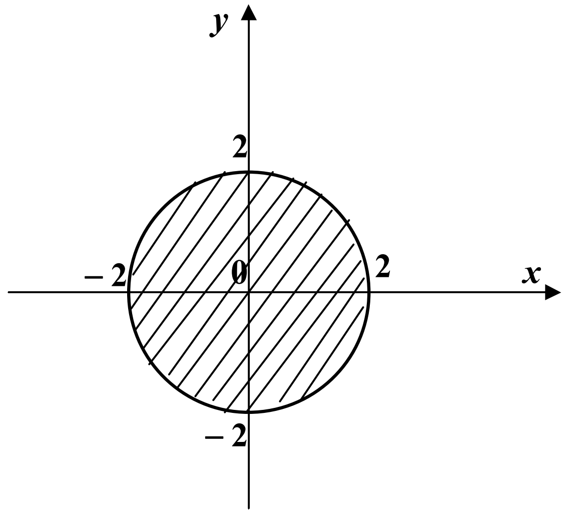


Рис. 2.2

в) $z = ln\left(x^2 - y\right)$.

Область визначення цієї функції визначається з нерівності $x^2 - y > 0$. Межа області – парабола $y = x^2$, яка ділить всю площину на дві частини. Щоб виявити, яка з частин є областю визначення даної функції, тобто задовольняє умову $x^2 - y > 0$, достатньо перевірити цю умову для якої-небудь однієї точки, яка не лежить на параболі. Наприклад, точка $(0;1)$ належить області визначення, тому що $0^2 - (-1) = 1 > 0$. Отже, область визначення даної функції є множина точок, розташованих нижче параболи. Межа (парабола $y = x^2$) не належить до області визначення функції. (рис. 2.3).

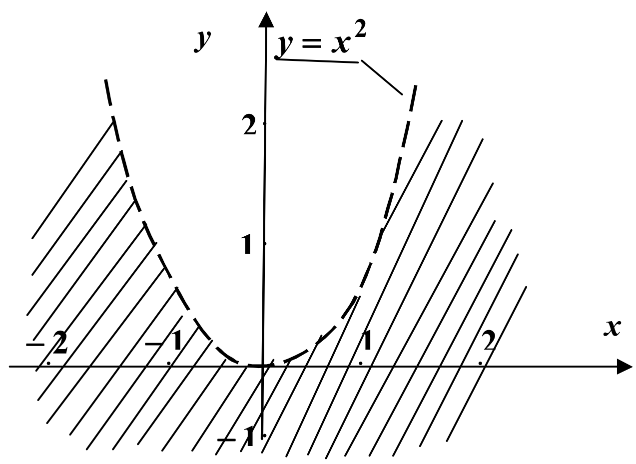


Рис. 2.3

г) $z = arcsin(2x - y)$.

Областю визначення цієї функції є сукупність пар x і y, які задовольняють нерівностям $-1 \le 2x - y \le 1$. На площині Oxy ця область є смуга, обмежена прямими $2x - y + 1 = 0$ і $2x - y - 1 = 0$ (рис.2.4)

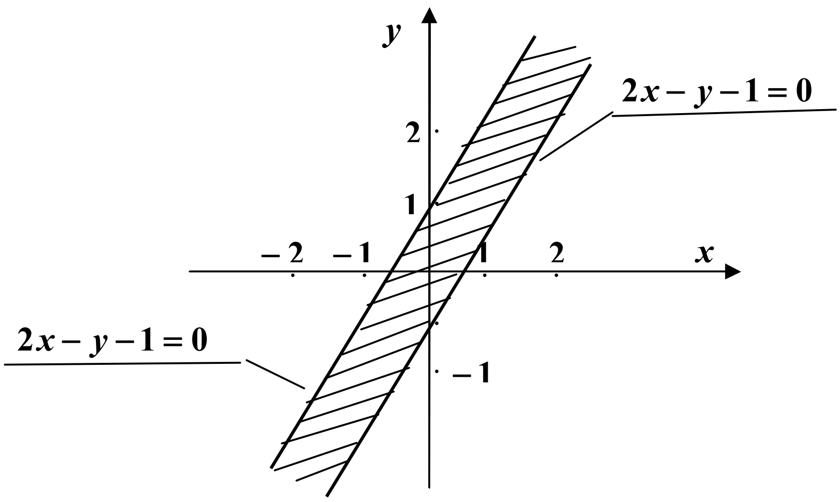


Рис. 2.4

2. **Знайти частинні похідні функцій:**

а) $z = x^3 y^2 - 2x + 3y^5 - 1$.

Функція z є функцією двох змінних x і y. Припускаючи, що y стала й обчислюючи похідну від функції z по x, знаходимо частинну похідну по x: $\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \cdot 3x^2 - 2 = 3x^2 y - 2$. Припускаючи, що стала x й обчислюючи похідну від функції z по y, знаходимо частинну похідну по y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 \cdot 2y + 15y^4 = 2x^3 y + 15y^4.$$

б) $z = 2x^7 - 5tgx \cdot y^3 - arcsin 5y + \sqrt{3}$.

Вважаючи, що $y = const$, маємо: $\frac{\partial z}{\partial x} = 14x^6 - 5y^3 \cdot \frac{1}{cos^2 x}$.

Якщо, $x = const$, то $\frac{\partial z}{\partial y} = -5tgx \cdot 3y^2 - \frac{1}{\sqrt{1 - (5y)^2}} \cdot 5 = -15y^2 tgx - \frac{5}{\sqrt{1 - 25y^2}}$.

в) $z = 3^{sin\, y} \cdot x^4$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3^{sin\, y} \cdot \left(x^4\right)'_x = 3^{sin\, y} \cdot 4x^3; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^4 \cdot \left(3^{sin\, y}\right)'_y = x^4 \cdot 3^{sin\, y} \ln 3 \cdot cos\, y.$$

г) $z = \ln 3x \cdot \operatorname{arctg}\left(y^2 - 1\right)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{arctg}\left(y^2 - 1\right) \cdot \left(\ln 3x\right)'_x = \operatorname{arctg}\left(y^2 - 1\right) \cdot \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{1}{x} \cdot \operatorname{arctg}\left(y^2 - 1\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \ln 3x \cdot \left(\operatorname{arctg}\left(y^2 - 1\right)\right)'_y = \ln 3x \cdot \frac{1}{1 + \left(y^2 - 1\right)^2} \cdot 2y = \frac{2y \ln 3x}{1 + \left(y^2 - 1\right)^2}.$$

д) $z = \dfrac{\cos y}{3x^2 + 5}$.

При диференціюванні по x функція має вигляд $z = \dfrac{c}{u}$. Тому

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos y \cdot \left(- \frac{1}{\left(3x^2 + 5\right)^2} \right) \cdot \left(3x^2 + 5\right)'_x = - \frac{\cos y}{\left(3x^2 + 5\right)^2} \cdot 6x .$$

При диференціюванні по y функція набуває вигляду $z = \dfrac{u}{c}$, тому

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{3x^2 + 5} \cdot \left(- \sin y\right) = - \frac{\sin y}{3x^2 + 5}.$$

є) $z = \dfrac{\sqrt{x^3} + 2}{\ln\left(2 - y\right)}$.

Аналогічно попередньому прикладу маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\ln\left(2 - y\right)} \cdot \left(\sqrt{x^3} + 2 \right)'_x = \frac{1}{\ln\left(2 - y\right)} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{x}}{2\ln\left(2 - y\right)};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\sqrt{x^3} + 2 \right) \cdot \left(\frac{1}{\ln\left(2 - y\right)} \right)'_y = \left(\sqrt{x^3} + 2 \right) \cdot \left(- \frac{1}{\ln^2\left(2 - y\right)} \cdot \frac{1}{2 - y} \cdot \left(-1\right) \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{x^3} + 2}{\left(2 - y\right)\ln^2\left(2 - y\right)}.$$

ж) $z = \dfrac{2x - y}{\sin xy}$.

При знаходженні частинних похідних $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ маємо функцію z у вигляді дробу, в чисельнику і знаменнику якого знаходяться змінні. Тому застосуємо правило диференціювання частки двох функцій, а саме:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\left(2x - y\right)'_x \cdot \sin xy - \left(2x - y\right) \cdot \left(\sin xy\right)'_x}{\sin^2 xy} = \frac{2\sin xy - \left(2x - y\right) \cdot \cos xy \cdot y}{\sin^2 xy};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(2x-y)'_y \sin xy-(2x-y)\cdot(\sin xy)'_y}{\sin^2 xy}=\frac{-\sin xy-(2x-y)\cdot\cos xy\cdot x}{\sin^2 xy}.$$

з) $z=x^{\sin y}$.

При диференціюванні по x задану функцію треба розглядати як степеневу $\left(z=u^c\right)$. Тоді отримаємо $\frac{\partial z}{\partial x}=\sin y\cdot x^{\sin y-1}$. При диференціюванні по y функція має вигляд показникової $\left(z=c^u\right)$. Будемо мати $\frac{\partial z}{\partial y}=x^{\sin y}\cdot \ln x\cdot(\sin y)'_y=x^{\sin y}\ln x\cdot\cos y$.

і) $z=(\cos y+3)^{ctgx}$.

Аналогічно попередньому прикладу маємо: по x функція є показниковою, а по y - степеневою. Знаходимо:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(\cos y+3)^{ctgx}\ln(\cos y+3)\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=ctgx\cdot(\cos y+3)^{ctgx-1}\cdot(-\sin y).$$

к) $z=tg^2\frac{x}{y}$.

Обчислюючи $\frac{\partial z}{\partial x}$, вважаємо $y=const$ і знаходимо частинну похідну від складеної функції по x: $\frac{\partial z}{\partial x}=2tg\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{2tg\frac{x}{y}}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}$.

Обчислюючи похідну $\frac{\partial z}{\partial y}$, вважаємо $x=const$, а функцію z - складеною по y: $\frac{\partial z}{\partial y}=2tg\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_y=\frac{2tg\frac{x}{y}}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)=-\frac{2x\cdot tg\frac{x}{y}}{y^2\cos^2\frac{x}{y}}$.

л) $z=\sqrt{x^2-xy+y^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{x^2-xy+y^2}}\cdot\left(x^2-xy+y^2\right)'_x=\frac{2x-y}{2\sqrt{x^2-xy+y^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{x^2-xy+y^2}}\cdot\left(x^2-xy+y^2\right)'_y=\frac{-x+2y}{2\sqrt{x^2-xy+y^2}}.$$

м) $z=e^{arcsin\frac{y}{x^2}}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{arcsin\frac{y}{x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x^2}\right)^2}}\cdot\left(\frac{y}{x^2}\right)'_x=\frac{e^{arcsin\frac{y}{x^2}}}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^4}}}\cdot y\cdot\left(-2x^{-3}\right)=-\frac{2ye^{arcsin\frac{y}{x^2}}}{x^3\sqrt{1-\frac{y^2}{x^4}}}=$$

$$=-\frac{2ye^{arcsin\frac{y}{x^2}}}{\sqrt{x^6-x^2y^2}};\ \frac{\partial z}{\partial y}=e^{arcsin\frac{y}{x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x^2}\right)^2}}\cdot\left(\frac{y}{x^2}\right)'_y=\frac{e^{arcsin\frac{y}{x^2}}}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^4}}}\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{e^{arcsin\frac{y}{x^2}}}{\sqrt{x^4-y^2}}.$$

н) $z=ln\frac{1}{xy}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1/(xy)}\cdot\left(\frac{1}{xy}\right)'_x=xy\cdot\frac{1}{y}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1/(xy)}\cdot\left(\frac{1}{xy}\right)'_y=xy\cdot\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)=-\frac{1}{y}.$$

3. **Довести, що функція $u=y^2\,sin\left(x^2-y^2\right)$ задовольняє рівняння $y^2\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+xy\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=2xu$.**

Знайдемо частинні похідні функції $u(x;y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2\cdot cos\left(x^2-y^2\right)\cdot 2x;\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=2y\cdot sin\left(x^2-y^2\right)+y^2\cdot cos\left(x^2-y^2\right)\cdot(-2y).$$

Підставимо саму функцію u та її частинні похідні в наведене рівняння:

$$y^2\cdot y^2\,cos\left(x^2-y^2\right)\cdot 2x+xy\cdot\left(2y\,sin\left(x^2-y^2\right)+y^2\,cos\left(x^2-y^2\right)\cdot(-2y)\right)=$$
$$=2x\cdot y^2\,sin\left(x^2-y^2\right).$$

Будемо мати:

$$2xy^4\,cos\left(x^2-y^2\right)+2xy^2\,sin\left(x^2-y^2\right)-2xy^4\,cos\left(x^2-y^2\right)=2xy^2\,sin\left(x^2-y^2\right);$$
$$2xy^2\,sin\left(x^2-y^2\right)\equiv 2xy^2\,sin\left(x^2-y^2\right).$$

Отримано тотожність, це означає, що функція u задовольняє рівняння.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти область визначення функцій:

а) $z=\sqrt{2-x^2-2y^2}$; б) $z=\dfrac{5}{x^2+y^2}$; в) $z=ln(xy)$; г) $z=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}}}$.

2. Знайти частинні похідні функцій:

а) $z=3x^2+6x^2y-7y^5+2$;

б) $z=2^{-x}\cdot sin\sqrt{y}$;

в) $z=\dfrac{arccos\,y^2}{x^2+1}$;

г) $z=\dfrac{x-y}{x+y}$;

д) $z=(2x+3y)\cdot tg(xy)$;

є) $z=(lg\,y)^{\frac{x^2}{3}}$;

ж) $z=ctg\sqrt{xy}$;

з) $z=e^{\frac{x}{\sqrt{y}}}$.

3. Довести, що функція $z=x^y$ задовольняє рівняння $\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{ln\,x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$.

2.2. Повний диференціал функції. Похідні складених функцій

Повний приріст функції $z=f(x,y)$ визначається за формулою

$$\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y), \qquad (2.1)$$

де Δx і Δy - прирости незалежних змінних.

Повним диференціалом функції $z=f(x,y)$ називається головна лінійна відносно Δx і Δy частина приросту функції, яка обчислюється за формулою

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy, \qquad (2.2)$$

де $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$.

Для наближеного обчислення значення функції двох змінних користуються наближеною рівністю

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}dy. \qquad (2.3)$$

Ця наближена рівність тим точніша, чим менше величини dx і dy.

Нехай $z = f(x, y)$ - функція двох змінних x і y, кожна з яких, в свою чергу, є функцією незалежної змінної t: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тоді функція $f(x(t), y(t))$ є ***складеною функцією змінної t***.

Похідну цієї функції знаходять за формулою

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \qquad \textbf{(2.4)}$$

Зокрема, якщо $z = f(x, y)$, а $y = y(x)$, то

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \qquad \textbf{(2.5)}$$

Нехай $z = f(x, y)$ - функція двох змінних x та y, які також залежать від змінних u та v: $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$. Тоді функція $z = f(x(u,v), y(u,v))$ є ***складеною функцією незалежних змінних u*** та v, а її частинні похідні по цим змінним обчислюються за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}; \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \qquad \textbf{(2.6)}$$

Зразки розв'язування задач

1. **Знайти повний диференціал функцій:**

а) $z = x^3 y + 4x^5 - 3\sqrt{y} + 1$.

Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot 3x^2 + 20x^4 = 3x^2 y + 20x^4; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 - \frac{3}{2\sqrt{y}}.$$

За формулою (2.2) будемо мати:

$$dz = \left(3x^2 y + 20x^4\right)dz + \left(x^3 - \frac{3}{2\sqrt{y}}\right)dy.$$

б) $z = 3\lg x - 8y^3 + \sin 5x \cdot e^{y^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3}{x \ln 10} + e^{y^2} \cdot \cos 5x \cdot 5; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -24y^2 + \sin 5x \cdot e^{y^2} \cdot 2y.$$

Отже, $dz = \left(\frac{3}{x \ln 10} + 5e^{y^2} \cos 5x\right)dx + \left(2e^{y^2} \sin 5x - 24y^2\right)dy$.

в) $z = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}-\frac{1}{y};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}+\frac{x}{y^2}.$$ Будемо мати: $dz=-\left(\frac{y}{x^2}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{y^2}\right)dy$.

г) $z=ln\,tg(x\,y)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{tg(x\,y)}\cdot\frac{1}{cos^2(x\,y)}\cdot y=\frac{cos(x\,y)}{sin(x\,y)}\cdot\frac{y}{cos^2(x\,y)}=\frac{y}{sin(x\,y)\cdot cos(x\,y)}=\frac{2y}{sin(2xy)};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{tg(x\,y)}\cdot\frac{1}{cos^2(x\,y)}\cdot x=\frac{2x}{sin(2x\,y)}.$$

Тоді отримаємо:

$$dz=\frac{2y}{sin(2x\,y)}dx+\frac{2x}{sin(2xy)}dy=\frac{2}{sin(2xy)}\cdot(ydx+xdy).$$

2. **Обчислити наближено за допомогою повного диференціала:** $\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3}$ **.**

Розглянемо функцію $z=\sqrt{x^3+y^3}$, тоді $x_1=1{,}02$; $y_1=1{,}97$. Покладемо, що $x_0=1$, $y_0=2$, обчислимо $dx=x_1-x_0=1{,}02-1=0{,}02$, $dy=y_1-y_0=1{,}97-2=-0{,}03$. Тоді $z(1;2)=\sqrt{1^3+2^3}=3$. Знаходимо частинні похідні і їх значення в точці $(1;2)$, а саме

$$z'_x=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}},\ \text{тоді}\ z'_x(1;2)=\frac{3\cdot 1^2}{2\sqrt{1^3+2^3}}=0{,}5;$$

$$z'_y=\frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}},\ \text{тоді}\ z'_y(1;2)=\frac{3\cdot 2^2}{2\sqrt{1^3+2^3}}=2.$$

Повний диференціал

$$dz(1;2)=z'_x(1;2)dx+z'_y(1;2)dy=0{,}5\cdot 0{,}02+2\cdot(-0{,}03)=-0{,}05.$$

Користуючись формулою (2.3), отримаємо: $z(1{,}02;1{,}97)\approx z(1;2)+dz(1;2)$, а саме: $\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3}\approx 3-0{,}05=2{,}95$.

3. **Знайти** $\frac{dz}{dt}$**, якщо** $z=2x^3+xy^2$, $x=e^t$, $y=sin\,t$**.**

Функція $z=f(x,y)$ є складеною функцією змінної t, тому за формулою (2.4) отримаємо: $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$.

Будемо мати: $\frac{\partial z}{\partial x}=6x^2+y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2xy$, $\frac{dx}{dt}=e^t$, $\frac{dy}{dt}=cos\,t$.

Тоді шукана похідна запишеться у вигляді:

$$\frac{dz}{dt}=\left(6x^2+y^2\right)\cdot e^t+2xy\cdot\cos t\,.$$

Підставляючи замість x і y їхні вирази через t, дістанемо:

$$\frac{dz}{dt}=\left(6e^{2t}+\sin^2 t\right)\cdot e^t+2e^t\cdot\sin t\cdot\cos t=e^t\cdot\left(6e^{2t}+\sin^2 t+\sin 2t\right).$$

4. **Знайти** $\frac{dz}{dx}$**, якщо** $z=u^2e^v$**,** $u=\sin x$**,** $v=\cos x$**.**

Функція $z=f(u,v)$ є складеною функцією змінної x, тому її похідна обчислюватиметься за формулою (2.4):

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}\,.$$

Будемо мати: $\frac{\partial z}{\partial u}=2u\cdot e^v$, $\frac{\partial z}{\partial v}=u^2e^v$, $\frac{du}{dx}=\cos x$, $\frac{dv}{dx}=-\sin x$.

Тоді $\frac{dz}{dx}=2ue^v\cdot\cos x-u^2e^v\cdot\sin x=2\sin x\cdot e^{\cos x}\cdot\cos x-\sin^2 x\cdot e^{\cos x}\cdot\sin x=$

$$=e^{\cos x}\left(\sin 2x-\sin^3 x\right).$$

5. **Знайти** $\frac{dz}{dx}$**, якщо** $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$**,** $y=\sqrt{x^2+1}$**.**

Згідно з формулою (2.5): $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$. Обчислимо:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{y}{x^2}=-\frac{y}{x^2+y^2}\,,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}\,,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

Тоді $\frac{dz}{dx}=-\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Підставляючи замість y його значення через x, дістанемо:

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+x^2+1}+\frac{x^2}{\left(x^2+x^2+1\right)\cdot\sqrt{x^2+1}}=-\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\left(2x^2+1\right)\cdot\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=-\frac{x^2+1-x^2}{\left(2x^2+1\right)\cdot\sqrt{x^2+1}}=-\frac{1}{\left(2x^2+1\right)\cdot\sqrt{x^2+1}}.$$

6. **Знайти** $\frac{\partial z}{\partial u}$ **і** $\frac{\partial z}{\partial v}$**, якщо** $z=x^2y-xy^2$, $x=u\sin v$, $y=v\cos u$.

Функція $z=f(x,y)$ є складеною функцією змінних u та v. Для обчислення її похідних застосуємо формули (2.6).

Будемо мати: $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$.

Знайдемо частинні похідні: $\frac{\partial z}{\partial x}=2xy-y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x^2-2xy$,

$\frac{\partial x}{\partial u}=\sin v$, $\frac{\partial x}{\partial v}=u\cos v$, $\frac{\partial y}{\partial u}=-v\sin u$, $\frac{\partial y}{\partial v}=\cos u$.

Підставляючи, отримаємо:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\left(2xy-y^2\right)\sin v+\left(x^2-2xy\right)\cdot(-v\cdot\sin u),$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\left(2xy-y^2\right)\cdot u\cos v+\left(x^2-2xy\right)\cdot\cos u.$$

Замінюючи x і y виразами через u і v, остаточно дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\left(2u\cdot\sin v\cdot v\cos u-v^2\cos^2 u\right)\sin v+\left(u^2\sin^2 v-2u\sin v\cdot v\cos u\right)\cdot(-v\sin u)=$$

$$=v\cos u\cdot\sin v\cdot(2u\cdot\sin v-v\cos u)+uv\cdot\sin u\cdot\sin v(2v\cos u-u\sin v),$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\left(2u\cdot\sin v\cdot v\cos u-v^2\cos^2 u\right)u\cdot\cos v+\left(u^2\sin^2 v-2u\sin v\cdot v\cos u\right)\cdot\cos u=$$

$$=u\cdot v\cos v\cdot\cos u\cdot(2u\cdot\sin v-v\cos u)+u\sin v\cdot\cos u(u\sin v-2v\cos u).$$

7. **Знайти** $\frac{\partial z}{\partial u}$ **і** $\frac{\partial z}{\partial v}$**, якщо** $z=x^2\ln y$, $x=\frac{u}{v}$, $y=uv$.

Як і в попередньому прикладі $z=z(x,y)$ - складена функція змінних u та v. Обчислимо: $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\ln y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2}{y}$, $\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{v}$, $\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{u}{v^2}$, $\frac{\partial y}{\partial u}=v$, $\frac{\partial y}{\partial v}=u$.

За формулами (2.6) маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=2x\ln y\cdot\frac{1}{v}+\frac{x^2}{y}\cdot v=2\frac{u}{v}\cdot\ln(uv)\cdot\frac{1}{v}+\frac{u^2}{v^2\cdot uv}\cdot v=2\frac{u}{v^2}\cdot\ln(uv)+\frac{u}{v^2}=$$

$$=\frac{u}{v^2}\cdot(2\cdot\ln(uv)+1),$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=2x\,ln\,y\cdot\left(-\frac{u}{v^2}\right)+\frac{x^2}{y}\cdot u=-2\frac{u}{v}\cdot ln(uv)\cdot\frac{u}{v^2}+\frac{u^2\cdot u}{v^2\cdot uv}=\frac{u^2}{v^3}\cdot(1-2\,ln(uv)).$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти повний диференціал функцій:

   а) $z=2y^4\sin x-3\sqrt{x}+4e^{5y}-\dfrac{1}{3}$;

   б) $z=ln\sqrt{xy}$;

   в) $z=arctg\dfrac{x+y}{1-xy}$.

2. Обчислити наближено $0{,}98^{3{,}03}$.

3. Знайти $\dfrac{dz}{dt}$, якщо $z=e^{2x-3y}$, $x=tgt$, $y=t^2-1$.

4. Знайти $\dfrac{dz}{dt}$, якщо $z=\dfrac{x^2-y}{x^2+y}$, $y=3x+1$.

5. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z=5x^2+y^2$, $x=\sqrt{uv}$, $y=e^{2u+v}$.

2.3. Частинні похідні вищих порядків. Похідні неявно заданих функцій

Якщо задано функцію $z=f(x,y)$ і обчислені її частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, то вони також є функціями незалежних змінних x і y, а тому від кожної із них можна обчислити похідні як по змінній x так і по змінній y.

Частинні похідні від частинних похідних першого порядку називаються ***частинними похідними другого порядку***. Вони позначаються:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx},\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy},\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{yx}.$$

Аналогічно означаються і позначаються частинні похідні вищих порядків.

Частинні похідні, які відмінні одна від одної лише порядком диференціювання, називаються ***мішаними похідними***. Вони є рівними між собою при умові їх неперервності, тобто $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Похідна від неявної функції, яку задано рівнянням $F(x, y) = 0$ може бути обчислена за формулою:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}. \tag{2.7}$$

Частинні похідні неявної функції $z = \varphi(x, y)$, заданої рівнянням $F(x, y, z) = 0$, можуть бути обчисленні за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}. \tag{2.8}$$

Зразки розв'язування задач

1. **Знайти частинні похідні другого порядку:**

а) $z = 2x^3 + x^2 y + xy^2 + 2y^3$.

Знайдемо перші похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 + 2xy + y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2xy + 6y^2.$$

Знайдемо другі похідні:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(6x^2 + 2xy + y^2\right) = 12x + 2y, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(6x^2 + 2xy + y^2\right) = 2x + 2y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + 2xy + 6y^2\right) = 2x + 2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + 2xy + 6y^2\right) = 2x + 12y.$$

б) $z = xy + \frac{x}{y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x - \frac{x}{y^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y + \frac{1}{y}\right) = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y + \frac{1}{y}\right) = 1 - \frac{1}{y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x - \frac{x}{y^2} \right) = 1 - \frac{1}{y^2}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x - \frac{x}{y^2} \right) = 1 - \frac{2x}{y^3}.$$

в) $z = ln\left(x^2 + y^2\right)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2\left(x^2 + y^2\right) - 2x \cdot 2x}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{2x^2 + 2y^2 - 4x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{2 \cdot \left(y^2 - x^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{2x}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \cdot 2y = -\frac{4xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2\left(x^2 + y^2\right) - 2y \cdot 2y}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{2x^2 + 2y^2 - 4y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{2 \cdot \left(x^2 - y^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2}.$$

2. **Перевірити, що** $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ **для функції** $z = arcctg\left(x + 2y\right)$**.**

Знаходимо перші похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{1 + \left(x + 2y\right)^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2}{1 + \left(x + 2y\right)^2}.$$

Обчислимо мішані похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\left[1 + \left(x + 2y\right)^2\right]^2} \cdot 2\left(x + 2y\right) \cdot 2 = \frac{4\left(x + 2y\right)}{\left[1 + \left(x + 2y\right)^2\right]^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{2}{\left[1 + \left(x + 2y\right)^2\right]^2} \cdot 2\left(x + 2y\right) = \frac{4\left(x + 2y\right)}{\left[1 + \left(x + 2y\right)^2\right]^2}.$$

Як бачимо, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

3. **Перевірити, що функція** $u = e^{\frac{x}{y}}$ **задовольняє рівняння** $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$**.**

Знайдемо частинні похідні першого та другого порядку, які є в даному рівнянні:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right) = -\frac{xe^{\frac{x}{y}}}{y^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) \cdot y - e^{\frac{x}{y}}}{y^2} = \frac{-xe^{\frac{x}{y}} - ye^{\frac{x}{y}}}{y^3} = -\frac{e^{\frac{x}{y}}(x+y)}{y^3}.$$

Підставляємо знайдені похідні в наше рівняння:

$$\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y} + \frac{xe^{\frac{x}{y}}}{y^2} - y \cdot \frac{e^{\frac{x}{y}}(x+y)}{y^3} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{y \cdot e^{\frac{x}{y}} + xe^{\frac{x}{y}}}{y^2} - \frac{e^{\frac{x}{y}}(x+y)}{y^2} = 0.$$

Отримаємо: $\frac{e^{\frac{x}{y}}(x+y)}{y^2} - \frac{e^{\frac{x}{y}}(x+y)}{y^2} = 0$, а саме $0 \equiv 0$.

Ми отримали тотожність, тому функція $u = e^{\frac{x}{y}}$ задовольняє дане рівняння.

4. **Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ від функцій, заданих неявно:**

а) $x^4 y + x^3 y^2 - y^5 - 5 = 0$.

$$F(x,y) = x^4 y + x^3 y^2 - y^5 - 5.$$

Знайдемо частинні похідні: $F'_x = 4x^3 y + 3x^2 y$, $\quad F'_y = x^4 + 2x^3 y - 5y^4$.

За формулою (2.7) маємо: $\frac{dy}{dx} = -\frac{4x^3 y + 3x^2 y^2}{x^4 + 2x^3 y - 5y^4}$.

б) $x^2 \ln y - y^2 \ln x = a$.

$$F(x,y) = x^2 \ln y - y^2 \ln x - a.$$

$$F'_x = 2x \ln y - \frac{y^2}{x} = \frac{2x^2 \ln y - y^2}{x}, \qquad F'_y = \frac{x^2}{y} - 2y \ln x = \frac{x^2 - 2y^2 \ln x}{y}.$$

За формулою (2.7) маємо: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y \cdot \left(2x^2 \ln y - y^2\right)}{x \cdot \left(x^2 - 2y^2 \ln x\right)} = \frac{y \cdot \left(y^2 - 2x^2 \ln y\right)}{x \cdot \left(x^2 - 2y^2 \ln x\right)}$.

