МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

О.Є. ЗАПОРОЖЧЕНКО, О.В. БІЛОВА,
Л.Ф. СУШКО, І.Б. КОЧЕТКОВА

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 3

Навчальний посібник

Затверджено на засіданні Вченої ради академії
як навчальний посібник. Протокол № 1 від 27.01.17

Дніпро НМетАУ 2017

УДК 517(07)
Вища математика. Частина 3: Навч. посібник / О.Є. Запорожченко,О.В.Білова, Л.Ф. Сушко, І.Б. Кочеткова. – Дніпро: НМетАУ, 2017.-55 с.

Наведені докладні теоретичні відомості до вивчення розділів «Застосування похідної» та «Функція двох незалежних змінних». Теоретичні положення супроводжуються необхідними поясненнями, а також розв'язуванням типових задач. Рекомендуються завдання для самостійної роботи з відповідями.

Призначений для студентів з вадами здоров'я спеціальності 133- механічна інженерія бакалаврського рівня.

Бібліогр.: 5 найм.

Друкується за авторською редакцією.

Відповідальний за випуск В.Л.Копорулін, канд. техн. наук, доц.

Рецензенти: Т.С. Кагадій, д-р фіз.-мат. наук, проф. (ДВНЗ НГУ)
І.Ю. Гергель, канд. фіз.-мат. наук, доц. (ДНУ)

ЗМІСТ

ВСТУП

З кожним роком зростає кількість студентів з вадами слуху, які навчаються на різних факультетах академії.

Процес навчання студентів з обмеженими можливостями має свою специфіку, яку треба враховувати під час викладання матеріалу. Мета посібника – допомогти студентам при вивченні дисципліни «Вища математика» розібратися у матеріалі та якісно його засвоїти.

До складу третьої частини посібника увійшли розділи вищої математики: «Застосування похідної» та «Функція двох незалежних змінних».

Наведено основні теоретичні положення та формули, які проілюстровано детальним розв'язанням задач різного ступеня складності. Наприкінці кожної теми надані задачі для самостійної роботи з відповідями, що дає можливість студентам перевірити себе.

Посібник може використовуватися для самостійної роботи і підготовки до різних видів контролю студентами технічних спеціальностей усіх форм навчання.

1. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ

1.1. Рівняння дотичної та нормалі до кривої

Розглянемо в прямокутній системі координат деяку криву, що задана рівнянням $y = f(x)$ і має в точці $M_0(x_0, y_0)$ не вертикальну дотичну (рис. 2.1). Рівняння цієї дотичної має вигляд:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \tag{3.1}$$

Нормаллю до кривої називається пряма, що проходить через точку дотику та перпендикулярна до дотичної.

Рівняння нормалі до кривої у точці $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{3.2}$$

Зауваження. У випадку нескінченної похідної $f'(x)$ дотична в точці x_0 паралельна осі $0y$, її рівняння $x = x_0$.

Зразки розв'язування задач

1. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до параболи $y = 2x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

1) Для обчислення кутового коефіцієнту дотичної знайдемо похідну функції: $y' = \left(2x^2\right)' = 4x$.

2) Обчислимо її значення при $x_0 = 1$: $y'(x_0 = 1) = 4 \cdot 1 = 4$.

Отримаємо: $k = tg\alpha = y'(x_0 = 1) = 4$.

2. Знайти кут нахилу параболи $y = x^2 - x + 1$ до осі $0x$ в точці $x_0 = -1$.

Для обчислення кута нахилу кривої в даній її точці знайдемо кут, що утворює дотична, яка проведена в цій точці, з віссю $0x$:

1) $y' = \left(x^2 - x + 1\right)' = 2x - 1.$

2) $y'(x_0 = -1) = 2 \cdot (-1) - 1 = -3.$

3) $k = tg\alpha = y'(x_0 = -1) = -3$, звідки $\alpha = arctg(-3) \approx 108^\circ.$

3. До кривої $y = 3x^2 - x$ у точці $x_0 = -1$ проведені дотична та нормаль. Скласти їх рівняння.

Для запису рівняння дотичної знайдемо ординату точки M, через яку вона проходить, та кутовий коефіцієнт цієї дотичної.

1) $y_0 = y(x_0 = -1) = 3 \cdot (-1)^2 - (-1) = 4$; $M(-1;4)$.

2) $y' = \left(3x^2 - x\right)' = 6x - 1$.

3) $k = y'(x_0 = -1) = 6 \cdot (-1) - 1 = -7$.

4) Підставивши координати точки M та значення k в рівняння (1.1) та (1.2), отримаємо:

$y - 4 = -7 \cdot (x + 1)$ або $7x + y + 3 = 0$ – рівняння дотичної;

$y - 4 = \dfrac{1}{7} \cdot (x + 1)$ або $x - 7y + 29 = 0$ – рівняння нормалі**.**

4. Знайти координати точки, в якій дотична до кривої $y = x^2 - x - 12$ утворює кут 45° з віссю $0x$.

1) Знайдемо тангенс кута нахилу дотичної, проведеної в шуканій точці, до осі $0x$: $tg\alpha = y' = \left(x^2 - x - 12\right)' = 2x - 1$.

2) За умовою задачі кут $\alpha = 45^\circ$, тому $tg\,45^\circ = 2x - 1$ або $1 = 2x - 1$, звідки $x = 1$.

3) Визначимо ординату шуканої точки: $y(x = 1) = 1^2 - 1 - 12 = -12$; $M(1;-12)$.

5. Знайти кут, під яким крива $y = x^2 + x$ перетинає вісь $0x$.

1) Знайдемо точки перетину параболи $y = x^2 + x$ з віссю $0x$, для цього розв'яжемо систему $\begin{cases} y = x^2 + x, \\ y = 0. \end{cases}$

Будемо мати: $x^2 + x = 0$, $x \cdot (x + 1) = 0$, звідки $x_1 = 0$, $x_2 = -1$. Тобто парабола перетинає вісь $0x$ у точках $O(0;0)$ та $A(-1;0)$.

2) Обчислимо кутові коефіцієнти дотичних до параболи в обох точках: $y' = \left(x^2 + x\right)' = 2x + 1$.

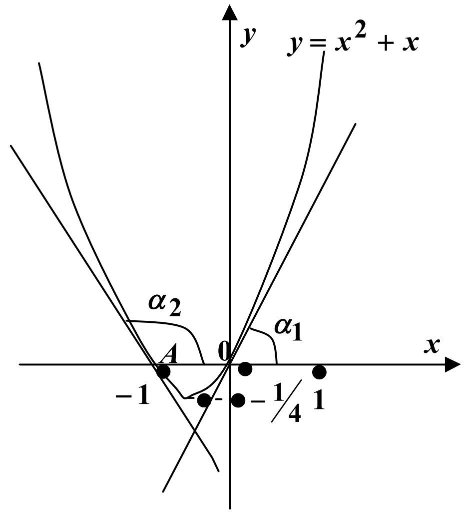
$$k_1 = y'(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1;$$

$$k_2 = y'(-1) = 2 \cdot (-1) + 1 = -1.$$

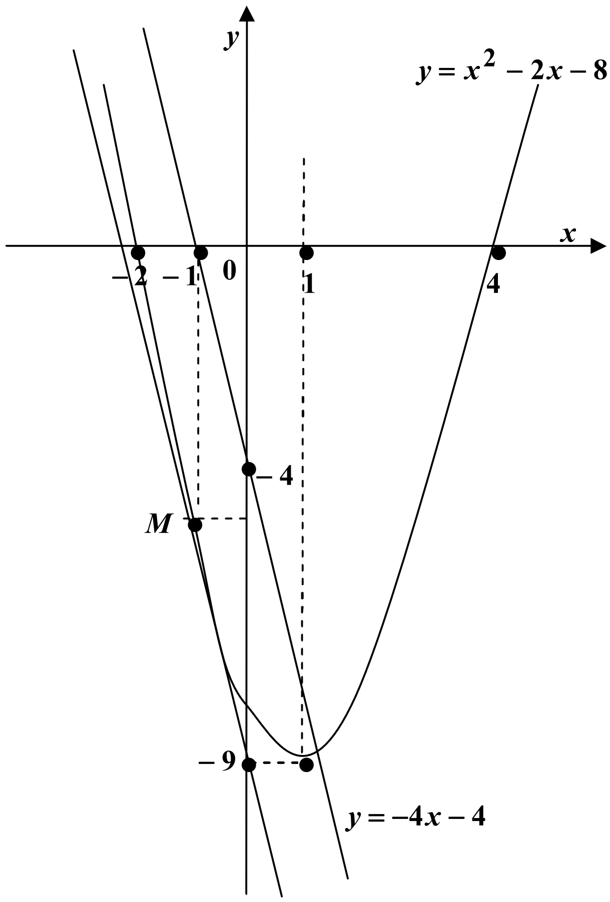
3) Знайдемо кути α_1 та α_2, що утворені дотичними в точках $O(0;0)$ та $A(-1;0)$ з віссю $0x$:

$tg\alpha_1 = 1$, звідки $\alpha_1 = 45^\circ$;

$tg\alpha_2 = -1$, звідки $\alpha_2 = 135^\circ$.



6. На кривій $y = x^2 - 2x - 8$ знайти точку M, у котрій дотична до неї паралельна прямій $4x + y + 4 = 0$.



1) Знайдемо кутовий коефіцієнт дотичної до параболи:

$$k_1 = y' = \left(x^2 - 2x - 8\right)' = 2x - 2.$$

2) Знайдемо кутовий коефіцієнт прямої. З рівняння прямої дістанемо: $y = -4x - 4$, звідки $k_2 = -4$.

3) Оскільки дотична до параболи та пряма $4x + y + 4 = 0$ паралельні, то їх кутові коефіцієнти є рівними, тобто: $2x - 2 = -4$, звідки $x_0 = -1$ (це абсциса точки дотику).

Ординату точки дотику M обчислимо з рівняння параболи:

$$y_0 = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 8 = -5.$$

Отримали: $M(-1;-5)$.

Завдання для самостійної роботи

Задача 1. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до кубічної параболи $y = x^3$ в початку координат та в точці $A(1;1)$.