в) $xy + \ln y + \ln 2x = \sin xy$.

$$F(x,y) = xy + \ln y + \ln 2x - \sin xy.$$

Тоді $F'_x = y + \frac{1}{2x} \cdot 2 - \cos x \cdot y = y + \frac{1}{x} - y \cos xy$, $F'_y = x + \frac{1}{y} - \cos xy \cdot x$.

Отримаємо: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y + \frac{1}{x} - y \cos xy}{x + \frac{1}{y} - x \cos xy} = -\frac{(xy + 1 - xy \cos xy) \cdot y}{x \cdot (xy + 1 - xy \cos xy)} = -\frac{y}{x}$.

5. **Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ від неявно заданих функцій:**

а) $2x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 5 = 0$.

$$F(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 5.$$

Обчислимо $F'_x = 4x - yz$, $F'_y = 2y - xz$, $F'_z = 2z - xy$.

Зауважимо, що у кожному випадку беручи похідну по одній змінній, дві другі вважаються сталими. За формулами (2.8) маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{4x - yz}{2z - xy} = \frac{yz - 4x}{2z - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y - xz}{2z - xy} = \frac{xz - 2y}{2z - xy}.$$

б) $x + 2y - 3z^2 = e^{y-z}$.

$$F(x, y, z) = x + 2y - 3z^2 - e^{y-z}.$$

Обчислимо $F'_x = 1$, $F'_y = 2 - e^{y-z}$, $F'_z = -6z - e^{y-z} \cdot (-1) = e^{y-z} - 6z$.

Тоді будемо мати: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{e^{y-z} - 6z} = \frac{1}{6x - e^{y-z}}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2 - e^{y-z}}{e^{y-z} - 6z} = \frac{2 - e^{y-z}}{6z - e^{y-z}}.$$

6. $z^3 - 4xz - y^2 = 4$. **Знайти z'_x та z'_y у точці $(1;-2;2)$.**

$$F(x, y, z) = z^3 - 4xz - y^2 - 4.$$

Знайдемо $F'_x = -4z$, $F'_y = -2y$, $F'_z = 3z^2 - 4x$.

За формулами (2.8):

$$z'_x = \frac{4z}{3z^2 - 4x}, \text{ тоді } z'_x(1;-2;2) = \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 1} = 1.$$

$$z'_y = \frac{2y}{3z^2 - 4x}, \text{ тоді } z'_y(1;-2;2) = \frac{2 \cdot (-2)}{3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 1} = -\frac{1}{2}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти частинні похідні другого порядку:

а) $z = 3x^4 + 6xy^2 - 2x^2 y + y^3$;

б) $z = \frac{2x + 3y}{x - y}$;

в) $z = sin(x + cos\, y)$.

2. Показати, що функція $z = \frac{\cos y^2}{x}$ задовольняє рівняння $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial z}{\partial x} = 0$.

3. $z = x \cdot ln\frac{y}{x}$. Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

4. Знайти $\frac{dy}{dx}$ від функцій, заданих неявно:

а) $x \cdot e^y + y \cdot e^x - e^{xy} = 0$; б) $x \cdot \sin y + \cos 2y = \cos x$.

5. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $x^3 + y^3 + z^3 - 2x - 3y - 2z - 4 = 0$.

2.4. Рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні. Екстремум функції двох змінних

Рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $F(x, y, z) = 0$ в даній її точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ мають вигляд:

$$F'_x\big|_{M_0} \cdot (x - x_0) + F'_y\big|_{M_0} \cdot (y - y_0) + F'_z\big|_{M_0} \cdot (z - z_0) = 0; \qquad (2.9)$$

$$\frac{x - x_0}{F'_x\big|_{M_0}} = \frac{y - y_0}{F'_y\big|_{M_0}} = \frac{z - z_0}{F'_z\big|_{M_0}}. \qquad (2.10)$$

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M_0(x_0; y_0)$. Точка M_0 називається ***точкою максимуму (мінімуму)*** функції $f(x, y)$, якщо знайдеться такій окіл точки M_0, в якому для будь-якої точки $M(x, y)$ виконується нерівність: $f(x, y) \le f(x_0, y_0)$ $\quad (f(x, y) \ge f(x_0, y_0))$. Максимуми і мінімуми функції називаються її ***екстремумами***, а точки, в яких досягаються екстремуми - ***точками екстремуму***.

Необхідна умова існування екстремуму.

Якщо диференційована функція $f(x, y)$ має в точці $M_0(x_0; y_0)$ екстремум, то в цій точці виконуються рівності:

$$f'_x(x, y) = 0, \qquad f'_y(x, y) = 0. \qquad (2.11)$$

Точки, в яких виконуються рівності (2.11), називаються ***точками можливого екстремуму*** або ***стаціонарними***.

Достатня умова існування екстремуму функції.

Нехай у точці $M_0(x_0;y_0)$ можливого екстремуму і деякому її околі функція $z=f(x,y)$ має неперервні частинні похідні другого порядку. Позначимо $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$, $B=f''_{xy}(x_0,y_0)$, $C=f''_{yy}(x_0,y_0)$ і покладемо $\Delta=AC-B^2$. Тоді:

а) якщо $\Delta>0$, то M_0 - точка екстремуму, причому при $A<0$ - точка максимуму, при $A>0$ - мінімуму;

б) якщо $\Delta<0$, то в точці M_0 екстремуму немає;

в) у випадку $\Delta=0$, функція $f(x,y)$ у стаціонарній точці M_0 може мати екстремум або ні.

Зразки розв'язування задач

1. **Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $F(x,y,z)=0$ у точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$:**

а) $z=x^2-3xy-y^2$ **у точці** $M_0(1;-1;z_0)$.

Знайдемо z_0: $z_0=1^2-3\cdot1\cdot(-1)-(-1)^2=1+3-1=3$. Отже, $M_0(1;-1;3)$.

Позначимо $F(x,y,z)=x^2-3xy-y^2-z$. Тоді частинні похідні:

$F'_x=2x-3y$, $F'_y=-3x-2y$, $F'_z=-1$.

Обчислимо значення частинних похідних в точці M_0:

$$F'_x\Big|_{M_0}=2\cdot1-3\cdot(-1)=2+3=5,$$

$$F'_y\Big|_{M_0}=-3\cdot1-2\cdot(-1)=-3+2=-1,$$

$$F'_z\Big|_{M_0}=-1.$$

Згідно з формулою (2.9), рівняння дотичної площини має вигляд:

$5(x-1)-1(y+1)-1(z-3)=0$,

$5x-5-y-1-z+3=0$ або $5x-y-z-3=0$.

За формулою (2.10) складемо рівняння нормалі:

$$\frac{x-1}{5}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{-1}.$$

б) $3x-y^3z^2-4z^3xy+2=0$ **у точці** $M_0(1;1;1)$.

Знайдемо $F'_x = 3 - 4z^3 y$, $F'_y = -3y^2 \cdot z^2 - 4z^3 x$, $F'_z = -2y^3 z - 12z^2 xy$.

Значення частинних похідних в точці M_0:

$$F'_x\Big|_{M_0} = 3 - 4 \cdot 1^3 \cdot 1 = 3 - 4 = -1,$$

$$F'_y\Big|_{M_0} = -3 \cdot 1 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 - 4 = -7,$$

$$F'_z\Big|_{M_0} = -2 \cdot 1^3 \cdot 1 - 12 \cdot 1^2 \cdot 1 \cdot 1 = -2 - 12 = -14.$$

Складемо рівняння дотичної площини:

$-1(x-1) - 7(y-1) - 14(z-1) = 0$,

$x - 1 + 7y - 7 + 14z - 14 = 0$ або $x + 7y + 14z - 22 = 0$.

Рівняння нормалі:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-7} = \frac{z-1}{-14} \quad \text{або} \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-1}{14}.$$

2. **Дослідити функції на екстремум:**

а) $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 2y^3$.

Обчислимо частинні похідні функції: $f'_x = 6x^2 - 6y$, $f'_y = -6x + 6y^2$.

Знайдемо стаціонарні точки. Для цього розв’яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 6\left(x^2 - y\right) = 0, \\ 6\left(-x + y^2\right) = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 0. \end{cases}$$

Визначаючи y з першого рівняння і підставляючи його вираз $y = x^2$ у друге, маємо: $x^4 - x = 0$, звідки $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Тоді $y_1 = 0$, $y_2 = 1$.

Отже, точки $M_1(0;0)$ і $M_2(1;1)$ - стаціонарні. Обчислимо частинні похідні другого порядку даної функції: $f''_{xx} = 12x$, $f''_{xy} = -6$, $f''_{yy} = 12y$.

Знайдемо їх значення в стаціонарних точках:

$A_1 = f''_{xx}(0,0) = 0$, $B_1 = f''_{xy}(0,0) = -6$, $C_1 = f''_{yy}(0,0) = 0$;

$A_2 = f''_{xx}(1,1) = 12$, $B_2 = f''_{xy}(1,1) = -6$, $C_2 = f''_{yy}(1,1) = 12$.

Враховуємо, що $\Delta_1 = A_1 C_1 - B_1^2 = -36 < 0$, отже, в точці $M_1(0;0)$ екстремуму немає. Обчислимо $\Delta_2 = A_2 C_2 - B_2^2 = 108 > 0$ та $A_2 = 12 > 0$, а тому в точці $M_2(1;1)$ дана функція має мінімум, причому $f(1,1) = -2$.

б) $z=(x-1)^2+2y^2-1$.

Частинні похідні першого порядку: $z'_x=2(x-1)$ та $z'_y=4y$. Знайдемо стаціонарні точки:

$$\begin{cases} z'_x=0 \\ z'_y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x-1)=0 \\ 4y=0 \end{cases}, \text{ звідки } \begin{cases} x=1 \\ y=0. \end{cases}$$

Отже, точка $M_0(1;0)$ є стаціонарною. Частинні похідні другого порядку:

$$z''_{xx}=(2(x-1))'_x=2, \quad z''_{xy}=(2(x-1))'_y=0, \quad z''_{yy}=(4y)'_y=4.$$

Тоді $A=2$, $B=0$, $C=4$. Обчислимо $\Delta=AC-B^2=2\cdot4-0=8>0$.

Отже, в точці $M_0(1;0)$ є екстремум. Так як $A=2>0$, то в точці M_0 функція має мінімум:

$$z_{min}=z(M_0)=(1-1)^2+2\cdot0^2-1=-1.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні у заданій точці:

   а) $z=x^2+2y^2$, $M_0(1;1;z_0)$;

   б) $z=arctg\dfrac{y}{x}$, $M_0(1;1;z_0)$;

   в) $x^2+y^2-z^2-xy=0$, $M_0(-1;0;1)$.

2. Дослідити функції на екстремум:

   а) $z=x^2+xy+y^2-2x-3y$;

   б) $z=x^3+y^3-9xy$.

Розділ 3
НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

3.1. Поняття первісної функції та невизначеного інтеграла. Метод безпосереднього інтегрування

Функція $F(x)$ називається ***первісною функції*** $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, якщо $F(x)$ диференційовна на $(a;b)$ і $F'(x)=f(x)$ для всіх $x\in(a;b)$.

Очевидно, що будь-яка з функцій $F(x)+C$, де C - довільна стала, також є первісною функції $f(x)$ на цьому проміжку.

Сукупність усіх первісних функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$ називають ***невизначеним інтегралом*** функції $f(x)$ на цьому проміжку і позначають

$$\int f(x)dx = F(x)+C,$$

де $f(x)$ - підінтегральна функція, $f(x)dx$ - підінтегральний вираз, C - довільна стала.

Операцію знаходження невизначеного інтеграла від функції називають ***інтегруванням*** цієї функції.

Властивості невизначеного інтеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.
3. $\int dF(x) = F(x)+C$.
4. $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$.
5. $\int [f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.
6. Якщо $\int f(x)dx = F(x)+C$ і $u=\varphi(x)$ - довільна функція, що має неперервну похідну, то $\int f(u)du = F(u)+C$.

При обчисленні невизначених інтегралів зручно користуватися наступними правилами: якщо $\int f(x)dx = F(x)+C$, тоді

$$\int f(kx)dx = \frac{1}{k}F(kx)+C,$$

$$\int f(x+b)dx = F(x+b)+C,$$

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C,$$

де k та b - сталі величини.

Таблиця основних інтегралів

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ n\neq -1$,

1'. $\int dx = x+C$,

2. $\int \dfrac{dx}{x} = ln|x|+C$,

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{ln\,a}+C,\ a>0,\ a\neq 1$,

3'. $\int e^x dx = e^x + C$,

4. $\int sin\,xdx = -cos\,x+C$,

5. $\int cos\,xdx = sin\,x+C$,

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$,

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$,

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$,

8'. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad a > 0$,

9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$,

9'. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$,

10. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0$,

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$,
$a \neq 0$,

12. $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C$,

13. $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C$,

14. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$,

15. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

<u>Зауваження.</u> Варто відзначити, що задача інтегрування функції вирішується неоднозначно. Тобто один і той же інтеграл може бути обчислений не єдиним методом.

Метод безпосереднього інтегрування полягає у зображенні вихідного інтеграла у вигляді алгебраїчної суми табличних інтегралів.

Зразки розв'язування задач

Обчислити інтеграли.

1. $\int \left(x^2 - 2x\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + \frac{5}{x} \right) dx$.

Користуючись властивостями 4 та 5, будемо мати:

$$\int \left(x^2 - 2x\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + \frac{5}{x} \right) dx = \int x^2 dx - \int 2x\sqrt{x}dx + \int 3\sqrt[3]{x}dx + \int \frac{5}{x}dx = \int x^2 dx - 2\int x^{3/2}dx +$$

$$+ 3\int x^{\frac{1}{3}}dx + 5\int \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} - 2\frac{x^{5/2}}{5/2} + 3\frac{x^{4/3}}{4/3} + 5\ln|x| + C = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{5}\sqrt{x^5} + \frac{9}{4}\sqrt[3]{x^4} + 5\ln|x| + C.$$

2. $\int \left(5^x - \frac{3}{\cos^2 x} + \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \int 5^x dx - 3\int \frac{dx}{\cos^2 x} + 4\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{5^x}{\ln 5} - 3tgx +$
$+ 4\arcsin x + C.$

3. $$\int\left(\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt[5]{x}}\right)^2 dx=\int\left(x-2\cdot\sqrt{x}\cdot\frac{3}{\sqrt[5]{x}}+\frac{9}{\sqrt[5]{x^2}}\right)dx=\int\left(x-6x^{\frac{3}{10}}+9x^{-\frac{2}{5}}\right)dx=\frac{x^2}{2}-$$

$$-6\cdot\frac{x^{13/10}}{13/10}+9\cdot\frac{x^{3/5}}{3/5}+C=\frac{1}{2}x^2-\frac{60}{13}\sqrt[10]{x^{13}}+15\sqrt[5]{x^3}+C.$$

4. $$\int\frac{\sqrt[3]{x}+2x-x^4}{x^5}dx=\int\frac{\sqrt[3]{x}}{x^5}dx+2\int\frac{x}{x^5}dx-\int\frac{x^4}{x^5}dx=\int\left(x^{-\frac{14}{3}}+2x^{-4}-x^{-1}\right)dx=$$

$$=\frac{x^{-11/3}}{-11/3}+2\frac{x^{-3}}{-3}-ln|x|+C=-\frac{3}{11\sqrt[3]{x^{11}}}-\frac{2}{3x^3}-ln|x|+C.$$

5. $$\int\left(3\sin 6x-\frac{2}{5x-1}+e^{\frac{x}{3}}\right)dx.$$

Тут, крім властивостей 4 та 5, застосуємо правила інтегрування. Дістанемо:

$$\int\left(3\sin 6x-\frac{2}{5x-1}+e^{\frac{x}{3}}\right)dx=3\int\sin 6x dx-2\int\frac{dx}{5x-1}+\int e^{\frac{x}{3}}dx=3\left(-\frac{1}{6}\cos 6x\right)-$$

$$-2\cdot\frac{1}{5}ln|5x-1|+3e^{\frac{x}{3}}+C=-\frac{1}{2}\cos 6x-\frac{2}{5}ln|5x-1|+3e^{\frac{x}{3}}+C.$$

6. $$\int\left(\frac{3}{8+5x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\right)dx=\int\left(\frac{3}{8+\left(\sqrt{5}x\right)^2}-\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\right)dx=3\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{8}}arctg\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{8}}-$$

$$-\frac{1}{2}\arcsin 2x+C=\frac{3}{2\sqrt{10}}arctg\frac{\sqrt{5}x}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\arcsin 2x+C.$$

7. $$\int\frac{x^2dx}{1+x^2}.$$

Інтеграл не є табличним, тому за допомогою алгебраїчних перетворень треба підінтегральну функцію подати у такому вигляді, щоб можна було застосувати властивості невизначеного інтеграла та обчислити його. Для цього в чисельнику дробу додамо і віднімемо 1. Поділивши почленно $\left(1+x^2\right)-1$ на $\left(1+x^2\right)$, отримаємо алгебраїчну суму двох табличних інтегралів:

$$\int \frac{x^2dx}{1+x^2}=\int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}dx=\int 1dx-\int \frac{dx}{1+x^2}=x-arctgx+C.$$

8. $\int ctg^2 xdx$.

Використаємо формулу тригонометрії: $1+ctg^2 x=\dfrac{1}{sin^2 x}$.

Тоді $\int ctg^2 xdx=\int\left(\dfrac{1}{sin^2 x}-1\right)dx=\int \dfrac{dx}{sin^2 x}-\int dx=-ctgx-x+C.$

Завдання для самостійної роботи

Обчислити інтеграли:

1. $\int\left(\dfrac{7}{\sqrt{x}}+\dfrac{4}{\sqrt{x^2-2}}+\dfrac{2}{3x^2-9}\right)dx$;

2. $\int 3^{2x}\cdot 2^x dx$;

3. $\int \dfrac{4x^2+3\sqrt{x}-5}{x^4}dx$;

4. $\int \sqrt{x}\cdot(x^2-3x+15)dx$;

5. $\int \dfrac{(x+2)^3}{x^2}dx$;

6. $\int\left(\dfrac{3}{\sqrt{4-x^2}}+\dfrac{5}{x}-2\cos\dfrac{x}{4}\right)dx$;

7. $\int \dfrac{dx}{sin^2 x\cdot cos^2 x}$;

8. $\int\left(\dfrac{8}{4-2x}-\dfrac{3}{2x^2-4}+e^{-3x}\right)dx$;

9. $\int\left(\dfrac{5}{sin^2 3x}-2^{\frac{x}{2}}+11\right)dx$;

10. $\int\left(\dfrac{3}{100-10x^2}+2\sqrt[5]{x}-\dfrac{1}{10x^2+100}\right)dx$.

3.2. Метод підстановки (заміни змінної)

Заміна змінної у невизначеному інтегралі виконується за допомогою підстановок двох типів:

1. Інтеграл $\int f(x)dx$ зображають у вигляді:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt,$$

де функція $x=\varphi(t)$ має обернену функцію $t=\varphi^{-1}(x)$ і для функції $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ відома первісна $F(t)$.

Тоді $\int f(x)dx=\left|\begin{matrix} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt \end{matrix}\right|=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=F(t)+C=F\left(\varphi^{-1}(x)\right)+C$.

2. Інтеграл $\int g(x)dx$ записують у вигляді

$$\int g(x)dx=\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx,$$

в якому для функції $f(x)$ відома первісна $F(x)$.

Тоді $\int g(x)dx=\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx=\left|\begin{matrix} \varphi(x)=u \\ \varphi'(x)dx=du \end{matrix}\right|=\int f(u)du=F(u)+C=F(\varphi(x))+$ $+C.$

В обох випадках досягається мета спростити вихідний інтеграл та привести його до табличного інтегралу.

Зразки розв'язування задач

Обчислити інтеграли.

1. $\int\frac{\sin\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Поклавши $x=t^3$, знайдемо $dx=3t^2dt$. Ця підстановка призведе до того, що під знаком синуса з'явиться змінна інтегрування, а не корінь з неї. Отримаємо:

$$\int\frac{\sin\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}}=\int\frac{\sin t\cdot 3t^2dt}{\sqrt[3]{t^6}}=3\int\sin tdt=-3\cos t+C.$$

Відповідь повинна бути виражена через початкову змінну x. Підставляючи в результат інтегрування $t=\sqrt[3]{x}$, дістанемо:

$$\int\frac{\sin\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}}=-3\cos\sqrt[3]{t}+C.$$

2. $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}=\left|\begin{matrix} 1+e^x=t^2 \\ e^xdx=2tdt \\ dx=\dfrac{2tdt}{t^2-1} \\ t=\sqrt{1+e^x} \end{matrix}\right|=\int\frac{2tdt}{\left(t^2-1\right)\cdot\sqrt{t^2}}=\int\frac{2dt}{t^2-1}=2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + C.$$

3. $$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left|\begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2tdt \\ t = \sqrt{x} \end{array}\right| = \int \frac{2tdt}{1+t} = 2\int \frac{(1+t)-1}{1+t}dt = 2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt = 2t - 2\ln|1+t| + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - 2\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + C.$$

4. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}} = \left|\begin{array}{l} 2x-9 = t^2 \\ 2dx = 2tdt \\ dx = tdt \\ x = \dfrac{t^2+9}{2} \end{array}\right| = \int \frac{tdt}{\dfrac{t^2+9}{2}\cdot t} = 2\int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{2}{3}arctg\frac{t}{3} + C =$$

$$= \frac{2}{3}arctg\frac{\sqrt{2x-9}}{3} + C.$$

5. $$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+2x^2}} = \left|\begin{array}{l} 1+2x^2 = t \\ 4xdx = dt \\ xdx = \dfrac{1}{4}tdt \end{array}\right| = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{4}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{4}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{1+2x^2} + C.$$

6. $$\int x^3e^{-2x^4}dx = \left|\begin{array}{l} -2x^4 = t \\ -8x^3dx = dt \\ x^3dx = -\dfrac{1}{8}dt \end{array}\right| = -\frac{1}{8}\int e^t dt = -\frac{1}{8}e^t + C = -\frac{1}{8}e^{-2x^4} + C.$$

7. $$\int \frac{(2\ln x+3)^3}{x}dx = \left|\begin{array}{l} 2\ln x + 3 = t \\ \dfrac{2dx}{x} = dt \\ \dfrac{dx}{x} = \dfrac{1}{2}dt \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int t^3dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{8}(2\ln x+3)^4 + C.$$

8. $$\int \frac{\cos 5xdx}{\sqrt[6]{1-2\sin 5x}} = \left|\begin{array}{l} 1-2\sin 5x = t \\ -10\cos 5xdx = dt \\ \cos 5xdx = -\dfrac{1}{10}dt \end{array}\right| = -\frac{1}{10}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{10}\int t^{-\frac{1}{6}}dt = -\frac{1}{10}\cdot\frac{t^{5/6}}{5/6} + C =$$

$$= -\frac{3}{25}\sqrt[6]{1-2\sin 5x} + C.$$

9. $$\int \frac{arctg2x}{1+4x^2}dx = \left| \begin{aligned} & arctg2x = t \\ & \frac{2dx}{1+4x^2} = dt \\ & \frac{dx}{1+4x^2} = \frac{1}{2}dt \end{aligned} \right| = \frac{1}{2}\int tdt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{4}arctg^2 2x + C.$$

10. $$\int \frac{x^4dx}{\sqrt{x^{10}-2}} = \int \frac{x^4dx}{\sqrt{\left(x^5\right)^2-2}} = \left| \begin{aligned} & x^5 = t \\ & 5x^4dx = dt \\ & x^4dx = \frac{1}{5}dt \end{aligned} \right| = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-2}} = \frac{1}{5}ln\left|t+\sqrt{t^2-2}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{5}ln\left|x^5+\sqrt{x^{10}-2}\right| + C.$$

11. $$\int \frac{2^x dx}{9-4^x} = \int \frac{2^x dx}{9-\left(2^x\right)^2} = \left| \begin{aligned} & 2^x = t \\ & 2^x\, ln2dx = dt \\ & 2^x dx = \frac{1}{ln2}dt \end{aligned} \right| = \frac{1}{ln2}\int \frac{dt}{9-t^2} = \frac{1}{ln2}\cdot\frac{1}{6}ln\left|\frac{3+t}{3-t}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{6ln2}\cdot ln\left|\frac{3+2^x}{3-2^x}\right| + C.$$

12. $$\int \frac{sin2xdx}{\sqrt{3-cos^4 x}} = \int \frac{2sin x\cdot cos xdx}{\sqrt{3-\left(cos^2 x\right)^2}} = \left| \begin{aligned} & cos^2 x = t \\ & 2cos x\, sin xdx = dt \\ & -sin2xdx = dt \end{aligned} \right| = -\int \frac{dt}{\sqrt{3-t^2}} =$$

$$= -arcsin\frac{t}{\sqrt{3}} + C = -arcsin\frac{cos^2 x}{\sqrt{3}} + C.$$

Завдання для самостійної роботи

Обчислити інтеграли:

1. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+2x^2}}$;

2. $\int \sqrt[5]{sin3x}\cdot cos3xdx$;

3. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$;

4. $\int 5^x\cdot\left(3+2\cdot 5^x\right)^4 dx$;

5. $\int \frac{x^4dx}{16-4x^{10}}$;

6. $\int \frac{arctg^3 2xdx}{1+4x^2}$;

7. $\int e^{2\cos x} \cdot \sin x dx$;

8. $\int \frac{3^x dx}{4+9^x}$;

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \cdot \arccos^2 x}$;

10. $\int x^2 \cdot \sin 2x^3 dx$;

11. $\int \frac{4\sin 5x dx}{\sqrt{9-3\cos^2 5x}}$;

12. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-2x}}$.

3.3. Метод інтегрування частинами

Якщо $u(x)$ та $v(x)$ - функції, що мають на деякому проміжку неперервні похідні, то справедлива формула інтегрування частинами:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Тут вважається заданою ліва частина формули, тобто $\int u dv$. Обчислення цього інтеграла зводиться до знаходження диференціала du функції u та функції v за відомим її диференціалом dv. Функція v визначається неоднозначно, з точністю до довільної сталої C, тому вибирають ту функцію, яка має найпростіший вигляд (як правило, покладають $C = 0$).

Методом інтегрування частинами зручно обчислювати такі типи інтегралів:

1) інтеграли виду $\int P(x) \cdot a^{kx} dx$, $\int P(x) \cdot e^{kx} dx$, $\int P(x) \sin kx dx$, $\int P(x) \cos kx dx$, де $P(x)$ - многочлен n-ого степеня від x, k - дійсне число . У цих інтегралах за u слід взяти множник $P(x)$, а за dv - вираз, що залишився;

2) інтеграли виду $\int P(x) \ln x dx$, $\int P(x) \arcsin x dx$, $\int P(x) \arccos x dx$, $\int P(x) \operatorname{arctg} x dx$, $\int P(x) \operatorname{arcctg} x dx$. У цих інтегралах слід взяти за u множник $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, а за dv - $P(x)dx$;

3) інтеграли виду $\int e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x dx$, $\int e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x dx$, де α, β - дійсні числа.

Тут після двократного застосування формули інтегрування частинами утворюється лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. Розв'язуючи це рівняння, знаходять інтеграл.

Зразки розв'язування задач

Обчислити інтеграли.

1. $\int x \cos x dx$.

Покладемо $u = x$, $dv = \cos x dx$. Тоді $du = dx$, $v = \int \cos x dx = \sin x$.

Використовуючи формулу інтегрування частинами, отримаємо:

$$\int x\cos x dx = x\cdot \sin x - \int \sin x dx = x\cdot \sin x + \cos x + C.$$

Надалі розв'язання прикладів наводяться в конспективному вигляді: після умови вказано вирази u, dv і du, v.

2. $$\int (2x-3)\cdot 4^x dx = \left| \begin{matrix} u = 2x-3, du = 2dx \\ dv = 4^x dx, v = \dfrac{4^x}{\ln 4} \end{matrix} \right| = (2x-3)\cdot \frac{4^x}{\ln 4} - \int \frac{2\cdot 4^x dx}{\ln 4} =$$

$$= \frac{1}{\ln 4}(2x-3)\cdot 4^x - \frac{2}{\ln 4}\int 4^x dx = \frac{1}{\ln 4}(2x-3)\cdot 4^x - \frac{2}{\ln 4}\cdot \frac{4^x}{\ln 4} + C = \frac{1}{\ln 4}(2x-3)\cdot 4^x -$$
$$- \frac{2}{\ln^2 4}\cdot 4^x + C.$$

3. $$\int x^2 e^{3x} dx = \left| \begin{matrix} u = x^2, du = 2xdx \\ dv = e^{3x}dx, v = \dfrac{1}{3}e^{3x} \end{matrix} \right| = x^2\cdot \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx.$$

Інтегрування частинами дозволило знизити на одиницю степінь x. Щоб знайти $\int xe^{3x}dx$, застосуємо даний метод ще раз.

$$\frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx = \left| \begin{matrix} u = x, du = dx \\ dv = e^{3x}dx, v = \dfrac{1}{3}e^{3x} \end{matrix} \right| = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\left[x\cdot \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx \right] =$$
$$= \frac{1}{3}x^2\cdot e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C = e^{3x}\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27} \right) + C.$$

4. $$\int \lg x dx = \left| \begin{matrix} u = \lg x, du = \dfrac{dx}{x\ln 10} \\ dv = dx, v = x \end{matrix} \right| = x\lg x - \frac{1}{\ln 10}\int x\cdot \frac{dx}{x} = x\lg x - \frac{1}{\ln 10}x + C.$$

5. $$\int x\cdot \mathrm{arctg}x dx = \left| \begin{matrix} u = \mathrm{arctg}x, du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx, v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}\cdot \mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x -$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{\left(1+x^2\right)-1}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}arctgx-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\frac{x^2}{2}arctgx-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}arctgx+C.$$

6. $$\int e^{2x}\cos 3xdx=\left|\begin{matrix}u=e^{2x}, du=2e^{2x}dx\\ dv=\cos 3xdx, v=\frac{1}{3}\sin 3x\end{matrix}\right|=e^{2x}\cdot\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3xdx.$$

Складається враження, що інтегрування частинами не призвело до цілі, інтеграл не спростився. Проте спробуємо ще раз застосувати цей метод до отриманого інтеграла.