Відповідь: $k = 3$.

Задача 2. Скласти рівняння дотичної і нормалі до гіперболи $y = \dfrac{2}{x}$ у точці $A(1;1)$.

Відповідь:
$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$
$$y - 1 = \quad 2(x - 2).$$

Задача 3. В якій точці дотична до параболи $y = x^2 - 2x$ паралельна: а) осі $0x$; б) прямій $y = 2x - 1$?

Відповідь: *а)* $M_1(1;0)$; *б)* $M_2(2;0)$.

1.2. Розкриття невизначеностей при обчисленні границь функцій за правилом Лопіталя

При обчислюванні границь функцій часто виникає випадок, коли чисельник та знаменник дробу при $x \to a$ прямують до нуля або до нескінченності. Знаходження таких границь називають розкриттям невизначеностей. Найбільш простим і ефективним методом розкриття невизначеностей є правило Лопіталя.

1.2.1. Розкриття невизначеностей виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ і $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Теорема 1 (перше правило Лопіталя). Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовні на інтервалі (a,b); $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} g(x) = 0$ і $g'(x) \neq 0$ на (a,b). Тоді, якщо існує границя $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = K$, то границя $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ також існує і дорівнює K.

Тобто $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Зауваження 1. Теорема 1 сформульована для правих границь. Вона лишається вірною для лівих границь і для границь взагалі.

Зауваження 2. Твердження теореми 1 залишається в силі, якщо $x \to \infty$.

При розкритті невизначеності $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ діє наступна теорема.

Теорема 2 (друге правило Лопіталя). Нехай $f(x)$ і $g(x)$ диференційовні на інтервалі (a,b); $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = \infty$ і $g'(x) \neq 0$ на (a,b). Тоді, якщо існує границя $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g(x)} = K$, то границя $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$ також існує і дорівнює K .

Тобто $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Зауваження, подані до теореми 1, залишаються в силі і для теореми 2.

Трапляється, що для похідних $f'(x)$ і $g'(x)$ виконуються умови однієї з теорем, тоді правило Лопіталя можна застосовувати повторно:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} .$$

Взагалі, при виконанні відповідних умов цю процедуру можна застосовувати кілька разів.

Правила 1 і 2 застосовуються до випадків, коли обидві функції $f(x)$ і $g(x)$ при $x \to a$ прямують до нуля або до нескінченності. Відповідно, знаходження границі $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ називають розкриттям невизначеностей типу $\left(\frac{0}{0}\right)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Зразки розв'язування задач

Обчислити границі функцій:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sin 5x)'}{(3x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 5x \cdot 5}{3} = \frac{5}{3}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\ln x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2}{\left(\dfrac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to 1}3x^3=3.$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}=\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(-\dfrac{1}{1+x^2}\right)}{\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}\cdot\left(-\dfrac{2}{x^3}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(-\dfrac{1}{1+x^2}\right)}{\left(-\dfrac{2}{x^3+x}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x}{2\left(1+x^2\right)}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1+x^2\right)}{1+x^2}=+\infty.$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+1}{4x^2+3x-2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{8x+3}=\left(\dfrac{5}{\infty}\right)=0.$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^{2x}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{e^{2x}\cdot 2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x}{2e^{2x}\cdot 2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{4e^{2x}\cdot 2}=\dfrac{6}{\infty}=0.$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{\ln x}(n>0)=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n\,x^{n-1}}{\left(\dfrac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}n\,x^n=+\infty.$

1.2.2. Інші види невизначеностей

Досить часто зустрічаються й інші невизначеності, які за допомогою тотожних перетворень можна звести до основних випадків $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ або $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Невизначеність $(0\cdot\infty)$**.**

Якщо $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ і $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=(0\cdot\infty)$.

Дана невизначеність звидиться до невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ за допомогою перетворень $f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)}$ або $f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)}$.

Зразки розв'язування задач

Обчислити границі:

1. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} tg2x\cdot(tg\,x-ctg\,x)=(\infty\cdot 0)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{tg\,x-ctg\,x}{\left(\frac{1}{tg2x}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{tg\,x-ctg\,x}{ctg2x}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\left(\frac{1}{cos^2 x}+\frac{1}{sin^2 x}\right)}{\left(-\frac{1}{sin^2 2x}\cdot 2\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\left(sin^2 x+cos^2 x\right)\cdot sin^2 2x}{-2\,sin^2 x\cdot cos^2 x}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{sin^2 2x}{sin^2 x\cdot cos^2 x}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)}=-\frac{1}{2}\cdot 4=-2.$$

2. $$\lim_{x\to 0,5} sin(2x-1)\cdot tg\pi\,x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0,5}\frac{sin(2x-1)}{ctg\pi\,x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0,5}\frac{2\,cos(2x-1)}{\left(\frac{-\pi}{sin^2\pi\,x}\right)}=-\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 0,5}cos(2x-1)\,sin^2\pi\,x=-\frac{2}{\pi}.$$

Невизначеність $(\infty-\infty)$

Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ і $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, то обчислення границі $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=(\infty-\infty)$ може бути зведено до невизначеності $(0\cdot\infty)$ шляхом тотожного перетворення різниці функцій у добуток:

$$f(x)-g(x)=f(x)\cdot g(x)\cdot\left[\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}\right]$$ або

$$f(x)-g(x)=f(x)\cdot\left[1-\frac{g(x)}{f(x)}\right]=g(x)\cdot\left[\frac{f(x)}{g(x)}-1\right].$$

Зразки розв'язування задач

Обчислити границі:

1. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\sec x-tg\,x)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{-\cos x}{-\sin x}=\frac{0}{-1}=0.$$

2. $$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to1}\frac{x-1-\ln x}{\ln x(x-1)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}(x-1)+\ln x\cdot1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\frac{x-1}{x}\right)}{\left(\frac{x-1+x\ln x}{x}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x-1+x\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{1+\ln x+x\cdot\frac{1}{2}}=\lim_{x\to1}\frac{1}{2+\ln x}=\frac{1}{2}.$$

3. $$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{3x}-x\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to+\infty}e^{3x}\cdot\left(1-\frac{x}{e^{3x}}\right).$$

Обчислимо окремо $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^{3x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{3x}\cdot3}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0.$

Тоді, оскільки $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{3x}=+\infty$, **то** $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{3x}\cdot\left(1-\frac{x}{e^{3x}}\right)=\infty.$

Невизначеності $\left(0^0\right),\left(\infty^0\right),\left(1^\infty\right)$

Розглянемо степенево–показникову функцію $y=[f(x)]^{g(x)}$.

В залежності від того, до чого прямує основа і показник степеню, маємо одну з перелічених невизначеностей.

Нехай $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ і $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$.

Розглянемо натуральний логарифм $\ln y=\ln[f(x)]^{g(x)}=g(x)\cdot\ln f(x)$ та границю $\lim\limits_{x\to a}\ln y=\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot\ln f(x)=(0\cdot\infty)$.

Нехай ця границя обчислена за правилом Лопіталя і дорівнює A. Тоді $\lim\limits_{x\to a}\ln y=\ln\lim\limits_{x\to a} y=A$. Звідси $\lim\limits_{x\to a} y=e^A$; $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=e^A$.

Зразки розв'язування задач

Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\infty^0\right)$.

Позначимо $y=\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$. $\ln y=\ln\left[\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}\right]=\frac{1}{x}\cdot\ln\left(1+x^2\right)=\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}$.

Обчислимо $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln y=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x}{1}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{2x}=\left(\frac{2}{\infty}\right)=0$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln y=\ln\lim\limits_{x\to+\infty} y=0$.

Тоді $\lim\limits_{x\to+\infty} y=e^0=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}=1$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{ctg^2 x}=\left(1^\infty\right)$.

Позначимо $y=(\cos x)^{ctg^2 x}$.

$$\ln y=\ln\left[(\cos x)^{ctg^2 x}\right]=ctg^2 x\cdot\ln\cos x=\frac{\ln\cos x}{\left(\frac{1}{ctg^2 x}\right)}=\frac{\ln\cos x}{tg^2 x}.$$

Обчислимо $\lim\limits_{x\to 0}\ln y=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{tg^2 x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{2tg\, x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}=$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-tg\, x}{2tg\, x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos^2 x}{2} = \frac{-1}{2}. \quad \lim_{x\to 0} \ln y = \ln \lim_{x\to 0} y = -\frac{1}{2}.$$

Тоді $\lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{ctg^2 x} = e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

Завдання для самостійної роботи

Обчислити границі:

Задача 1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos m\, x}{1-\cos n\, x}$.

Відповідь: $\dfrac{m^2}{n^2}$.

Задача 2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4 - 16}{3x^2 + x - 14}$.

Відповідь: $\dfrac{32}{13}$.

Задача 3. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3 + 4x + 5}{x^3 + (2-x)^3}$.

Відповідь: ∞.

Задача 4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{3x+3} - 3}{4 - x^2}$.

Відповідь: $-\dfrac{1}{8}$.

Задача 5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\log_3 x}{x^2}$.

Відповідь: 0.

Задача 6. $\lim\limits_{x \to \infty} x^3 \cdot e^{-2x}$.

Відповідь: 0.

Задача 7. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

Задача 8. $\lim\limits_{x \to 0} (\cos 5x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Відповідь: $e^{-\frac{25}{2}}$.

1.3. Дослідження функцій за допомогою похідної

1.3.1. Зростання і спадання функції

Функція $y = f(x)$ називається ***зростаючою*** на інтервалі (a,b), якщо для будь-яких x_1 і x_2, що належать до цього інтервалу, і таких, що $x_1 < x_2$, справджується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$.

Функція $y = f(x)$ називається ***спадною*** на інтервалі (a,b), якщо для будь-яких x_1 і x_2, що належать до цього інтервалу, і таких, що $x_1 < x_2$, справджується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$.

Як зростаючі, так і спадні функції називаються ***монотонними*,** а інтервали, в яких функція зростає або спадає – ***інтервалами монотонності.***

Зростання і спадання функції $y = f(x)$ характеризується знаком її похідної: якщо у деякому інтервалі $f'(x) > 0$, то функція зростає в цьому інтервалі; якщо ж $f'(x) < 0$, то функція спадає в цьому інтервалі.

Інтервали монотонності можуть відділятися один від одного або точками, де похідна дорівнює нулю (їх називають ***стаціонарними точками*)**, або точками, де похідна не існує. Точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує називаються ***критичними точками***.

Отже, <u>щоб знайти інтервали монотонності функції</u> $f(x)$, треба:

1) знайти область визначення функції;
2) знайти похідну даної функції;
3) знайти критичні точки з рівняння $f'(x)=0$ та за умови, що $f'(x)$ не існує;
4) розділити критичними точками область визначення на інтервали і у кожному з них визначити знак похідної.

   На інтервалах, де похідна додатна, функція зростає, а де від'ємна – спадає.

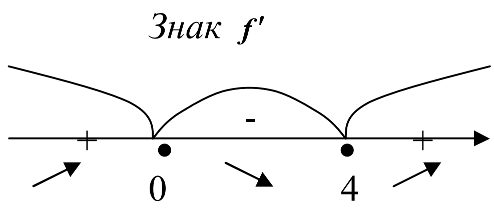
Зразки розв'язування задач

Знайти інтервали монотонності функції:

1. $f(x)=x^3-6x^2+4$.

1) Область визначення $D(f): x\in(-\infty;+\infty)$.
2) $f'(x)=3x^2-12x$.
3) Критичні точки: $f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-12=0$ або $3x(x-4)=0$, звідки $x_1=0,\quad x_2=4$.

   Похідна існує на всій області визначення.
4) Функція зростає на інтервалах $(-\infty;0)$ і $(4;+\infty)$. Функція спадає на інтервалі $(0;4)$.



2. $f(x)=x^3-3x^2+6x-5$.

1) Область визначення $D(f): x\in(-\infty;\infty)$.
2) $f'(x)=3x^2-6x+6$.
3) Критичні точки: $f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-6x+6=0$ або $x^2-2x+2=0$. Оскільки $D=4-4\cdot1\cdot2=-4<0$, рівняння не має коренів, тобто похідна не обертається в нуль. $f'(x)$ існує на всій області визначення. Отже, критичних точок немає.
4) $f'(x)$ приймає тільки додатні значення, функція зростає на інтервалі $(-\infty;\infty)$.

3. $f(x)=\dfrac{4}{x}-2x$.

1) Область визначення $D(f): x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

2) $f'(x) = -\dfrac{4}{x^2} - 2 = \dfrac{-4 - 2x^2}{x^2} = \dfrac{-2(2 + x^2)}{x^2}$.

3) Критичні точки: $f'(x) \neq 0$, бо $2 + x^2 \neq 0$.

Похідна не існує в точці $x = 0$, але ця точка не входить в $D(f)$. Тобто критичних точок немає.

4) На всій області визначення $f'(x) < 0$, отже функція всюди спадає.

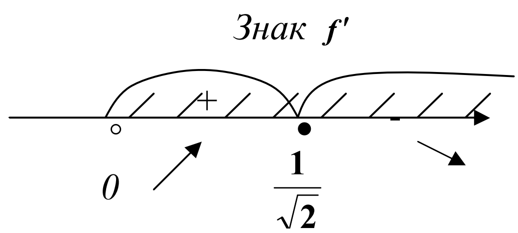
4. $f(x) = \ln x - x^2$.

1) Область визначення $D(f): x \in (0; \infty)$.

2) $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 2x = \dfrac{1 - 2x^2}{x}$.

3) Критичні точки: $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2x^2 = 0$, звідки $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, але $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \notin D(f)$. Похідна існує на всій області визначення.

4) Функція зростає на інтервалі $\left(0; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, спадає на інтервалі $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \infty\right)$.



5. $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

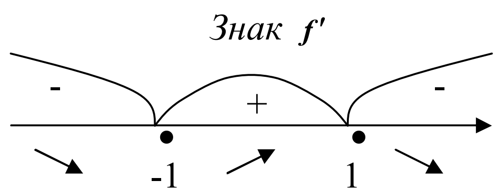
1) Область визначення $D(f): x \in (-\infty; \infty)$.

2) $f'(x) = \dfrac{2(1 + x^2) + 2x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \dfrac{2 + 2x^2 + 4x^2}{(1 + x^2)^2} = \dfrac{2 + 2x^2}{(1 + x^2)^2}$.

3) Критичні точки: $f'(x) = 0 \Rightarrow 2 - 2x^2 = 0$ або $1 - x^2 = 0$, звідки $x = \pm 1$.

Похідна існує для всіх $x \in (-\infty; \infty)$.

4) Функція зростає на інтервалі $(-1; 1)$, спадає на інтервалах $(-\infty; -1)$ і $(1; \infty)$.



Завдання для самостійної роботи

Знайти інтервали монотонності функцій:

Задача 1. $y=\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2$.

Відповідь: y спадає, якщо $x\in(-\infty,0)$; зростає, якщо $x\in(0,\infty)$.

Задача 2. $y=ln\left(1+x^2\right)$

Відповідь: y спадає при $x\in(-\infty,0)$, зростає при $x\in(0,\infty)$.

Задача 3. $y=\frac{2x}{x^2+1}$

Відповідь: y спадає при $x\in(-\infty,-1),(1,\infty)$, зростає при $x\in(-1,1)$.

Задача 4. $y=\sqrt{x-x^2}$

Відповідь: y зростає при $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$, спадає при $x\in\left(\frac{1}{2},1\right]$.

1.3.2. Локальний екстремум функції

Точка x_0 називається ***точкою максимуму (або мінімуму)*** функції $f(x)$, якщо існує такий окіл $0<|x-x_0|<\delta$ цієї точки, який належить області визначення функції, і для всіх x з цього околу виконується нерівність $f(x)<f(x_0)$ (або $f(x)>f(x_0)$).

Перше правило знаходження екстремумів (максимумів і мінімумів) за допомогою першої похідної:

1) знайти область визначення $f(x)$;
2) знайти похідну $f'(x)$;
3) знайти критичні точки;
4) дослідити знак $f'(x)$ на інтервалах, на які знайдені критичні точки ділять область визначення $f(x)$.

При цьому критична точка x_0 є точкою мінімуму, якщо при переході через неї зліва направо $f'(x)$ змінює знак з "–" на "+", x_0 є точкою максимуму, якщо $f'(x)$ змінює знак з "+" на "-".

5) обчислити значення функції в точках екстремуму (екстремуми).

Виявляється, що в окремих випадках можна застосовувати простіше правило дослідження функції на екстремум, використавши при цьому похідну другого порядку.

Друге правило знаходження екстремумів :

1) знайти область визначення $f(x)$;
2) знайти похідну $f'(x)$;
3) знайти стаціонарні точки;
4) знайти похідну $f''(x)$ в стаціонарній точці.

   Якщо при цьому в стаціонарній точці x_0 похідна $f''(x_0) \neq 0$, то x_0 є екстремальною точкою для функції $f(x)$, а саме, точкою мінімуму, якщо $f''(x_0) > 0$, і точкою максимуму, якщо $f''(x_0) < 0$.
5) обчислити значення функції в точках екстремуму.

Зауваження. Друге правило дослідження функцій на екстремум застосовується до більш вузького класу функцій. Його, зокрема, не можна застосовувати при дослідженні на екстремум до тих точок, в яких похідна першого порядку не існує, а також до стаціонарних точок, в яких похідна другого порядку дорівнює нулю. У цих випадках слід застосовувати перше правило.

Зразки розв'язування задач

Знайти екстремуми функцій:

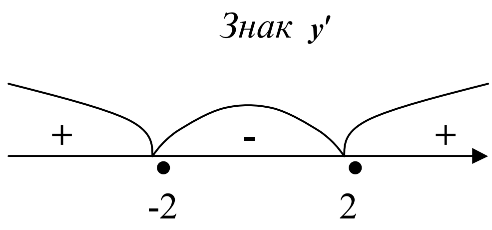
1. $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 4x + 5$.

1) Область визначення $D(f): x \in (-\infty; \infty)$.

2) $f'(x) = x^2 - 4$.

3) Критичні точки: $f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4 = 0, x = \pm 2$.

$f'(x)$ існує для всіх $x \in (-\infty; \infty)$.



4) При переході через точку $x = -2$ похідна змінює знак з « + » на « – », отже $x = -2$ - точка максимуму. При переході через точку $x = 2$ похідна змінює знак з « – » на « + », тому $x = 2$ – точка мінімуму.

5) $y_{max} = y(-2) = -\frac{8}{3} + 8 + 5 = 10\frac{1}{3}$, $\quad y_{min} = y(2) = \frac{8}{3} - 8 + 5 = -\frac{1}{3}$.

2. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 4}$.

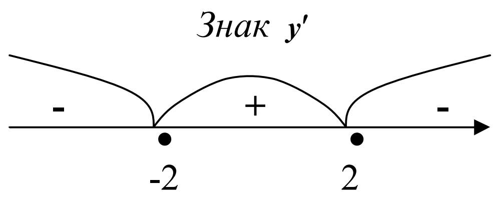
1) Область визначення функції $D(f): x \in (-\infty; \infty)$.

2) $f'(x) = \dfrac{4(x^2+4) - 4x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \dfrac{4x^2 + 16 - 8x^2}{(x^2+4)^2} = \dfrac{16 - 4x^2}{(x^2+4)^2}$.

3) Критичні точки: $f'(x) = 0 \Rightarrow 16 - 4x^2 = 0$ або $4 - x^2 = 0$, звідки $x = \pm 2$.

$f'(x)$ існує для всіх $x \in (-\infty; \infty)$.

4) При переході через точку $x = -2$ похідна змінює знак з « – » на « + », тому точка $x = -2$ є точкою мінімуму. При переході через точку $x = 2$ похідна змінює знак з « + » на « – ». Отже, точка $x = 2$ є точкою максимуму.



5) $y_{min} = y(-2) = \dfrac{4 \cdot (-2)}{(-2)^2 + 4} = -\dfrac{8}{16} = -\dfrac{1}{2}$, $\quad y_{max} = y(2) = \dfrac{4 \cdot 2}{2^2 + 4} = \dfrac{8}{16} = \dfrac{1}{2}$.