Нехай $\int e^{2x}\cdot\sin 3xdx=I$.

$$I=\left|\begin{matrix}u=e^{2x}, du=2e^{2x}dx\\ dv=\sin 3xdx, v=-\frac{1}{3}\cos 3x\end{matrix}\right|=\frac{1}{3}e^{2x}\cdot\sin 3x-\frac{2}{3}\left[-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3xdx\right]=\frac{1}{3}e^{2x}\cdot\sin 3x+\frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x-\frac{4}{9}\int e^{2x}\cos 3xdx.$$

Застосувавши двічі інтегрування частинами, дістали рівняння, яке містить шуканий інтеграл у якості невідомого. Ми отримали, що

$$\mathbf{I}=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x+\frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x-\frac{4}{9}\mathbf{I}.$$

З цього рівняння знаходимо **I:**

$$\mathbf{I}+\frac{4}{9}\mathbf{I}=e^{2x}\left(\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{2}{9}\cos 3x\right),\quad \mathbf{I}=\frac{9}{13}e^{2x}\left(\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{2}{9}\cos 3x\right)+C.$$

7. $$\int\sqrt{x^2+4}\,dx=\left|\begin{matrix}u=\sqrt{x^2+4}, du=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}}\\ dv=dx, v=x\end{matrix}\right|=x\sqrt{x^2+4}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+4}}=x\sqrt{x^2+4}-$$

$$-\int\frac{\left(x^2+4\right)-4}{\sqrt{x^2+4}}dx=x\sqrt{x^2+4}-\int\frac{\left(x^2+4\right)dx}{\sqrt{x^2+4}}-4\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}=x\sqrt{x^2+4}-\int\sqrt{x^2+4}\,dx+$$

$$+4\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}=x\sqrt{x^2+4}-\int\sqrt{x^2+4}\,dx+4\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|.$$

Позначивши $\int\sqrt{x^2+4}\,dx=I$, маємо рівняння:

$$I = x\sqrt{x^2+4} - I + 4\,ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|,\ \text{звідки}\ \ 2I = x\sqrt{x^2+4} + 4\,ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|,$$

$$I = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+4} + 2\,ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right| + C.$$

8. $\int sin\,ln\,xdx = \left|\begin{matrix} u = sin\,ln\,x, du = \dfrac{cos\,ln\,xdx}{x} \\ dv = dx, v = x \end{matrix}\right| = x\cdot sin\,ln\,x - \int \dfrac{x\,cos\,ln\,xdx}{x} = x\cdot sin\,ln\,x -$

$-\int cos\,ln\,xdx.$ Ще раз інтегруємо частинами:

$$x\cdot sin\,ln\,x - \int cos\,ln\,xdx = \left|\begin{matrix} u = cos\,ln\,x, du = \dfrac{-sin\,ln\,xdx}{x} \\ dv = dx, v = x \end{matrix}\right| = x\cdot sin\,ln\,x - \Big[x\,cos\,ln\,x +$$

$$+\int \frac{x\cdot sin\,ln\,xdx}{x}\Big] = x\cdot sin\,ln\,x - x\cdot cos\,ln\,x - \int sin\,ln\,xdx.$$

Знову прийшли до вихідного інтегралу $I = \int sin\,ln\,xdx.$ Знайдемо його з рівняння:

$$I = x\,sin\,ln\,x - x\,cos\,ln\,x - I\,.$$

Маємо: $2I = x(sin\,ln\,x - cos\,ln\,x)$, звідки $I = \dfrac{1}{2}x(sin\,ln\,x - cos\,ln\,x) + C.$

Завдання для самостійної роботи

Обчислити інтеграли:

1. $\int (2-x)\cdot e^{-x}dx$;

2. $\int x\cdot sin\dfrac{x}{4}dx$;

3. $\int arctg3xdx$;

4. $\int \dfrac{ln\,x}{x^3}dx$;

5. $\int lg(x^2+1)dx$;

6. $\int \dfrac{xdx}{cos^2 6x}$. **Вказівка:** прийняти $u = x$, $dv = \dfrac{dx}{cos^2 6x}$.

3.4. Інтегрування раціональних функцій

До раціональних функцій належать цілі та дробові раціональні функції. Інтегрування цілих раціональних функцій (многочленів) не складне. Розглянемо дробово-раціональну функцію (раціональний дріб), яка являє собою відношення двох многочленів степенів n і m із коефіцієнтами $A_n \neq 0$ та $B_m \neq 0$ відповідно:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + ... + A_1 x + A_0}{B_m x^m + B_{m-1}x^{m-1} + ... + B_1 x + B_0}. \qquad (3.1)$$

Раціональний дріб називають ***правильним***, якщо степінь чисельника менше від степеня знаменника $(n < m)$. У противному разі, а саме при $n \geq m$, дріб називають ***неправильним***.

Якщо раціональний дріб (3.1) неправильний, то діленням многочлена $P(x)$ на $Q(x)$ його можна подати у вигляді суми цілої раціональної функції та правильного раціонального дробу, тобто

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

де многочлен $T(x)$ - частка від ділення, многочлен $R(x)$ - остача від ділення.

Отже, щоб проінтегрувати правильний раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$, треба:

1) розкласти многочлен $Q(x)$ на лінійні множники, які відповідають його дійсним кореням, та квадратні множники, які відповідають його комплексним кореням, а саме $Q(x) = (x-a)^n \cdot \left(x^2 + px + q\right)^m$, де p, q - дійсні числа, n, m - цілі додатні числа, a - n-кратний дійсний корень многочлена $Q(x)$, а квадратний тричлен $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів $\left(p^2 - 4q < 0\right)$;

2) розкласти дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на елементарні дроби таким чином:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n \cdot \left(x^2+px+q\right)^m} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + ... + \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \qquad (3.2)$$

$$+ \frac{M_2 x + N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2} + ... + \frac{M_m x + N_m}{\left(x^2+px+q\right)^m},$$

де $A_1, A_2, ..., A_n, M_1, M_2, ..., M_m, N_1, N_2, ..., N_m$ - невизначені коефіцієнти (деякі дійсні числа).

Для їх знаходження найчастіше користуються так званим ***методом невизначених коефіцієнтів***. Потрібно звести праву частину рівності (3.2) до спільного знаменника, який дорівнює многочлену $Q(x)$. В результаті дістанемо два рівні дроби з однаковими знаменниками, а їх чисельниками є тотожні многочлени. Порівнюючи далі коефіцієнти при однакових степенях x лівої та правої частин тотожності, дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої визначаються шукані невідомі $A_1, A_2, ..., A_n, M_1, M_2, ..., M_m, N_1, N_2, \ldots, N_m$.

Існує ще один спосіб знаходження невизначених коефіцієнтів. У рівності тотожніх многочленів чисельників лівого та правого дробу розкладання (3.2) слід надавати змінній x довільні числові значення стільки разів, скільки коефіцієнтів потрібно визначити. При цьому обчислення значно спрощуються, якщо замість змінної x брати значення коренів лінійних множників $(x-a)$;

3) тепер залишається обчислити $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ як суму інтегралів від знайдених елементарних дробів. При цьому матимемо справу із наступними інтегралами:

I. $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = \frac{A}{(1-n)} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C, \quad n \neq 1$.

II. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\,ln|x-a| + C, \quad n = 1$.

III. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}} \cdot arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$,

$m = 1$.

IV. $\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx = -\frac{M}{2(m-1)} \cdot \frac{1}{\left(x^2+px+q\right)^{m-1}} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \cdot I_m$,

де $m \geq 2$, $Im = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}$, в якому $t = x + \frac{p}{2}, a^2 = q - \frac{p^2}{4}$,

визначається $(m-1)$ - кратним застосуванням рекурентної формули

$$I_m = \frac{1}{2a^2(m-1)} \cdot \frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{m-1}} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot I_{m-1}.$$

Зразки розв’язування задач

Обчислити інтеграли.

1. $\int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$.

Дріб $\frac{x}{(x+1)(2x+1)}$ є правильним. Розкладемо його на суму найпростіших дробів. Коренями знаменника є дійсні числа -1 та $-\frac{1}{2}$, серед яких немає кратних. Тому чисельниками кожного дробу будуть числа

A, B. Отримаємо: $\dfrac{x}{(x+1)(2x+1)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{2x+1}$. Помноживши обидві частини рівності на спільний знаменник, здобудемо:
$x = A(2x+1) + B(x+1)$, або $x = 2Ax + A + Bx + B$.

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в правій і лівій частинах, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{array}{l} \text{При } x^1: \\ \text{при } x^0: \end{array} \begin{cases} 1 = 2A + B, \\ 0 = A + B, \end{cases} \text{ з якої знайдемо } A = 1, B = -1.$$

Отже, розкладання раціонального дробу на найпростіші має вигляд:

$$\frac{x}{(x+1)(2x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1}.$$

Невідомі A і B можна визначити інакше. Після того, як позбулися знаменника, змінній x можна надати стільки часткових значень, скільки коефіцієнтів треба визначити (в даному випадку – два значення). Особливо зручно надавати x ті значення, які є дійсними коренями знаменника. Застосуємо цей прийом до нашого дробу. Після звільнення від знаменника отримали вираз $x = A(2x+1) + B(x+1)$.

$$\begin{array}{l} \text{При } x = -1: \\ \text{При } x = -\frac{1}{2}: \end{array} \begin{cases} -1 = A(2\cdot(-1)+1) + B(-1+1), \text{ звідки } -1 = -A, \quad A = 1. \\ -\frac{1}{2} = A\left(2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right) + B\left(-\frac{1}{2}+1\right), \text{ звідки } -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}B, \quad B = -1. \end{cases}$$

В результаті отримали ті самі значення A і B, що й при першому способі визначення коефіцієнтів.

Таким чином,

$$\int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)} = \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{2x+1} = ln|x+1| - \frac{1}{2} ln|2x+1| + C = ln\left|\frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}\right| + C.$$

Зауваження. Якщо корені знаменника – числа тільки дійсні та різні, спосіб часткових значень є найзручнішим. В інших випадках поєднують обидва способи.

2. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^3+4x^2-5x} dx$.

Розкладемо знаменник дробу на множники: $x^3 + 4x^2 - 5x = x(x^2 + 4x - 5)$. Коренями тричлена $x^2 + 4x - 5$ є числа $x_1 = -5$ та $x_2 = 1$. Тому $x^2 + 4x - 5 = (x+5)(x-1)$. Отже $x^3 + 4x^2 - 5x = x(x+5)(x-1)$. Розкладемо даний дріб на суму найпростіших:

$$\frac{2x-1}{x(x+5)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+5} + \frac{C}{x-1}.$$

Тоді $2x - 1 = A(x+5)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+5)$.

Для визначення коефіцієнтів A, B, C застосуємо часткові значення $x: 0; 1; -5$.

$$\begin{aligned} &\text{При } x = 0: \\ &\text{при } x = 1: \\ &\text{при } x = -5: \end{aligned} \quad \begin{cases} -1 = -5A, \ A = \dfrac{1}{5}, \\ 1 = 6C, \ C = \dfrac{1}{6}, \\ -11 = 30B, \ B = -\dfrac{11}{30}. \end{cases}$$

Отже, $\dfrac{2x-1}{x(x+5)(x-1)} = \dfrac{1/5}{x} + \dfrac{-11/30}{x+5} + \dfrac{1/6}{x-1} = \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{x} - \dfrac{11}{30}\cdot\dfrac{1}{x+5} + \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{x-1}.$

Шуканий інтеграл:

$$\int \frac{2x-1}{x^3+4x^2-5x}dx = \frac{1}{5}\int\frac{dx}{x} - \frac{11}{30}\int\frac{dx}{x+5} + \frac{1}{6}\int\frac{dx}{x-1} = \frac{1}{5}ln|x| - \frac{11}{30}ln|x+5| + \frac{1}{6}ln|x-1| +$$

$$+C = \frac{6}{30}ln|x| - \frac{11}{30}ln|x+5| + \frac{5}{30}ln|x-1| + C = ln\sqrt[30]{\frac{x^6\cdot(x-1)^5}{(x+5)^{11}}} + C.$$

3. $\displaystyle\int\frac{x^5+2x^4+3}{x^2-1}dx$.

Підінтегральний дріб є неправильним, тому необхідно виділити цілу частину, поділивши чисельник на знаменник:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & +2x^4 & +0x^3 & +0x^2 & +0x & +3 & x^2-1 \\ \cline{7-7}
 & & & & & & x^3+2x^2+x+2 \\
-\ x^5 & & -x^3 & & & & \\ \cline{1-3}
 & 2x^4 & +x^3 & +0x^2 & & & \\
 & -\ 2x^4 & & -2x^2 & & & \\ \cline{2-4}
 & & x^3 & +2x^2 & +0x & & \\
 & & -\ x^3 & & -x & & \\ \cline{3-5}
 & & & 2x^2 & +x & +3 & \\
 & & & -\ 2x^2 & & -2 & \\ \cline{4-6}
 & & & & x & +5 &
\end{array}$$

Отже,

$$I=\int\frac{x^5+2x^4+3}{x^2-1}dx=\int\left(x^3+2x^2+x+2+\frac{x+5}{x^2-1}\right)dx=\frac{x^4}{4}+2\cdot\frac{x^3}{3}+2x+$$

$$+\int\frac{x+5}{x^2-1}dx.$$

Дріб $\frac{x+5}{x^2-1}$ вже є правильним, розкладемо його на суму найпростіших:

$$\frac{x+5}{x^2-1}=\frac{x+5}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1},\qquad x+5=A(x+1)+B(x-1).$$

При $x=1$: $\begin{cases}6=2A,\ A=3,\\4=-2B,\ B=-2.\end{cases}$

при $x=-1$:

$$\int\frac{x+5}{x^2-1}dx=\int\left(\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+1}\right)dx=3\ln|x-1|-2\ln|x+1|+C=\ln\frac{|x-1|^3}{(x+1)^2}+C.$$

Шуканий інтеграл дорівнюватиме:

$$I=\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x+\ln\frac{|x-1|^3}{(x+1)^2}+C.$$

Зауважимо, що інтеграл $\int\frac{x+5}{x^2-1}dx$ може бути обчислений іншими способами, наприклад, зведенням до суми двох інтегралів, один з яких – табличний, а в другому треба застосувати заміну змінної.