3. $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$.

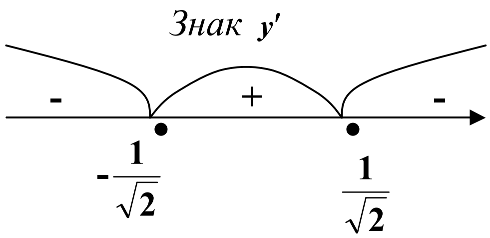
1) $D(f): x \in (-\infty; \infty)$.

2) $f'(x) = 1 \cdot e^{-x^2} + x \cdot \left(-2xe^{-x^2}\right) = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = e^{-x}\left(1 - 2x^2\right)$.

3) Критичні точки: $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; e^{-x}\left(1 - 2x^2\right) = 0$.

Функція $y = e^{-x}$ приймає тільки додатні значення, причому $e^{-x} \neq 0$. Критичну точку знайдемо з умови: $1 - 2x^2 = 0$. Отримаємо $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$f'(x)$ існує для всіх $x \in (-\infty; \infty)$.



4) Функція має дві екстремальні точки: $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ - точка мінімуму; $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ – точка максимуму.

5) $y_{min} = y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2e}}$, $y_{max} = y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2e}}$.

Завдання для самостійної роботи

Знайти екстремуми функцій:

Задача 1. $y = 2x^3 - 15x^2 - 84x + 8.$

Відповідь: $y_{max} = y(-2) = 100;$ $y_{min} = y(7) = -629.$

Задача 2. $y = \frac{x^2}{x+1}.$

Відповідь: $y_{max} = y(-2) = -4;$ $y_{min} = y(0) = 0.$

Задача 3. $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}.$

Відповідь: $y_{max} = y(-2) = -2;$ $y_{min} = y(2) = 2.$

Задача 4. $y = x^2 - 2\ln x.$

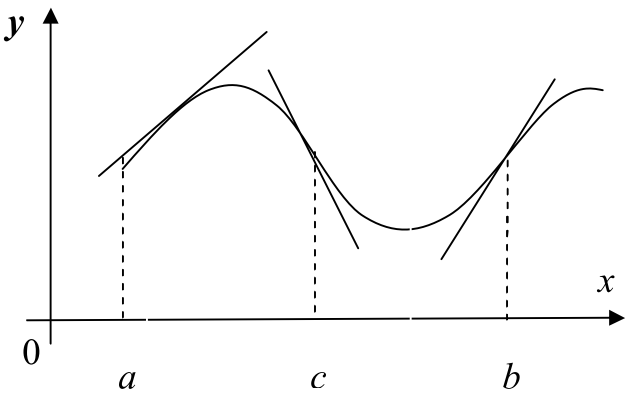
Відповідь: Функція не має екстремумів.

1.3.3. Опуклість і угнутість кривих. Точки перегину

Крива $y = f(x)$ називається ***опуклою*** на інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче довільної її дотичної на цьому інтервалі.

Крива $y = f(x)$ називається ***угнутою*** на інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать вище довільної її дотичної на цьому інтервалі.

Точкою перегину називається така точка кривої, яка відділяє її опуклу частину від вгнутої.



На рисунку крива опукла на (a,c), угнута на (c,b), $x = c$ – точка перегину.

Опуклість і угнутість кривої, яка є графіком функції $y = f(x)$, характеризується знаком її другої похідної: якщо в деякому інтервалі $f''(x) < 0$**,** то крива ***опукла*** на цьому інтервалі, а якщо $f''(x) > 0$, то крива ***угнута*** на цьому інтервалі.

Інтервали опуклості і угнутості можуть відділятися один від одного або точками, де друга похідна дорівнює нулю, або точками, де друга похідна не існує. Ці точки називаються ***критичними точками II роду.***

Якщо при переході через критичну точку II роду x_0 друга похідна $f''(x)$ змінює знак, то графік функції має точку перегину $(x_0; f(x_0))$.

Правило знаходження точок перегину графіка функції $y = f(x)$:

1) знайти область визначення функції;

2) знайти критичні точки II роду функції $y = f(x)$;

3) дослідити знак $f''(x)$ в інтервалах, на які критичні точки ділять область

визначення функції $f(x)$. Якщо критична точка x_0 поділяє інтервали, де $f''(x)$ різних знаків, то x_0 є абсцисою точки перегину графіка функції.

4) обчислити значення функції в точках перегину.

Зразки розв'язування задач

Знайти точки перегину і інтервали опуклості та угнутості графіків функцій.

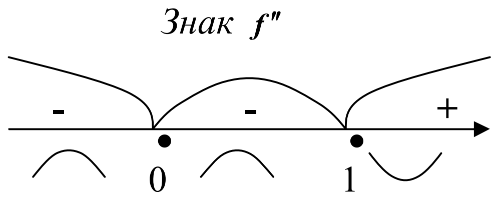
1. $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 4$.

1) Область визначення $D(f): x \in (-\infty; \infty)$.

2) Критичні точки II роду: $f'(x) = 15x^4 - 20x^3$; $f''(x) = 60x^3 - 60x^2$.

а) $f''(x) = 0 \Rightarrow 60x^3 - 60x^2 = 0$ або $x^3 - x^2 = 0$. Маємо $x^2(x-1) = 0$, звідки $x = 0$, $x = 1$.

б) $f''(x)$ існує на всій області визначення.



3) $f''(x) > 0$ при $x \in (1; \infty)$; $f''(x) < 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$.

Отже, на інтервалі $(1; \infty)$ крива угнута. Враховуючи, що в точці $x = 0$ функція неперервна, робимо висновок, що крива опукла на інтервалі $(-\infty; 1)$. При переході через точку $x = 1$ друга похідна змінює знак, тому $x = 1$ – точка перегину. В точці $x = 0$ перегину немає.

4) $f(1) = 3 - 5 + 4 = 2$. $(1; 2)$ – точка перегину.

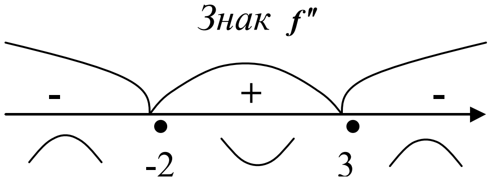
2. $f(x) = 2x^3 - x^4 + 36x^2 - 100$.

1) $D(f): x \in (-\infty; \infty)$.

2) Критичні точки II роду: $f'(x) = 6x^2 - 4x^3 + 72x$; $f''(x) = 12x - 12x^2 + 72$.

а) $f''(x) = 0 \Rightarrow -12x^2 + 12x + 72 = 0$ або $x^2 - x - 6 = 0$, звідки $x_1 = -2$, $x_2 = 3$.

б) $f''(x)$ існує для всіх $x \in (-\infty; \infty)$.



3) Крива опукла на інтервалах $(-\infty;-2)$ і $(3;\infty)$, угнута на інтервалі $(-2;3)$.

В точках $x=-2$ і $x=3$ графік має перегин.

4) $f(-2)=2\cdot(-2)^3-(-2)^4+36\cdot(-2)^2-100=12$.

$f(3)=2\cdot 3^3-3^4+36\cdot 3^2-100=197$. $(-2;12)$ і $(3;197)$ – точки перегину.

3. $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$.

1) Область визначення $D(f)\colon x\in(-\infty;\infty)$.

2) Критичні точки ІІ роду: $f'(x)=\dfrac{1(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\dfrac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$;

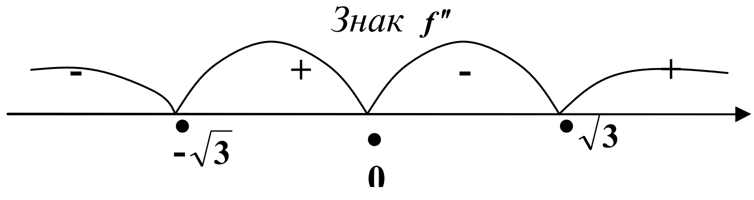
$$f''(x)=\frac{-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}=\frac{(1+x^2)\left[-2x(1+x^2)-4x(1-x^2)\right]}{(1+x^2)^4}=$$

$$=\frac{-2x-2x^3-4x+4x^3}{(1+x^2)^3}=\frac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3}.$$

а) $f''(x)=0 \;\Rightarrow\; 2x^3-6x=0$, $x(x^2-3)=0$, звідки $x=0$ або $x=\pm\sqrt{3}$;

б) $f''(x)$ існує для всіх $x\in D(f)$.

3) Крива опукла на інтервалах $(-\infty;-\sqrt{3})$ і $(0;\sqrt{3})$, угнута на інтервалах $(-\sqrt{3};0)$ і $(\sqrt{3};\infty)$. В точках $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{3}$ графік має перегини.



4) $f(0)=0$. $f(\sqrt{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{1+(\sqrt{3})^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, $\quad f(-\sqrt{3})=\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$.

$(0;0)$; $\left(\sqrt{3};\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$; $\left(-\sqrt{3};-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ – точки перегину.

4. $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^3}$.

1) Область визначення: $x \neq -1$.

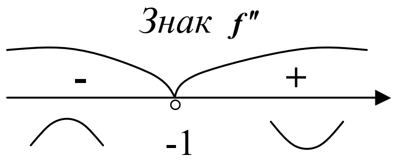
$D(f): x \in (-\infty;-1) \cup (-1;\infty)$.

2) Критичні точки II роду: $f'(x)=-3(x+1)^{-4}$; $f''(x)=12(x+1)^{-5}=\dfrac{12}{(x+1)^5}$.

а) $f''(x)\neq 0$; б) $f''(x)$ не існує при $x=-1$, але $x=-1 \notin D(f)$.

Критичних точок II роду немає, графік не має точок перегину.

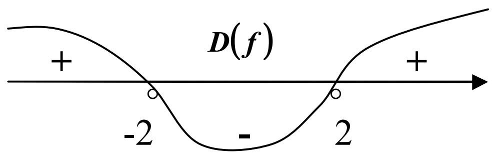
3) Крива опукла на інтервалі $(-\infty;-1)$, угнута на інтервалі $(-1;\infty)$.



5. $f(x)=1-\ln(x^2-4)$.

1) Область визначення функції: $x^2-4>0$.

$D(f): x \in (-\infty;-2) \cup (2;\infty)$.



2) Критичні точки II роду:

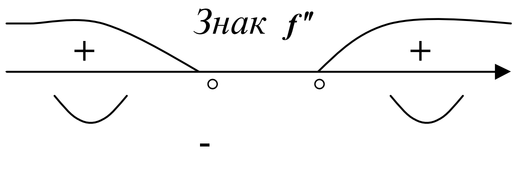
$$f'(x)=-\frac{1}{x^2-4}\cdot 2x=-\frac{2x}{x^2-4};$$

$$f''(x)=\frac{-2(x^2-4)+2x\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{-2x^2+8+4x^2}{(x^2-4)^2}=\frac{2x^2+8}{(x^2-4)^2}.$$

а) $f''(x)\neq 0$, тому що $2x^2+8\neq 0$; б) $f''(x)$ існує на всій області визначення.

Критичних точок немає. Отже, немає і перегинів графіка.

3) Графік функції вгнутий на всій області визначення.



6. $f(x)=3+\sqrt[3]{x+2}$.

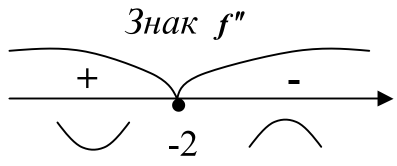
1) Область визначення $D(f): x \in (-\infty;\infty)$.

2) Критичні точки II роду:

$$f'(x)=\frac{1}{3}(x+2)^{-2/3};\quad f''(x)=-\frac{2}{9}(x+2)^{-5/3}=-\frac{2}{9\sqrt[3]{(x+2)^5}}.$$

а) $f''(x) \neq 0$; б) $f''(x)$ не існує при $x = -2 \in D(f)$, тому $x = -2$ – критична точка.

3) Крива опукла на інтервалі $(-2;\infty)$, угнута на інтервалі $(-\infty;-2)$. При $x = -2$ графік має перегин.



4) $f(-2) = 3$. $(-2;3)$ – точка перегину.

7. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$.

1) Область визначення: $x^2 - 4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq \pm 2$.

$D(f)\colon x \in (-\infty;-2) \cup (-2;2) \cup (2;\infty)$.

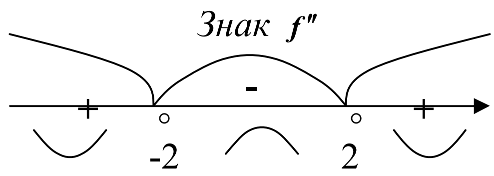
2) Критичні точки II роду: $f'(x) = -\dfrac{1}{\left(x^2-4\right)^2} \cdot 2x = -\dfrac{2x}{\left(x^2-4\right)^2}$;

$$f''(x) = \frac{-2\left(x^2-4\right)^2 + 2x \cdot 2\left(x^2-4\right) \cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^4} = \frac{\left(x^2-4\right)\left[-2\left(x^2-4\right) + 8x^2\right]}{\left(x^2-4\right)^4} = \frac{6x^2+8}{\left(x^2-4\right)^3}.$$

а) $f''(x) \neq 0$, тому що $6x^2 + 8 \neq 0$; б) $f''(x)$ існує для всіх $x \in D(f)$.

Критичних точок немає. Отже, немає і перегинів графіка.

3) Крива опукла на інтервалі $(-2;0)$, угнута на інтервалах $(-\infty;-2)$ і $(2;\infty)$.



Завдання для самостійної роботи

Знайти точки перегину і інтервали опуклості та угнутості графіків функцій.

Задача 1. $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - x^3$

Відповідь: Точки перегину: ***(0;0), (2;-4).***

Графік опуклий *(0,2),* угнутий на $(-\infty,0)$, $(2,\infty)$ **.**

Задача 2. $f(x)=\sqrt[3]{x^5}-2$

Відповідь: Точка перегину: ***(0;-2).***

Графік опуклий $(-\infty,0)$, угнутий на $(0,\infty)$.

Задача 3. $f(x)=\frac{3x-2}{5x}$ **.**

Відповідь: Точок перегину немає. Графік опуклий на $(0,\infty)$,

Угнутий на $(-\infty,0)$.

Задача 4. $f(x)=(x+1)\cdot e^{x+1}$ **.**

Відповідь: Точка перегину $\left(-3;-\frac{2}{e^2}\right)$.

Графік опуклий на $(-\infty,-3)$, угнутий на $(-3,\infty)$.

1.3.4. Асимптоти кривих

Пряма називається ***асимптотою кривої,*** якщо точка кривої необмежено наближується до неї при віддалені її від початку координат. Розрізняють вертикальні, похилі (горизонтальні) асимптоти.

а) **Вертикальні асимптоти.**

Графік функції $y=f(x)$ при $x\to a$ має вертикальну асимптоту, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ або $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$; при цьому точка $x=a$ є точкою розриву II роду. Рівняння вертикальної асимптоти має вигляд $x=a$.

б) **Похилі асимптоти**.

Рівняння похилої асимптоти $y=kx+b$, де $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]$, якщо ці границі існують і скінченні.

Слід окремо розглянути випадки коли $x\to+\infty$ та $x\to-\infty$.

Зразки розв’язування задач

Знайти асимптоти кривих:

1. $y = x + \frac{1}{x}$.

а) $D(y): x \in (-\infty;0) \cup (0;\infty)$.

В точці $x = 0$ функція має розрив II роду, тому що $\lim\limits_{x \to 0 \pm 0}\left(x + \frac{1}{x}\right) = \pm\infty$.

Отже, $x = 0$ - вертикальна асимптота.

б) Знайдемо похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty}(y - kx) = \lim_{x \to \pm\infty}\left(x + \frac{1}{x} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad .$$

Тоді $y = x$ – похила асимптота.

2. $y = \frac{5x}{x^2 - 4}$.

а) Область визначення функції: $x^2 - 4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$.

$D(y): x \in (-\infty;-2) \cup (-2;2) \cup (2;\infty)$.

В точках $x = \pm 2$ функція має розриви II роду, тому що $\lim\limits_{x \to \pm 2 \pm 0} \frac{5x}{x^2 - 4} = \pm\infty$.

Тому графік має дві вертикальні асимптоти $x = -2$ та $x = 2$.

б) Знайдемо похилі асимптоти:

$k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{5}{x^2 - 4} = 0$, $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty}\left(\frac{5x}{x^2 - 4}\right) = 0$. Тоді $y = 0$ – горизонтальна асимптота.

3. $y = \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3}$.

а) Область визначення функції: $x - 3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 3$.

$D(y): x \in (-\infty;3) \cup (3;\infty)$

Обчислимо $\lim\limits_{x \to 3 \pm 0} \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3} = \mp\infty$, тому $x = 3$ – точка розриву II роду.

Отже, $x = 3$ – вертикальна асимптота.

б) Похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x - 6 + \frac{3}{x}}{x - 3} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2 - 6x + 3 - x^2 + 3x}{x - 3} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x + 3}{x - 3} = -3.$$

Маємо: $y = x - 3$ – похила асимптота.

4. $y = xe^x$.

а) Область визначення функції $D(y): x \in (-\infty;+\infty)$.

Точок розриву II роду немає, тому графік функції не має вертикальних асимптот.

б) Знайдемо похилі асимптоти:

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{x} = \lim_{x\to\infty} e^x = \infty, \qquad k_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

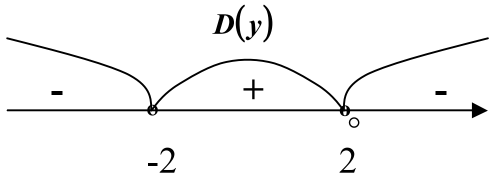
При k_1 (коли $x \to +\infty$) похилої асимптоти не існує. Знайдемо $b_2 = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x\right) = \{\infty \cdot 0\}$. Щоб обчислити границю, перетворимо вираз xe^x до вигляду $\frac{x}{e^{-x}}$. Тоді маємо невизначеність $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, до якої можна застосувати правило Лопіталя, а саме: $b_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}} =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}} = 0$. Маємо: $y = 0$ – горизонтальна асимптота.

5. $y = ln\left(4 - x^2\right)$.

а) Область визначення функції:

$4 - x^2 > 0$. $D(y): x \in (-2;2)$.



Обчислимо $\lim\limits_{x\to-2+0} ln\left(4 - x^2\right) = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to2-0} ln\left(4 - x^2\right) = -\infty$. В точках $x = \pm 2$ функція має розрив II роду. Отже, $x = -2$ та $x = 2$ – вертикальні асимптоти.

б) Похилих асимптот немає, тому що неможливо обчислити коефіцієнти k і b (функція не визначена при $x \to \pm\infty$).

Завдання для самостійної роботи

Знайти асимптоти кривих:

Задача 1. $y = 12x - x^3$.

Відповідь: У графіка немає вертикальних та похилих асимптот.

Задача 2. $y = \dfrac{x^2}{x+3}$.

Відповідь: $x = -3$ – вертикальна асимптота; $y = x - 3$ – похила асимптота при $x \to \pm\infty$.

Задача 3. $y = e^{-x^2}$.

Відповідь: Вертикальних асимптот немає $y = 0$ – похила асимптота при $x \to \pm\infty$.

Задача 4. $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

Відповідь: $x = 0$ – вертикальна асимптота; $y = 0$ – похила асимптота при $x \to +\infty$.

1.3.5. Схема дослідження функції та побудова її графіка

Щоб дослідити функцію та побудувати її графік треба:

1) знайти область визначення функції;
2) знайти (якщо можна) точки перетину графіка з координатними осями;
3) дослідити функцію на періодичність, парність і непарність;
4) знайти точки розриву та дослідити їх;
5) знайти інтервали монотонності, точки екстремумів та значення функції в цих точках;
6) знайти інтервали опуклості, угнутості та точки перегину;
7) знайти асимптоти кривої;
8) побудувати графік функції.