4. $\int\frac{x^3dx}{x^2+2x+1}$.

Як і в попередньому прикладі підінтегральний дріб є неправильним, тому виділивши в ньому цілу частину, отримаємо:

$$\frac{x^3}{x^2+2x+1}=x-1+\frac{3x+1}{x^2+2x+1}.$$

Тепер даний інтеграл можна подати у вигляді суми двох інтегралів:

$$\int\frac{x^3dx}{x^2+2x+1}=\int(x-1)dx+\int\frac{3x+1}{x^2+2x+1}dx=I_1+I_2.$$

$$I_1=\int(x-1)dx=\frac{x^2}{2}-x+C_1.$$

Щоб обчислити другий інтеграл, розкладемо дріб $\frac{3x+1}{x^2+2x+1}$ на суму найпростіших дробів.

$$\frac{3x+1}{x^2 2x+1}=\frac{3x+1}{(x+1)^2}=\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{x+1},\qquad 3x+1=A+B(x+1)=A+Bx+B.$$

Для отримання коефіцієнтів A і B використаємо корінь $x=-1$ знаменника. При $x=-1:\quad -3+1=A,\quad A=-2$. Зважаючи на те, що інших коренів не існує, для визначення B порівняємо коефіцієнти при x в обох частинах рівності. В лівій частині він дорівнює 3, а в правій B. Отже, $B=3.$

$$I_2=\int\frac{3x+1}{x^2+2x+1}dx=\int\frac{-2}{(x+1)^2}dx+\int\frac{3}{x+1}dx=-2\int(x+1)^{-2}dx+3\int\frac{dx}{x+1}=$$

$$=-2\cdot\frac{(x+1)^{-1}}{-1}+3\ln|x+1|+C_2=\frac{2}{x+1}+3\ln|x+1|+C_2.$$

Шуканий інтеграл дорівнюватиме: $\int\frac{x^3dx}{x^2+2x+1}=\frac{x^2}{2}-x+\frac{2}{x+1}+3\ln|x+1|+C$.

5. $\int\frac{2x+1}{x^3+x}dx$.

Дріб $\frac{2x+1}{x^3+x}$ є правильним. Розкладемо знаменник дробу на множники: $x^3+x=x(x^2+1)$. Бачимо, що знаменник має один дійсний корінь $x_1=0$ та пару спряжених коренів $x_{2,3}=\pm i$. Тому розкладання дробу на суму найпростіших має вигляд:

$$\frac{2x+1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1},\ \text{звідки}$$

$$2x+1=A(x^2+1)+(Bx+C)x=Ax^2+A+Bx^2+Cx=(A+B)x^2+Cx+A.$$

$$\begin{array}{ll}\text{При } x=0: & \left\{\begin{array}{l}1=A,\\ 0=A+B,\ B=-A=-1,\\ 2=C.\end{array}\right.\\ \text{при } x^2: & \\ \text{при } x^1: & \end{array}$$

Отже, $\int\frac{2x+1}{x^3+x}dx=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{-x+2}{x^2+1}dx$.

Перший інтеграл є табличним $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C_1$. Для інтегрування другого доданку розіб'ємо дріб на суму двох дробів: $-\int\frac{xdx}{x^2+1}+\int\frac{2dx}{x^2+1}$.

Перший з них інтегруємо, використовуючи заміну змінної:

$$\int\frac{xdx}{x^2+1}=\left|\begin{array}{l}x^2+1=t\\ 2xdx=dt\\ xdx=\frac{1}{2}dt\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+C_2=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C_2.$$

Другий інтеграл дорівнюватиме: $\int\frac{2dx}{x^2+1}=2arctgx+C_3$.

Таким чином, $\int\frac{2x+1}{x^3+x}dx=ln|x|-\frac{1}{2}ln(x^2+1)+2arctgx+C$.

6. $\int \frac{dx}{x^2+6x+25}$.

Знаменник дробу не має дійсних коренів, тому не розкладається на лінійні множники. Вчинемо інакше, а саме виділимо в ньому повний квадрат.

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+25} = \int \frac{dx}{\left(x^2+6x+9\right)-9+25} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+16} = \frac{1}{4} arctg \frac{x+3}{4} + C.$$

7. $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8} dx$.

Так само, як в попередньому прикладі, знаменник не розкладається на множники. Перетворимо дріб під інтегралом: виділимо в чисельнику від $3x-1$ похідну знаменника, яка дорівнює $2x-4$.

$$3x-1 = \frac{3}{2}(2x-4)-1+6 = \frac{3}{2}(2x-4)+5.$$

Отримаємо: $\int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)+5}{x^2-4x+8} dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8} dx + 5\int \frac{dx}{x^2-4x+8} = I_1 + I_2$.

До першого інтегралу застосуємо метод заміни змінної, до другого – виділення повного квадрату. Будемо мати:

$$I_1 = \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8} dx = \left| \begin{array}{l} x^2-4x+8=t \\ (2x-4)dx = dt \end{array} \right| = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{3}{2} ln|t| + C_1 = \frac{3}{2} ln\left(x^2-4x+8\right) + C_1$$

(вираз не містить модуля, бо $x^2-4x+8 > 0$).

$$I_2 = 5\int \frac{dx}{x^2-4x+8} = 5\int \frac{dx}{\left(x^2-4x+4\right)-4+8} = 5\int \frac{dx}{(x-2)^2+4} = 5\cdot \frac{1}{2} arctg \frac{x-2}{2} + C_2.$$

Тоді $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8} dx = \frac{3}{2} ln\left(x^2-4x+8\right) + \frac{5}{2} arctg \frac{x-2}{2} + C$.

8. $\int \frac{x^3+x^2-4x+1}{x^4+2x^2+1} dx$.

Знаменник дробу $x^4+2x^2+1 = \left(x^2+1\right)^2$ має кратні комплексні корені, тому

$$\frac{x^3+x^2-4x+1}{x^4+2x^2+1} = \frac{x^3+x^2-4x+1}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{Ax+B}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

$$x^3+x^2-4x+1 = Ax+B+(Cx+D)\left(x^2+1\right) = Ax+B+Cx^3+Cx+Dx^2+D =$$
$$= Cx^3+Dx^2+(A+C)x+(B+D).$$

Порівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{array}{ll} \text{при } x^3: & \left\{ \begin{array}{l} 1 = C, \\ 1 = D, \\ -4 = A+C,\ A = -4-C = -5, \\ 1 = B+D,\ B = 1-D = 0. \end{array} \right. \\ \text{при } x^2: & \\ \text{при } x^1: & \\ \text{при } x^0: & \end{array}$$

Будемо мати:

$$\int \frac{x^3+x^2-4x+1}{x^4+2x^2+1}dx = \int \frac{-5xdx}{\left(x^2+1\right)^2} + \int \frac{x+1}{x^2+1}dx = I_1 + I_2.$$

$$I_1 = -5\int \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2} = \left| \begin{array}{l} x^2+1=t \\ 2xdx=dt \\ xdx=\frac{1}{2}dt \end{array} \right| = -\frac{5}{2}\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{5}{2}\cdot\frac{t^{-1}}{-1} + C_1 = \frac{5}{2t} + C_1 =$$

$$= \frac{5}{2\left(x^2+1\right)} + C_1.$$

$$I_2 = \int \frac{(x+1)dx}{x^2+1} = \int \frac{xdx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} = \left| \begin{array}{l} x^2+1=t \\ xdx=\frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} + arctgx = \frac{1}{2}ln|t| +$$

$$+ arctgx + C_2 = \frac{1}{2}ln\left(x^2+1\right) + arctgx + C_2.$$

Отже, $\int \frac{x^3+x^2-4x+1}{x^4+2x^2+1}dx = \frac{5}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2}ln\left(x^2+1\right) + arctgx + C.$

Завдання для самостійної роботи

Обчислити інтеграли:

1. $\int \frac{x^2+2x+3}{x^3-9x^2+20x}dx$;
2. $\int \frac{x^3dx}{x^2-4}$;
3. $\int \frac{2x^2-7x+8}{x^4-10x^2+9}dx$;
4. $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$;
5. $\int \frac{(3x-2)dx}{x^3+8x}$;
6. $\int \frac{3x^3+x^2+5x+1}{x^3+x}dx$;
7. $\int \frac{x^3-2x}{\left(x^2+4\right)^2}dx$;
8. $\int \frac{2x+1}{x^2+4x+5}dx$.

3.5. Інтегрування функцій, раціонально залежних від тригонометричних

Домовимось позначати $R(\sin x, \cos x)$ - раціональну функцію, залежну від $\sin x, \cos x$, якщо вона утворена з цих тригонометричних функцій та сталих за допомогою раціональних алгебраїчних дій.

1) Інтеграли виду $\int R(\sin x, \cos x)dx$ приводяться до інтегралів від раціональної функції нового аргументу t підстановкою

$tg\frac{x}{2} = t$, яка називається ***універсальною***.

При цьому використовуються формули:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2arctgt, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Варто помітити, що недоліком цієї підстановки є той факт, що її використання в багатьох випадках зводить вихідний інтеграл до інтегралу від раціонального дробу з великими степенями. Тому в багатьох випадках користуються іншими підстановками . Наведемо деякі з них:

а) $\int R(\sin x)\cos x dx$, тобто підінтегральна функція непарна відносно $\cos x$. Використовується підстановка $\sin x = t$, тоді $x = \arcsin t$, $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$;

б) $\int R(\cos x)\sin x dx$ - підінтегральна функція непарна відносно $\sin x$. Використовується підстановка $\cos x = t$, тоді $x = \arccos t$, $dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$;

в) $\int R(\sin x, \cos x)dx$, в якому підінтегральна функція парна відносно $\sin x$ і $\cos x$ одночасно, раціоналізується за допомогою підстановки $tgx = t$. При цьому використовуються формули:

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad x = arctgt, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2};$$

г) $\int R(tgx)dx$. Тут підінтегральна функція залежить раціональним образом тільки від tgx. Слід застосовувати підстановку $tgx = t$, тоді $x = arctgt$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

2) Інтеграли виду $\int \sin^m x \cos^n x dx$ обчислюються за допомогою таких підстановок:

а) якщо m - ціле додатне непарне число: $\cos x = t$;

б) якщо n - ціле додатне непарне число: $\sin x = t$;

в) якщо m та n - цілі додатні парні числа: використовуються формули пониження степеня

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2};$$

г) якщо m та n - цілі парні числа, але хоч одне з них від'ємне: $tgx = t$;

д) якщо m та n - цілі непарні числа і від'ємні: $tgx = t$.

3) Інтеграли виду $\int \sin\alpha x \cdot \cos\beta x dx$, $\int \sin\alpha x \cdot \sin\beta x dx$, $\int \cos\alpha x \cdot \cos\beta x dx$ обчислюються за допомогою тригонометричних формул:

$$\sin\alpha x \cdot \cos\beta x = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)x + \sin(\alpha+\beta)x\right],$$

$$\sin\alpha x \cdot \sin\beta x = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x\right],$$

$$\cos\alpha x \cdot \cos\beta x = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x\right].$$

Зразки розв'язування задач

Обчислити інтеграли.

Почнемо з прикладів ілюструючих різні випадки пункту 1.

1. $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$.

Застосуємо до інтеграла універсальну підстановку $tg\frac{x}{2} = t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Тоді $\int \frac{dx}{5+3\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5+\frac{3(1-t^2)}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{\left(5+\frac{3-3t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \int \frac{2dt}{5(1+t^2)+3-3t^2} =$

$$= \int \frac{2dt}{2t^2+8} = \int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2}arctg\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}arctg\frac{tg\frac{x}{2}}{2} + C.$$

2. $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x} = \left| \begin{array}{l} tg\frac{x}{2} = t, \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| =$

$$=\int\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(5-\frac{4\cdot 2t}{1+t^2}+3\cdot\frac{\left(1-t^2\right)}{1+t^2}\right)}=\int\frac{2dt}{5\left(1+t^2\right)-8t+3\left(1-t^2\right)}=\int\frac{2dt}{2t^2-8t+8}=$$

$$=\int\frac{dt}{t^2-4t+4}=\int\frac{dt}{(t-2)^2}=-\frac{1}{t-2}+C=-\frac{1}{tg\frac{x}{2}+2}+C.$$

3. $$\int\frac{dx}{sin^3 x}=\left|\begin{array}{l} tg\frac{x}{2}=t \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} \\ sin\,x=\frac{2t}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\cdot\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3}=\int\frac{\left(1+t^2\right)^2dt}{4t^3}=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{\left(1+2t^2+t^4\right)dt}{t^3}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t^3}+\frac{2}{t}+t\right)dt=\frac{1}{4}\left[\frac{t^{-2}}{-2}+2\,ln|t|+\frac{t^2}{2}\right]+C=$$

$$=-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{t^2}+\frac{1}{2}ln|t|+\frac{1}{8}t^2+C=-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{tg^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{8}tg^2\frac{x}{2}+C=$$

$$=-\frac{1}{8}ctg^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{8}tg^2\frac{x}{2}+C.$$

4. $$\int\frac{cos^3 xdx}{\sqrt[4]{sin\,x}}.$$

Зауважимо на те, що підінтегральна функція непарна відносно $cos\,x$. Відділимо від $cos^3 x$ один множник, а $cos^2 x$ виразимо через $sin\,x$, а саме: $cos^3 x=cos^2 x\cdot cos\,x=\left(1-sin^2 x\right)cos\,x$. Інтеграл матиме вигляд: $\int\frac{cos^3 xdx}{\sqrt[4]{sin\,x}}=\int\frac{\left(1-sin^2 x\right)cos\,xdx}{\sqrt[4]{sin\,x}}$, тобто ми звели його до випадку $\int R(sin\,x)cos\,xdx$, до якого можна застосувати заміну $sin\,x=t$, $cos\,xdx=dt$.

Отримаємо:

$$\int\frac{\left(1-sin^2 x\right)cos\,xdx}{\sqrt[4]{sin\,x}}=\int\frac{\left(1-t^2\right)dt}{\sqrt[4]{t}}=\int\frac{dt}{\sqrt[4]{t}}-\int\frac{t^2dt}{\sqrt[4]{t}}=\int\left(t^{-1/4}-t^{7/4}\right)dt=\frac{t^{3/4}}{3/4}-$$

$$-\frac{t^{11/4}}{11/4}+C=\frac{4}{3}\sqrt[4]{t^3}-\frac{4}{11}\sqrt[4]{t^{11}}+C=\frac{4}{3}\sqrt[4]{sin^3 x}-\frac{4}{11}\sqrt[4]{sin^{11} x}+C.$$

5. $\int \frac{sin^3 xdx}{1+cos\,x}$.

Підінтегральна функція непарна відносно $sin\,x$. Аналогічно попередньому прикладу $sin^3 x = sin^2 x \cdot sin\,x = \left(1-cos^2 x\right)sin\,x$.