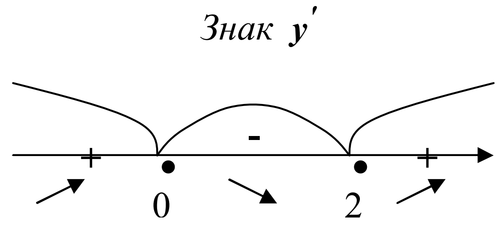
Зразки розв'язування задач

Дослідити функції та побудувати їхні графіки.

1. $y = x^3 - 3x^2$.

1) Функція є многочленом, область існування якого – вся множина дійсних чисел. $D(y): x \in (-\infty;+\infty)$.
2) Знайдемо точки перетину графіка с віссю Ox, для цього покладемо $y = 0$: $x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-3) = 0$, звідки $x_1 = 0,\ x_2 = 3$. Отже, в точках $O(0;0)$ та $A(3;0)$ графік перетинає вісь Ox.

   Точки перетину з віссю Oy: покладемо $x = 0$, тоді знайдемо $y = 0$. Тобто, графік перетинає вісь Oy у точці $O(0;0)$.
3) Функція не періодична, вона не є парною, не є непарною $(y(-x) \neq y(x)$ та $y(-x) \neq -y(x))$.
4) Функція є неперервною на всій числовій прямій. Тобто точок розриву не має.
5) Досліджуємо функцію на монотонність та екстремум. Обчислимо $y' = 3x^2 - 6x$. Знайдемо критичні точки з рівняння $y' = 0$:



   $3x^2 - 6x = 0$ або $3x(x-2) = 0$. Отримаємо, що $x_1 = 0$ та $x_2 = 2$.

Функція зростає на інтервалах $(-\infty;0) \cup (2;+\infty)$; функція спадає на інтервалі $(0;2)$.

Згідно з правилом знаходження екстремуму, $x = 0$ – точка максимуму, $x = 2$ – точка мінімуму.

Обчислимо $y_{max} = y(0) = 0$, $y_{min} = y(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = -4$.

Таким чином, екстремальні точки: $O(0;0)$ та $B(2;-4)$.

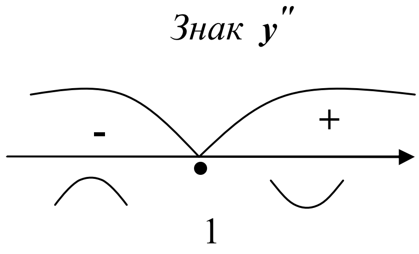
6) Знайдемо інтервали угнутості та опуклості, точки перегину.

   $y'' = \left(3x^2 - 6x\right)' = 6x - 6$.

   Розв'яжемо рівняння $y'' = 0:\ 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$ – критична точка другого роду.

Функція угнута на інтервалі $(1;+\infty)$ та опукла на інтервалі $(-\infty;1)$.

Значення $x=1$ є абсцисою точки перегину. Знайдемо $y(1)=1-3=-2$, тобто точка $C(1;-2)$ – точка перегину графіка.



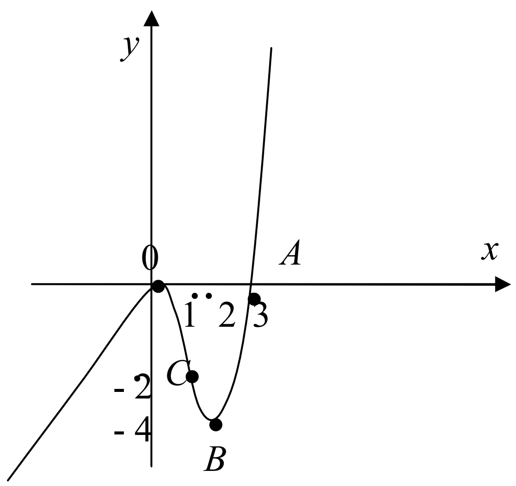
7) Знайдемо асимптоти заданої кривої.

Вертикальних асимптот немає. З'ясуємо, чи є похилі асимптоти.

Обчислимо $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-3x^2}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(3x^2-6x\right)=+\infty$.

Отже, наша крива не має і похилих асимптот.

8) Побудуємо графік функції.



2. $y=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$.

1) $D(y): x\neq 0$, тобто $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

2) Точки перетину графіка з координатними осями. При $y=0: \frac{x}{2}+\frac{2}{x}=0 \Rightarrow$

$\frac{x^2+4}{2x}=0$, звідки $x^2+4\neq 0$, тобто з віссю Ox графік не перетинається.

Зважаючи на те, що $x\neq 0$, робимо висновок, що графік не перетинає вісь Oy.

3) Функція не періодична, вона непарна бо $y(-x) = -\frac{x}{2} - \frac{2}{x} = -\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) =$

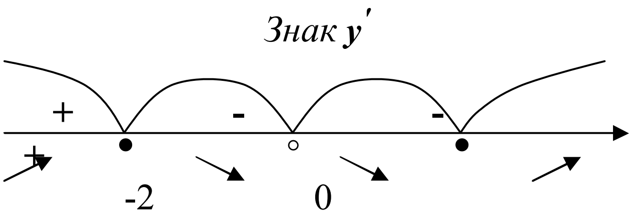
$= -y(x)$. Тому її графік є симетричним відносно початку координат.

4) В точці $x = 0$ функція має розрив II-го роду, тому що $\lim\limits_{x \to 0 \pm 0} \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to 0 \pm 0} \frac{x^2 + 4}{2x} = \pm\infty$. Отже, пряма $x = 0$ – вертикальна асимптота.

5) Знайдемо $y' = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}$. Розв'яжемо рівняння $y' = 0$: $\frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = 0$, $x^2 = 4$,

звідки $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ – критичні точки функції. Похідна не існує при $x = 0 \notin D(y)$.



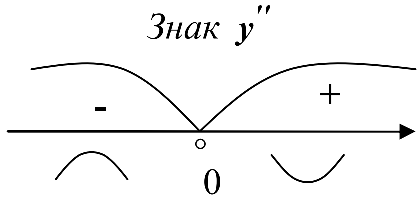
Функція зростає на інтервалах $(-\infty; -2)$ та $(2; +\infty)$; функція спадає на інтервалі $(-2; 2)$.

$x = -2$ – точка максимуму функції, а $x = 2$ – точка мінімуму.

Обчислимо $y_{max} = y(-2) = -1 - 1 = -2$, $y_{min} = y(2) = 1 + 1 = 2$.

Отже, $A_1(-2; -2)$, $A_2(2; 2)$ – екстремальні точки.

6) Знайдемо $y'' = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}\right)' = \frac{4}{x^3}$.



Зважаючи на те, що $y'' = \frac{4}{x^3} \neq 0$ робимо висновок, що точок перегину графік функції не має. Функція угнута на інтервалі $(0; +\infty)$ та опукла на інтервалі $(-\infty; 0)$.

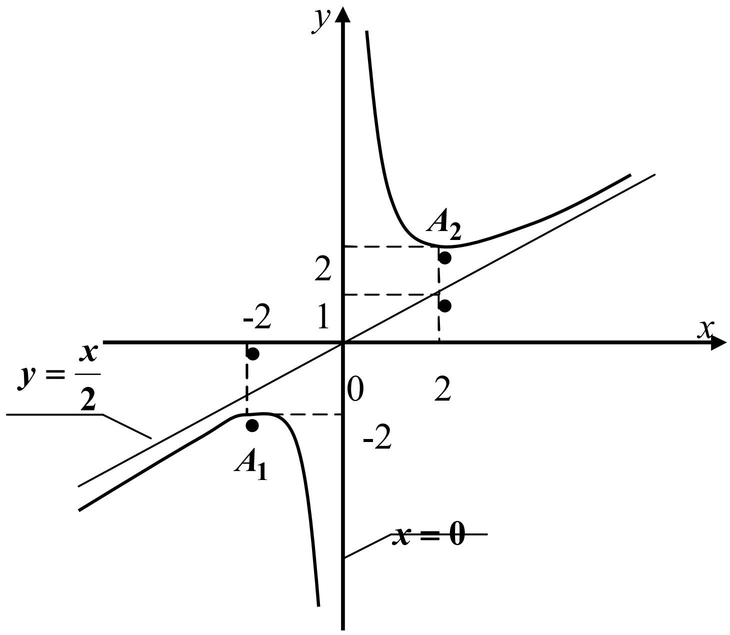
7) Вертикальну асимптоту ми вже знайшли: $x = 0$. Знайдемо похилу асимптоту.

Обчислимо $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{x^2}\right) = \frac{1}{2}$,

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (y - k \cdot x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{x} = 0.$$

Тоді пряма $y = \frac{x}{2}$ – похила асимптота.

8) Побудуємо графік.



3. $y = ln\left(x^2+4\right)$**.**

1) $D(y): x \in (-\infty; +\infty)$.

2) Розглянемо перетин графіка з координатними осями.

З віссю $0y: x=0 \quad \Rightarrow \quad y = ln\,4 \approx 1{,}4$, тобто у точці $A(0; ln\,4)$ графік перетинає вісь $0y$. З віссю $0x: y=0 \quad \Rightarrow \quad ln\left(x^2+4\right)=0$, звідки $x^2+4=1$ або $x^2=-3$. Зрозуміло, що остання рівність розв'язків не має. Отже, графік не перетинає вісь $0x$.

3) Функція не періодична, але є парною, бо $y(-x) = ln\left(x^2+4\right) = y(x)$, тому її графік є симетричним відносно осі $0y$.

4) Точок розриву функція не має.

5) $y' = \frac{2x}{x^2+4}$. Знайдемо критичні точки: $\frac{2x}{x^2+4}=0 \quad \Rightarrow \quad 2x=0 \quad \Rightarrow \quad x=0$.

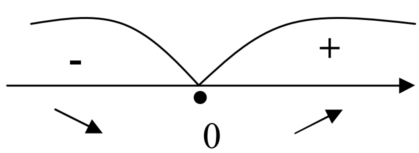
Функція зростає на інтервалі $(0;+\infty)$ та спадає на інтервалі $(-\infty; 0)$.

Точка $x=0$ є точкою мінімуму функції.

Обчислимо $y_{min} = y(0) = ln\,4 \approx 1{,}4$.

Тобто точка екстремуму нашої функції $A(0;1{,}4)$.

Знак y'

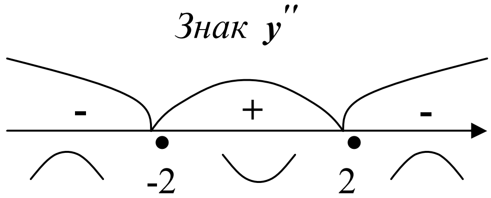


6) Знайдемо $y'' = \left(\dfrac{2x}{x^2+4} \right)' = \dfrac{2\left(x^2+4\right) - 2x \cdot 2x}{\left(x^2+4\right)^2} = \dfrac{8-2x^2}{\left(x^2+4\right)^2}$.

Дослідимо функцію на вгнутість та опуклість.

$y''=0$: $\dfrac{8-2x^2}{\left(x^2+4\right)^2}=0 \;\Rightarrow\; 8-2x^2=0 \;\Rightarrow\; x^2=4$

звідки $x_1=-2$, $x_2=2$ – критичні точки.



Функція угнута на інтервалі $(-2;2)$, опукла на інтервалах $(-\infty;-2)$ та $(2;+\infty)$. У точках $x_1=-2$, $x_2=2$ функція має перегин графіку.

Знайдемо $y(-2)=ln\,8 \approx 2{,}1$, $y(2)=ln\,8 \approx 2{,}1$.

Отже, $C_1(-2;ln\,8)$, $C_2(2;ln\,8)$ – точки перегину.

7) Вертикальних асимптот графік не має.

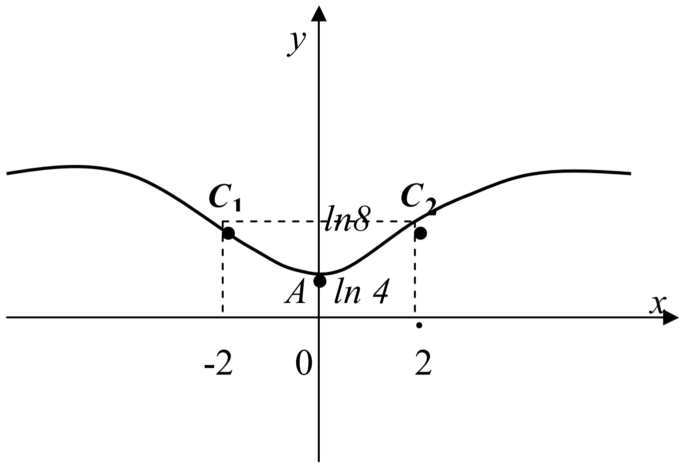
Для похилих асимптот знайдемо k і b.

Будемо мати: $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{ln\left(x^2+4\right)}{x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x}{x^2+4} = 0,$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(y - k\cdot x) = \lim_{x\to\pm\infty} ln\left(x^2+4\right) = +\infty .$$

Отже, похилих асимптот не буде.

8) Будуємо графік.



Завдання для самостійної роботи

Дослідити функції та побудувати їхні графіки:

Задача 1. $y = \dfrac{x^2}{x+1}$.

Задача 2. $y = x^2 - 2\ln x$.

2. ФУНКЦІЯ ДВОХ НЕЗАЛЕЖНИХ ЗМІННИХ

Означення 1. Нехай є 2 множини D та M. Якщо кожній парі дійсних чисел $(x; y)$, що належать множині D, за визначеним правилом ставиться у відповідність одне і тільки одне дійсне число z з M, то кажуть, що на множині D задана функція $z = f(x, y)$ із множиною значень із M.

Означення 2. Множина D називається областю визначення функції, а множина $f(D)$, що складається з усіх чисел виду $z = f(x, y)$, де $x, y \in D$, – множиною значень функції.

Означення 3. Значення функції $z = f(x, y)$ в точці $M\ (x_0, y_0)$ позначають $z_0 = f(x_0; y_0)$ та називають частинним значенням функції.

Отже, наприклад, якщо $z = f(x, y) = \ln(x^2 + y)$, то значення функції в точці $M(1; 3)$ позначають наступним чином:

$$z|_M = z(1; 3) = f(1; 3) = \ln(1^2 + 3) \approx 1{,}3863.$$

Графіком функції $f(x)$ являється поверхня, що складається з точок (x,y,z), де $x, y \in D$, $z = f(x, y)$.

Аналогічно визначається функція будь-якого числа змінних $u = f(x, y, z, \ldots, t)$.

Означення 4. Лінією рівня функції $z = f(x, y)$ називається лінія $f(x, y) = h$ на площині XOY, в точках якої функція утримує постійне значення $z = h$.

Якщо покласти $h = h_1, h_2, \ldots, h_n$ та вибрати ці числа в арифметичній прогресії з різницею d, то ми отримаємо ряд ліній рівня, по взаємному розміщенню яких можна судити про характер змінення функції: де лінії густіше – функція змінюється швидше.

Зразки розв'язування задач

Задача 1. Знайти область визначення функції. Зробити рисунок.

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \ln\left(y^2 + x - 1\right).$$

Розв'язання

Функція визначена і набуває дійсних значень при

$$\begin{cases} 4 - \left(x^2 + y^2\right) \geq 0 \\ y^2 + x - 1 > 0 \end{cases} \text{або} \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ y^2 > 1 - x \end{cases}.$$

Зробимо рисунок.

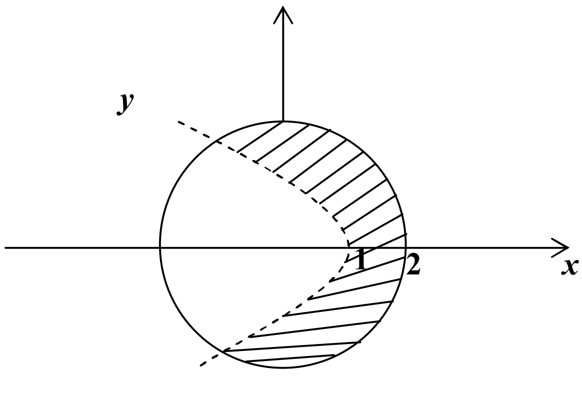


Рис. 4.1

Зауваження. З системи нерівностей видно, що першої нерівності будуть задовольняти координати усіх точок, що лежать всередині круга і на колі, а другому – координати точок, що лежать зовні параболи. Таким чином, обом нерівностям одночасно будуть задовольняти координати точок, що лежать зовні параболи, але всередині круга.

Задача 2. Знайти область визначення функції $z = arcsin\left(2x - y\right)$. Зробити рисунок.

Розв'язання

Областю визначення цієї функції є сукупність пар x і y, які задовольняють нерівностям $-1 \le 2x - y \le 1$. На площині Oxy ця область є смуга, що обмежена прямими $2x - y + 1 = 0$ і $2x - y - 1 = 0$ (рис.1.2).

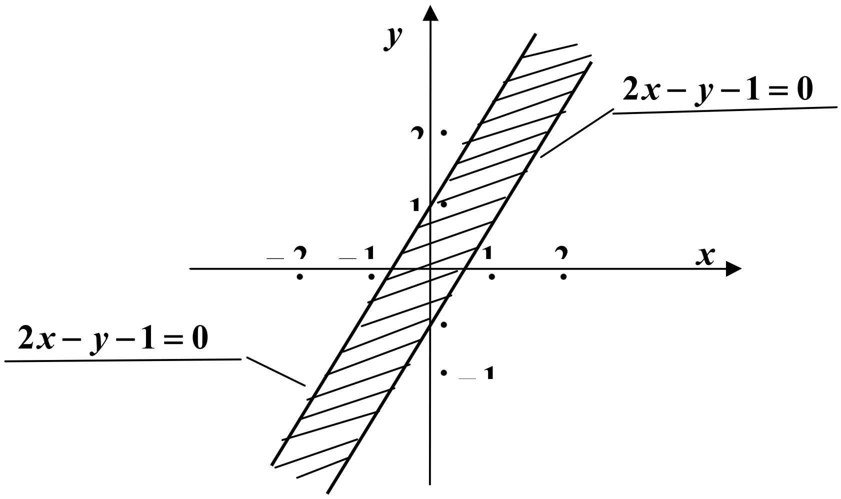


Рис. 4.2

2.1. Частинні похідні першого порядку

Означення 5. Частинною похідною від функції $z = f(x, y)$ по незалежній змінній x або y називається границя відношення відповідного частинного приросту функції до приросту незалежної змінної, при прямуванні останнього до нуля,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = z'_x$$

або

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = z'_y.$$

Відмітимо: якщо від функції z береться похідна $\frac{\partial z}{\partial x}$, то y вважається сталою; якщо знаходиться $\frac{\partial z}{\partial y}$, то x вважається сталою. Для частинних похідних справедливі формули і правила обчислення похідних функцій однієї змінної.

Зразки розв'язування задач

Задача 1. Знайти частинні похідні функції $z = y \cdot ln\left(x^2 - y^3\right)$.

Розв'язання

Знайдемо $\frac{\partial z}{\partial x}$ при умовах, що $y = const$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot \left[ln\left(x^2 - y^3\right)\right]'_x = y\frac{1}{x^2 - y^3} \cdot \left(x^2 - y^3\right)'_x = y\frac{1}{x^2 - y^3} \cdot 2x = \frac{2xy}{x^2 - y^3}.$$

Знайдемо $\frac{\partial z}{\partial y}$, вважаючи, що $x = const.$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (y)'_y \cdot ln\left(x^2 - y^3\right) + y\left(ln\left(x^2 - y^3\right)\right)'_y = 1 \cdot ln\left(x^2 - y^2\right) + y\frac{1}{x^2 - y^3}\left(-3y^2\right) =$$

$$= ln\left(x^2 - y^3\right) - \frac{3y^3}{x^2 - y^3}.$$

Задача 2. Знайти частинні похідні функції $z = \sqrt{x^2 - xy + y^2}$.