Отже, $\int \frac{sin^3 xdx}{1+cos\,x} = \int \frac{\left(1-cos^2 x\right)sin\,xdx}{1+cos\,x} = \int \frac{(1-cos\,x)(1+cos\,x)sin\,xdx}{1+cos\,x} =$

$$= \int (1-cos\,x)sin\,xdx = \left|\begin{matrix} 1-cos\,x = t \\ sin\,xdx = dt \end{matrix}\right| = \int tdt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(1-cos\,x)^2}{2} + C.$$

Зауваження: отриманий інтеграл $\int (1-cos\,x)sin\,xdx$ може бути обчислений іншим методом за допомогою формул тригонометрії, а саме:

$$\int (sin\,x - cos\,x\,sin\,x)dx = \int sin\,xdx - \frac{1}{2}\int sin\,2xdx = -cos\,x + \frac{1}{4}cos\,2x + C.$$

6. $\int \frac{dx}{5-sin^2 x+2cos^2 x}$.

Так як підінтегральна функція є раціональною функцією від $sin^2 x$ та $cos^2 x$, зручною є заміна $tgx = t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Тоді $sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$, $cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$. Підставимо вирази в інтеграл і отримаємо:

$$\int \frac{dx}{5-sin^2 x+2cos^2 x} = \int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(5-\frac{t^2}{1+t^2}+\frac{2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{5+5t^2-t^2+2} =$$

$$= \int \frac{dt}{4t^2+t} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+\frac{7}{4}} = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{4}{7}}arctg\frac{t}{\sqrt{\frac{7}{4}}} + C = \frac{1}{2\sqrt{7}}arctg\frac{2t}{\sqrt{7}} + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{7}}arctg\frac{2tgx}{\sqrt{7}} + C.$$

7. $\int \frac{cos^2 xdx}{sin^4 x}$.

В цьому випадку зручнішою буде підстановка $ctgx = t$, $-\frac{dx}{sin^2 x} = dt$. Перетворивши підінтегральний вираз та використавши наведену підстановку, отримаємо:

$$\int \frac{cos^2 x}{sin^2 x}\cdot\frac{dx}{sin^2 x} = \int ctg^2 x\cdot\frac{dx}{sin^2 x} = -\int t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{1}{3}ctg^3 x + C.$$

8. $\int \frac{tgx dx}{1+tgx}$.

Підінтегральна функція є раціональною функцією відносно tgx. Зробимо заміну $tgx = t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

$\int \frac{tgx dx}{1+tgx} = \int \frac{t \cdot dt}{(1+t^2)(1+t)}$. Останній інтеграл є інтегралом від правильного раціонального дробу. Для інтегрування розкладемо дріб на суму найпростіших:

$$\frac{t}{(1+t^2)(1+t)} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{C}{1+t}, \quad t = (At+B)(1+t) + C(1+t^2).$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях t в обох частинах рівності, отримаємо: $A = B = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{2}$. Отже,

$$\int \frac{tdt}{(1+t^2)(1+t)} = \frac{1}{2}\int \frac{t+1}{1+t^2}dt - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t} = \frac{1}{2}\int \frac{tdt}{1+t^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t} =$$
$$= \frac{1}{4}ln(1+t^2) + \frac{1}{2}arctgt - \frac{1}{2}ln|1+t| + C = \frac{1}{4}ln(1+tg^2x) + \frac{1}{2}arctgtgx -$$
$$-\frac{1}{2}ln|1+tgx| + C = \frac{1}{4}ln(1+tg^2x) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}ln|1+tgx| + C.$$

9. $\int \frac{dx}{sin^3 x cos^2 x}$.

Підінтегральна функція непарна відносно $sin x$, тому інтеграл можна звести до інтегралу від раціональної функції підстановкою $cos x = t$, $sin x = \sqrt{1-t^2}$; $-sin x dx = dt$, $dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Отримаємо:

$$\int \frac{dx}{sin^3 x cos^2 x} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \cdot \sqrt{(1-t^2)^3} \cdot t^2} = -\int \frac{dt}{(1-t^2)^2 t^2}.$$

Після розкладання дробу $\frac{1}{(1-t^2)^2 t^2}$ на суму найпростіших одержимо:

$$\frac{1}{(1-t^2)^2 t^2} = \frac{1/4}{(1-t)^2} + \frac{3/4}{1-t} + \frac{1/4}{(1+t)^2} + \frac{3/4}{1+t} + \frac{1}{t^2}.$$

Коефіцієнти розкладання A, B, C, D, E обчислюються звичними методами і дорівнюють: $A = C = \frac{1}{4}$, $B = D = \frac{3}{4}$, $E = 1$. Тоді інтеграл дорівнюватиме:

$$-\int \frac{dt}{\left(1-t^2\right)^2 t^2} = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{(1-t)^2} - \frac{3}{4}\int\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)dt - \frac{1}{4}\int \frac{dt}{(1+t)^2} - \int \frac{dt}{t^2} =$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{(1-t)^{-1}}{-1} - \frac{3}{4}\int \frac{2dt}{1-t^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{(1+t)^{-1}}{-1} - \frac{t^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-t} +$$

$$+ \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+t} + \frac{1}{t} + C = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) + \frac{3}{2}ln\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} + \frac{1}{t} + C =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{2}{1-t^2} + \frac{3}{2}ln\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} + \frac{1}{t} + C = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-cos^2 x} + \frac{3}{2}ln\sqrt{\frac{1-cos\,x}{1+cos\,x}} + \frac{1}{cos\,x} + C =$$

$$= \frac{1}{2\,sin^2 x} + \frac{3}{2}ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{cos\,x} + C.$$

Далі розглянемо приклади різних випадків пункту 2.

10. $\int \frac{cos^5 xdx}{sin^4 x}$ (тут $n = 5$ - ціле додатне непарне).

При заміні $sin\,x$ на $-sin\,x$ підінтегральна функція не змінює знак. Тут доцільна підстановка $sin\,x = t$, $cos\,xdx = dt$, $cos\,x = \sqrt{1-t^2}$.

$$\int \frac{cos^4 x\,cos\,xdx}{sin^4 x} = \int \frac{\left(1-t^2\right)^2 dt}{t^4} = \int \frac{1-2t^2+t^4}{t^4}dt = \int\left(\frac{1}{t^4} - \frac{2}{t^2} + 1\right)dt = \frac{t^{-3}}{-3} -$$

$$-2\frac{t^{-1}}{-1} + t + C = -\frac{1}{3t^3} + \frac{2}{t} + t + C = -\frac{1}{3\,sin^3 x} + \frac{2}{sin\,x} + sin\,x + C.$$

11. $\int cos^3 x\,sin^4 xdx$ ($m = 4$, $n = 3$ - ціле додатне непарне число).

$$\int cos^3 x\,sin^4 xdx = \int cos^2 x\,sin^4 x\,cos\,xdx = \left|\begin{array}{l} sin\,x = t \\ cos\,xdx = dt \\ cos^2 x = 1-t^2 \end{array}\right| = \int\left(1-t^2\right)t^4 dt =$$

$$= \int\left(t^4 - t^6\right)dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C = \frac{1}{5}sin^5 x - \frac{1}{7}sin^7 x + C.$$

12. $\int sin^2 \frac{x}{3}dx$.

Підінтегральна функція містить тільки парний степінь синуса, який допускає пониження степеня за формулою: $sin^2\frac{x}{3}=\frac{1-cos\frac{2x}{3}}{2}$. Отже,

$$\int sin^2\frac{x}{3}dx=\frac{1}{2}\int\left(1-cos\frac{2x}{3}\right)dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int cos\frac{2x}{3}dx=\frac{1}{2}x-$$
$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}sin\frac{2x}{3}+C=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}sin\frac{2x}{3}+C.$$

13. $\int\frac{dx}{cos^6 x}$ ($m=0$, $n=6$ - ціле парне від'ємне число).

$$\int\frac{dx}{cos^6 x}=\int\frac{1}{cos^4 x}\cdot\frac{dx}{cos^2 x}=\int\left(\frac{1}{cos^2 x}\right)^2\frac{dx}{cos^2 x}.$$

Застосуємо заміну $tgx=t$, $\frac{dx}{cos^2 x}=dt$, $\frac{1}{cos^2 x}=1+tg^2x=1+t^2$. Тоді

$$\int\frac{dx}{cos^6 x}=\int\left(1+t^2\right)^2dt=\int\left(1+2t^2+t^4\right)dt=t+2\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+C=$$
$$=tgx+\frac{2}{3}tg^3x+\frac{1}{5}tg^5x+C.$$

14. $\int\frac{dx}{sin^2 x\,cos^6 x}$.

Показники $sin\,x$ і $cos\,x$ обидва парні від'ємні. Зручною буде заміна $tgx=t$, $dx=\frac{dt}{1+t^2}$, $sin^2x=\frac{t^2}{1+t^2}$, $cos^2x=\frac{1}{1+t^2}$. Після підстановки інтеграл набуває вигляду:

$$\int\frac{dx}{sin^2 x\,cos^2 x}=\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)\cdot\frac{t^2}{1+t^2}\cdot\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^3}=\int\frac{\left(1+t^2\right)^3dt}{t^2}=$$
$$=\int\frac{1+3t^2+3t^4+t^6}{t^2}dt=\int\left(\frac{1}{t^2}+3+3t^2+t^4\right)dt=-\frac{1}{t}+3t+3\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+C=$$
$$=-\frac{1}{tgx}+3tgx+tg^3x+\frac{1}{5}tg^5x+C=-ctgx+3tgx+tg^3x+\frac{1}{5}tg^5x+C.$$

15. $\int\frac{sin^3 x dx}{cos^7 x}$.

Показники $sin\,x$ і $cos\,x$ обидва непарні. Можна знову застосувати заміну $tgx=t$.

$$\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^7 x} = \left| \begin{array}{l} tgx = t, \sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2}, \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right| = \int \frac{\dfrac{t^3}{\sqrt{\left(1+t^2\right)^3}}}{\dfrac{1}{\sqrt{\left(1+t^2\right)^7}}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int t^3 \sqrt{\left(1+t^2\right)^4} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int t^2 \left(1+t^2\right)^2 \frac{dt}{1+t^2} = \int t^3 \left(1+t^2\right) dt = \int \left(t^3 + t^5\right) dt =$$

$$= \frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{4} tg^4 x + \frac{1}{6} tg^6 x + C.$$

Перейдемо до розглядання прикладів до пункту 3.

16. $\int \sin 6x \cos 7x dx$.

Перетворимо добуток тригонометричних функцій в суму згідно з наведеною формулою: $\sin 6x \cos 7x = \frac{1}{2}\left[\sin(-x) + \sin 13x\right] = \frac{1}{2}\left(-\sin x + \sin 13x\right)$.

Проінтегруємо отриманий вираз:

$$\int \sin 6x \cos 7x dx = \frac{1}{2}\int \left(-\sin x + \sin 13x\right) dx = \frac{1}{2}\left(\cos x - \frac{1}{13}\cos 13x\right) + C.$$

17. $\int \cos\frac{x}{3}\cos\frac{x}{4} dx = \frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{x}{12} + \cos\frac{7x}{12}\right)dx = \frac{1}{2}\left(12\sin\frac{x}{12} + \frac{12}{7}\sin\frac{7x}{12}\right) + C =$

$$= 6\sin\frac{x}{12} + \frac{6}{7}\sin\frac{7x}{12} + C.$$

Завдання для самостійної роботи

Обчислити інтеграли:

1. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x}$;
2. $\int \frac{dx}{\cos^5 x}$;
3. $\int \frac{\cos^3 x + 1}{\sin^2 x} dx$;
4. $\int \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\sin^4 \frac{x}{2}} dx$;
5. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x \cos x + \cos^2 x}$;
6. $\int tg^4 x dx$;
7. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$;
8. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$;
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x + 1}$;
10. $\int \cos^6 2x dx$;
11. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x}$;
12. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^9 x}$;
13. $\int ctg^3 3x dx$;

14. $\int \frac{dx}{cos^4 x\, sin^2 x}$;

15. $\int sin 3x\, sin\, x dx$;

16. $\int sin \frac{x}{2} cos \frac{x}{3} dx$.

3.6. Інтегрування деяких іраціональних функцій

Насамперед зауважимо, що інтеграл від іраціональної функції не завжди обчислюється в скінченному вигляді. Розглянемо деякі типи таких інтегралів, які за допомогою певної підстановки можна звести до інтеграла від раціональної функції, а отже, знайти його.

1) Інтеграли виду $\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, ..., x^{\frac{m_p}{n_p}}\right) dx$, де $m_i, n_i > 1$, $i = 1,2,..., p$ - натуральні числа, обчислюються за допомогою підстановки $x = t^k$, де k - спільний знаменник дробів $\frac{m_i}{ni}$.

2) Інтеграли виду $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_p}{n_p}}\right) dx$,

де a, b, c, d - дійсні числа, причому $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ (бо у противному випадку відношення $\frac{ax+b}{cx+d}$ є сталим і підінтегральна функція в цьому разі є раціональною функцією від x) за допомогою підстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$ зводяться до інтегралів від раціональної функції змінної t.

3) а) Інтеграли виду $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ вилученням повного квадрату під радикалом зводяться до табличних інтегралів:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}, \quad \int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}};$$

б) інтеграли виду $\int \frac{dx}{(x-\alpha)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}}$ за допомогою підстановки $x - \alpha = \frac{1}{t}$ зводяться до інтегралів попереднього виду.

4) Для перелічених нижче видів ірраціональностей використовуються тригонометричні підстановки, що дозволяють прийти до інтегралів від тригонометричних функцій $\sin x$ і $\cos x$.

Розглянемо випадки:

а) для інтегралів виду $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$ застосовується підстановка $x = a\sin t$ або $x = a\cos t$;

б) для інтегралів виду $\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)dx$ застосовується підстановка $x = atgt$ або $x = actgt$;

в) для інтегралів виду $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$ підстановка $x = \frac{a}{\cos t}$ або $x = \frac{a}{\sin t}$ дає змогу позбутися ірраціональності.

Зразки розв'язування задач

Обчислити інтеграли.

1. $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$.

Найменшим спільним кратним показників коренів є 4. Виконаємо підстановку $x = t^4$, $dx = 4t^3 dt$, $\sqrt[4]{x} = t$, $\sqrt{x} = t^2$.

$$\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} = \int \frac{(1+t)4t^3 dt}{t^4 + t^2} = 4\int \frac{(1+t)t^3 dt}{t^2\left(t^2+1\right)} = 4\int \frac{(1+t)t}{t^2+1}dt = 4\int \frac{t^2+t}{t^2+1}dt.$$

Отримали інтеграл від неправильного раціонального дробу. Виділивши цілу частину дробу і виконавши почленне ділення в отриманому правильному дробу, матимемо:

$$4\int \frac{t^2+t}{t^2+1}dt = 4\int \left(1 + \frac{t-1}{t^2+1}\right)dt = 4\int dt + 4\int \frac{tdt}{t^2+1} - 4\int \frac{dt}{t^2+1} = 4t +$$
$$+ 2\ln\left(t^2+1\right) - 4arctgt + C.$$

Повернемось до початкової змінної, враховуючи що $t = \sqrt[4]{x}$. Тоді

$$\int \frac{1+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}dx = 4\sqrt[4]{x} + 2\ln\left(\sqrt{x}+1\right) - 4arctg\sqrt[4]{x} + C.$$

2. $$\int \frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)} = \left| \begin{array}{l} x = t^6, t = \sqrt[6]{x} \\ dx = 6t^5 dt \\ \sqrt{x} = t^3 \\ \sqrt[3]{x^2} = t^4 \end{array} \right| = \int \frac{6t^5 dt}{t^6\left(t^3+t^4\right)} = 6\int \frac{dt}{t\left(t^3+t^4\right)} = 6\int \frac{dt}{t^4(1+t)}.$$

Для інтегрування отриманого раціонального дробу запишемо його у вигляді суми найпростіших дробів:

$$\frac{1}{t^4(1+t)} = \frac{A}{t_4} + \frac{B}{t_3} + \frac{C}{t_2} + \frac{D}{t} + \frac{E}{t+1}.$$

Невизначені коефіцієнти A, B, C, D, E знайдемо порівнянням коефіцієнтів при однакових степенях x в лівій та правій частинах рівності: $1 = A(t+1) + B(t+1)t + C(t+1)t^2 + D(t+1)t^3 + Et^4$. Отримаємо: $A = C = E = 1,\ B = D = -1$.

Шуканий інтеграл матиме вигляд:

$$\int \frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)} = 6\int\left(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1}\right)dt = 6\left(\frac{t^{-3}}{-3} - \frac{t^{-2}}{-2} - \frac{t^{-1}}{-1} - \right.$$

$$\left. - ln|t| + ln|t+1|\right) + C = -\frac{2}{t^3} + \frac{3}{t^2} + \frac{6}{t} + 6\,ln\left|\frac{t+1}{t}\right| + C = -\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{6}{\sqrt[6]{x}} +$$

$$+ 6\,ln\frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x}} + C.$$

3. $$\int \frac{\left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x} + 1\right)dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[6]{x^5}} = \left| \begin{array}{l} x = t^{12}, t = \sqrt[12]{x} \\ dx = 12t^{11} dt \\ \sqrt[4]{x} = t^3, \sqrt[3]{x} = t^4, \sqrt[3]{x^2} = t^8, \sqrt[6]{x^5} = t^{10} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\left(t^3 - t^4 + 1\right)12t^{11} dt}{t^8 - t^{10}} = 12\int \frac{\left(t^3 - t^4 + 1\right)t^3 dt}{1 - t^2} = 12\int \frac{t^7 - t^6 - t^3}{t^2 - 1}dt =$$

$$= 12\int\left(t^5 - t^4 + t^3 - t^2 - 1 - \frac{1}{t^2-1}\right)dt = 12\left(\frac{t^6}{6} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} - t - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right) + C = 2\sqrt{x} - \frac{12}{5}\sqrt[12]{x^5} + 3\sqrt[3]{x} - \sqrt[12]{x} - \frac{1}{2}ln\left|\frac{\sqrt[12]{x}-1}{\sqrt[12]{x}+1}\right| + C.$$

4. $$\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x-3}} = \left| \begin{array}{l} 2x - 3 = t^3, t = \sqrt[3]{2x-3} \\ 2dx = 3t^2 dt \\ dx = \frac{3}{2}t^2 dt \\ x = \frac{t^3+3}{2} \end{array} \right| = \frac{3}{4}\int \frac{\left(t^3+3\right)t^2 dt}{t} = \frac{3}{4}\int\left(t^4 + 3t\right)dt =$$

$$=\frac{3}{4}\left(\frac{t^5}{5}+\frac{3t^2}{2}\right)+C=\frac{3}{20}\sqrt[3]{(2x-3)^5}+\frac{9}{8}\sqrt[3]{(2x-3)^2}+C.$$

5. $\int\frac{\sqrt{x+2}+3}{\sqrt{x+2}-4}dx=\left|\begin{matrix}x+2=t^2\\ dx=2tdt\end{matrix}\right|=\int\frac{t+3}{t-4}2tdt=2\int\frac{t^2+3t}{t-4}dt=$

$$=2\int\left(t+7+\frac{28}{t-4}\right)dt=2\left(\frac{t^2}{2}+7t+28\,ln|t-4|\right)+C=x+2+14\sqrt{x+2}+$$

$$+56\,ln\left|\sqrt{x+2}-4\right|+C.$$

6. $\int\frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx=\left|\begin{matrix}x+1=t^6\\ dx=6t^5dt\\ \sqrt{x+1}=t^3\\ \sqrt[3]{x+1}=t^2\end{matrix}\right|=\int\frac{1-t^3}{1+t^2}\cdot 6t^5dt=-6\int\frac{t^8-t^5}{t^2+1}dt=$

$$=-6\int\left(t^6-t^4-t^3+t^2+t-1-\frac{t-1}{t^2+1}\right)dt=-6\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}-t\right)+$$

$$+6\int\frac{tdt}{t^2+1}-6\int\frac{dt}{t^2+1}=-\frac{6}{7}t^7+\frac{6}{5}t^5+\frac{3}{2}t^4-2t^3-3t^2+6t+3\,ln\left(t^2+1\right)-$$

$$-6arctgt+C=-\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7}+\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-2\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}+$$

$$+6\sqrt[6]{x+1}+3\,ln\left|\sqrt[3]{x+1}+1\right|-6arctg\sqrt[6]{x+1}+C.$$

7. $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$.

Введемо підстановку $\frac{1-x}{1+x}=t^2$. Тоді $1-x=t^2(1+x)$, $1-x=t^2+t^2x$, $1-t^2=t^2x+x$, $x\left(t^2+1\right)=1-t^2$, звідки $x=\frac{1-t^2}{t^2+1}$. Знайдемо dx:

$$dx=\frac{-2t\left(t^2+1\right)-2t\left(1-t^2\right)}{\left(t^2+1\right)^2}dt=\frac{-2t^3-2t-2t+2t^3}{\left(t^2+1\right)^2}dt=-\frac{4tdt}{\left(t^2+1\right)^2}.$$

Після підстановки отримаємо: $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=-4\int t\cdot\frac{tdt}{\left(t^2+1\right)^2}=-4\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+1\right)^2}$.

Інтеграл може бути обчислений розкладанням дробу на суму найпростіших дробів. Розглянемо інший спосіб. Проінтегруємо частинами:

$$-4\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+1\right)^2}=\left|\begin{matrix}u=t,du=dt\\ dv=\frac{tdt}{\left(t^2+1\right)^2},v=-\frac{1}{2}\left(t^2+1\right)^{-1}=-\frac{1}{2\left(t^2+1\right)}\end{matrix}\right|=$$

$$=-4\left[-\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}\right]=2\frac{t}{t^2+1}-2arctgt+C.$$

Повернувшись до початкової змінної, маємо:

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=2\cdot\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{\frac{1-x}{1+x}+1}-2arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C=2\cdot\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{\frac{2}{1+x}}-2arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C=$$

$$=(1+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-2arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C=\sqrt{(1+x)(1-x)}-2arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C=$$

$$=\sqrt{1-x^2}-2arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C.$$

8. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

Виділимо під коренем повний квадрат, звівши тим самим інтеграл до табличного:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+4x+4\right)-4+5}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+1}}=$$

$$=ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+1}\right|+C.$$

9. $\int\frac{dx}{\sqrt{5+7x-3x^2}}$.

Перетворимо підкореневий вираз:

$$\sqrt{5+7x-3x^2}=\sqrt{3\left(\frac{5}{3}+\frac{7}{3}x-x^2\right)}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{5}{3}+\frac{49}{36}-\frac{49}{36}+\frac{7}{3}x-x^2}=$$

$$=\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{109}{36}-\left(x^2-\frac{7}{3}x+\frac{49}{36}\right)}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{109}{36}-\left(x-\frac{7}{6}\right)^2}.$$

Тоді інтеграл має вигляд:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5+7x-3x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{109}{36}-\left(x-\frac{7}{6}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}arcsin\frac{x-\frac{7}{6}}{\sqrt{\frac{109}{36}}}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}arcsin\frac{6x-7}{\sqrt{109}}+C.$$

10. $\int\frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$.

Використаємо підстановку $x=\frac{1}{t}$, $dx=-\frac{dt}{t^2}$.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}} = -\int \frac{dt}{t^2 \cdot \frac{1}{t}\sqrt{\frac{5}{t^2}-\frac{2}{t}+1}} = -\int \frac{dt}{t \cdot \sqrt{\frac{5}{t^2}-\frac{2}{t}+1}}.$$

Внесемо в знаменнику t під корінь і отримаємо:

$$-\int \frac{dx}{\sqrt{5-2t+t^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{(t-1)^2+1}} = -ln\left|t-1+\sqrt{(t-1)2+1}\right| + C =$$

$$= -ln\left|\frac{1}{x}-1+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+5}\right| + C.$$

11. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Обчислимо даний інтеграл за допомогою заміни $x = 2\sin t$. Тоді $dx = 2\cos tdt$, $\sin t = \frac{x}{2}$, $t = \arcsin\frac{x}{2}$.

Маємо: $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{4\sin^2 t \cdot 2\cos tdt}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} = \int \frac{4\sin^2 t \cdot 2\cos tdt}{2\sqrt{1-\sin^2 t}} = 4\int \frac{\sin^2 t\cos tdt}{\cos t} =$

$= 4\int \sin^2 tdt$.

Обчислимо отриманий інтеграл, використовуючи формулу пониження степеня: $\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$.

Отримаємо: $4\int \sin^2 tdt = 2\int (1-\cos 2t)dt = 2t - \sin 2t + C = 2\arcsin\frac{x}{2} -$

$$-\sin 2\arcsin\frac{x}{2} + C = 2\arcsin\frac{x}{2} - 2\sin\arcsin\frac{x}{2}\cdot\cos\arcsin\frac{x}{2} + C =$$

$$= 2\arcsin\frac{x}{2} - 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\sqrt{1-\sin^2\arcsin\frac{x}{2}} + C = 2\arcsin\frac{x}{2} - x\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + C =$$

$$= 2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C.$$

Зауваження. У перетвореннях використовуються тотожності:

$$\sin\arcsin\frac{x}{2} = \frac{x}{2},\quad \cos\arcsin\frac{x}{2} = \sqrt{1-\sin^2\arcsin\frac{x}{2}} = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}.$$

12. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}} = \left| \begin{array}{l} x = \frac{3}{\cos t}, \cos t = \frac{3}{x}, t = \arccos\frac{3}{x} \\ dx = \frac{3\sin tdt}{\cos^2 t} \end{array} \right| = \int \frac{3\sin tdt}{\cos^2 t \cdot \frac{9}{\cos^2 t}\sqrt{\frac{9}{\cos^2 t}-9}} =$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{\sin tdt}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}}.$$

Враховуючи, що $\dfrac{1}{cos^2 t} - 1 = tg^2 t = \dfrac{sin^2 t}{cos^2 t}$, маємо далі:

$$\frac{1}{9}\int \frac{sin\,tdt}{\frac{sin\,t}{cos\,t}} = \frac{1}{9}\int cos\,tdt = \frac{1}{9} sin\,t + C = \frac{1}{9} sin\,arccos\frac{3}{x} + C =$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\sqrt{1 - cos^2 arccos\frac{3}{x}} + C = \frac{1}{9}\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}} + C = \frac{1}{9}\cdot\sqrt{x^2 - 9}\cdot\frac{1}{x} + C =$$

$$= \frac{1}{9x}\sqrt{x^2 - 9} + C.$$

13. $$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(25 + x^2\right)^3}} = \left| \begin{array}{l} x = 5tgt, t = arctg\,\frac{x}{5} \\ dx = \frac{5dt}{cos^2 t} \end{array} \right| = \int \frac{5dt}{cos^2 t\left(\sqrt{25 + 25tg^2 t}\right)^3} =$$

$$= \int \frac{5dt}{cos^2 t\cdot 25\left(\sqrt{1 + tg^2 t}\right)^5} = \frac{1}{25}\int \frac{dt}{cos^2 t\left(\sqrt{\frac{1}{cos^2 t}}\right)^3} =$$

$$= \frac{1}{25}\int \frac{dt}{cos^2 t\cdot\frac{1}{cos^3 t}} = \frac{1}{25}\int cos\,tdt = \frac{1}{25} sin\,t + C = \frac{1}{25} sin\,arctg\frac{x}{5} + C =$$

$$= \frac{1}{25} tgarctg\frac{x}{5}\cdot cos\,arctg\frac{x}{5} + C = \frac{1}{25}\cdot\frac{x}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 arctg\,\frac{x}{5}}} + C =$$

$$= \frac{1}{25}\cdot\frac{x}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{25}}} + C = \frac{1}{25}\cdot\frac{x}{5}\cdot\frac{5}{\sqrt{25 + x^2}} + C = \frac{x}{25\sqrt{25 + x^2}} + C.$$

Зауваження. У перетвореннях використовуються тотожності:

$$tgarctg\frac{x}{5} = \frac{x}{5},\quad cos\,arctg\frac{x}{5} = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 arctg\,\frac{x}{5}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{25}}} = \frac{5}{\sqrt{25 + x^2}}.$$

Завдання для самостійної роботи

Обчислити інтеграли:

1. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x^2}dx}{1 + \sqrt{x}}$;

2. $\displaystyle\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)}dx$;

3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{3x + 4}}{1 + \sqrt[3]{3x + 4}}dx$;

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3x + 5}}$;

5. $\displaystyle\int x\sqrt{5 - x^2}\,dx$;

6. $\displaystyle\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2 - 4}}$.

З М І С Т

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2001.

2. Овчинников П.П. та інші. Вища математика: Підручник. У 2 ч. – К.: Техніка, 2004.

3. Шипачёв В.С. Высшая математика: Учебник для вузов. – М.: Высшая школа, 1998.

4. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. У 3-х кн.. – К: Либідь, 1994.

5. Вища математика: Збірник задач: Навчальний посібник / За ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. – К.: А.С.К., 2004.

6. Шипачёв В.С. Задачник по высшей математике: Учебное пособие для вузов.- М.: Высшая школа, 2002.

7. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч.: Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 2000.

Навчальне видання

Кадильникова Тетяна Михайлівна
Шинковська Ірина Леонідівна
Заєць Ірина Петрівна
Запорожченко Олена Євгенівна
Бас Тетяна Петрівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА
В ПРИКЛАДАХ ТА ЗАДАЧАХ
Частина І І

Навчальний посібник

Тем. план 2010, поз.206

Підписано до друку . Формат 60х84 $_{1/16}$ Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид.арк. . Умов. друк. арк. . Тираж 100 пр. Замовлення № .

Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпропетровськ – 5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