Розв'язання

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - xy + y^2}} \cdot \left(x^2 - xy + y^2\right)'_x = \frac{2x - y}{2\sqrt{x^2 - xy + y^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - xy + y^2}} \cdot \left(x^2 - xy + y^2\right)'_y = \frac{-x + 2y}{2\sqrt{x^2 - xy + y^2}}.$$

Задача 3. Знайти $\partial z / \partial x$ і $\partial z / \partial y$, якщо $z = x^{y}\ (x > 0)$.

Розв'язання

Частинну похідну за x цієї функції обчислюють при $y = const$, тобто вона є похідною степеневої функції:

$$\partial z / \partial x = yx^{y-1}.$$

Частинну похідну за y цієї функції обчислюють при $x=const$, тобто $\partial z / \partial y = x^{y} \cdot \ln x$, вона є похідною показникової функції.

Задача 4. Знайти частинні похідні функції $z = e^{arcsin\frac{y}{x^2}}$.

Розв'язання

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{arcsin\frac{y}{x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x^2}\right)^2}} \cdot \left(\frac{y}{x^2}\right)'_x = \frac{e^{arcsin\frac{y}{x^2}}}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^4}}} \cdot y \cdot \left(-2x^{-3}\right) = -\frac{2ye^{arcsin\frac{y}{x^2}}}{x^3\sqrt{1-\frac{y^2}{x^4}}} =$$

$$= -\frac{2ye^{arcsin\frac{y}{x^2}}}{\sqrt{x^6 - x^2y^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{arcsin\frac{y}{x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x^2}\right)^2_y}} \cdot \left(\frac{y}{x^2}\right)'_y = \frac{e^{arcsin\frac{y}{x^2}}}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^4}}} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{e^{arcsin\frac{y}{x^2}}}{\sqrt{x^4 - y^2}}.$$

Завдання для самостійної роботи

Задача 1. Знайти частинні похідні даної функції двох змінних:

$z = y\,arcsin\left(x^2 - y\right)$.

Відповідь: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy}{\sqrt{1-\left(x^2-y\right)^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = arcsin\left(x - y^2\right) - \frac{y}{\sqrt{1-\left(x^2-y\right)^2}}$.

Задача 2. Знайти частинні похідні даної функції двох змінних:

$$z=\frac{\sqrt[3]{xy-x^2+1}}{2x-3y}.$$

Відповідь: $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1/3\left(xy-x^2+1\right)^{-2/3}\left(y-2x\right)\left(2x-3y\right)-2\sqrt[3]{xy-x^2+1}}{\left(2x-3y\right)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\left(1/3\right)x\left(xy-x^2+1\right)^{-2/3}\left(2x-3y\right)+3\sqrt[3]{xy-x^2+1}}{\left(2x-3y\right)^2}.$$

Задача 3. Знайти частинні похідні даної функції двох змінних:

$$z=2^{x-y}+\cos(x+y^2);$$

Відповідь: $\frac{\partial z}{\partial x}=2^{x-y}\ln 2-\sin\left(x+y^2\right)$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-2^{x-y}\ln 2-2y\sin\left(x+y^2\right)$.

2.2. Частинні похідні вищих порядків

Означення 6. Частинними похідними другого порядку від функції $z=f\left(x,y\right)$ називаються частинні похідні від її частинних похідних першого порядку.

Позначаються частинні похідні 2-го порядку так:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=z''_{xx};\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{yx};\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}.$$

Частинні похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ називаються змішаними похідними.

Теорема: якщо частинні похідні вищого порядку неперервні, то змішані похідні одного порядку, що відрізняються лише порядком диференціювання, рівні між собою. А саме, для $z=f(x,y)$ маємо $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Зразки розв'язування задач

Задача 1. Дана функція $z = ln\left(x^2 + y^2\right)$. Знайти всі її частинні похідні 2-го порядку та переконатися, що $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Розв'язання

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}\right)' = \frac{(2x)_x'\left(x^2 + y^2\right) - \left(x^2 + y^2\right)_x' \cdot 2x}{\left(x^2 + y^2\right)^2} =$$

$$= \frac{2\left(x^2 + y^2\right) - 2x \cdot 2x}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{2x^2 + 2y^2 - 4x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{2y^2 - 2x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(\frac{2y}{x^2 + y^2}\right)_y' = \frac{(2y)_y'\left(x^2 + y^2\right) - \left(x^2 + y^2\right)_y' \cdot 2y}{\left(x^2 + y^2\right)^2} =$$

$$= \frac{2\left(x^2 + y^2\right) - 2y \cdot 2y}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{2\left(x^2 - y^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}\right)_y' = 2x\left[\left(y^2 + x^2\right)^{-1}\right]_y' = 2x(-1)\left(x^2 + y^2\right)^{-2} \cdot 2y =$$

$$= -\frac{4xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(\frac{2y}{x^2 + y^2}\right)_x' = 2y\left[\left(y^2 + x^2\right)^{-1}\right]_x' = 2y(-1)\left(x^2 + y^2\right)^{-2} \cdot 2x =$$

$$= \frac{4xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}.$$

З останніх двох рівностей бачимо, що $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\dfrac{4xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$.

Задача 2. Показати, що функція $z = y^{\frac{y}{x}} \cdot sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$ задовольняє рівнянню $x^2 z_x' + xyz_y' = y \cdot z$.

Розв'язання

Знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^{\frac{y}{x}}\cdot \ln y\left(-\frac{y}{x^2}\right)\cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right)+y^{\frac{y}{x}}\cdot \cos\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left[y^{\frac{y}{x}}\cdot \ln y\frac{1}{x}+\frac{y}{x}\cdot y^{\frac{y}{x}-1}\right]\cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right)+y^{\frac{y}{x}}\cdot \cos\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}.$$

Підставимо знайдені значення похідних до лівої частини рівняння:

$$-x^2\cdot\frac{y}{x^2}\cdot y^{\frac{y}{x}}\cdot \ln y\cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right)-x^2\cdot\frac{y}{x^2}\cdot y^{\frac{y}{x}}\cdot \cos\left(\frac{y}{x}\right)+xy\cdot\frac{y}{x}\cdot y^{\frac{y}{x}-1}\cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right)+$$

$$+xy\cdot\frac{1}{x}\cdot y^{\frac{y}{x}}\cdot \ln y\cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right)+xy\cdot\frac{1}{x}y^{\frac{y}{x}}\cdot \cos\left(\frac{y}{x}\right)=y\cdot y^{\frac{y}{x}}\cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right)=y\cdot z.$$

Отримано тотожність, тобто, функція z задовольняє даному рівнянню.

2.3. Повний диференціал функції двох змінних

Нехай $z=f(x,y)$ є функція двох незалежних змінних. Зафіксуємо y, а потім x. Тоді вирази $dz_x=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x$ і $dz_y=\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$ називають частинними диференціалами, а вираз $dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$ являється повним диференціалом функції двох змінних. Поклавши $z=x$, отримаємо, що $dx=\Delta x$, а, поклавши $z=y$, отримаємо $dy=\Delta y$. Тоді

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Зразки розв'язування задач

Задача 1. *Зн*айти повний диференціал функції $z=\sin\left(y^4\right)+e^{5x^3}-xy^2$.

Розв'язання

*Зн*айдемо $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{5x^3} \cdot 15x^2 - y^2; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \cos y^4 \cdot 4y^3 - 2xy.$$

Тоді $$dz = \left(e^{5x^3} \cdot 15x^2 - y^2 \right) dx + \left(\cos y^4 \cdot 4y^3 - 2xy \right) dy.$$

Задача 2. Знайти повний диференціал функції $z = \sin^2 xy$.

Розв'язання

$$dz = \frac{\partial}{\partial x}(\sin^2 xy)dx + \frac{\partial}{\partial y}(\sin^2 xy)dy =$$

$$= y2\sin xy \cdot \cos xy dx + x2\sin xy \cdot \cos xy dy = (ydx + xdy)\sin 2xy.$$

Задача 3. Знайти наближене значення $(1{,}02)^{3{,}01}$.

Розв'язання.

Розглянемо функцію $z = x^y$. Знайдемо її повний диференціал:

$$dz = yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x \Delta y.$$

Тут: $x_0 = 1$; $y_0 = 3$; $\Delta x = 0{,}02$ **і** $\Delta y = 0{,}01$. **Отже,**

$$dz = 3 \cdot 1^2 \cdot 0{,}02 + 1^3 \cdot \ln 1 \cdot 0{,}02 = 0{,}06.$$

Тоді $z(x, y) = (1{,}02)^{3{,}01} \approx z(x_0, y_0) + dz = 1^3 + 0{,}06 = 1{,}06$.

Завдання для самостійної роботи

Задача 1. **З**найти повний диференціал функції: $z = \frac{x}{y}e^{x+y}$.

Відповідь: $dz = \frac{e^{x+y}(1+x)}{y}dx + \frac{xe^{x+y}(y-1)}{y^2}dy$.

Задача 2. Знайти повний диференціал функції:

$$z = x^2 \cos^2 y + y^2 \sin^2 x .$$

Відповідь:

$$dz = \left(2x \cos^2 y + 2 \sin x \cos x\, y^2\right)dx + \left(-2x^2 \cos y \sin y + 2y \sin^2 x\right)dy \; .$$

2.4. Частинні похідні складної функції

Припустимо, що у рівнянні

$$z = F(u, v) \quad , \tag{4.1}$$

u і v є неперервними функціями незалежних змінних x і y.

$$u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y). \tag{4.2}$$

Звичайно, z можна виразити і безпосередньо через x і y таким чином:

$$z = F(\varphi(x, y),\ \psi(x, y)), \tag{4.3}$$

але це може призвести до дуже складної функції.

Припустимо, що функції $F(u,v)$, $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ мають неперервні частинні похідні за усіма своїми аргументами. Поставимо задачу: обчислити $\partial z / \partial y$ і $\partial z / \partial x$, відштовхуючись від рівнянь (4.1) і (4.2).

Дамо аргументу x приріст Δx, зберігаючи значення y незмінним. Тоді в силу рівнянь (4.3) u і v одержати прирости $\Delta_x u$ і $\Delta_x y$.

Але якщо u і v одержать прирости $\Delta_x u$ і $\Delta_x y$, то функція $z = F(u, v)$ одержить приріст Δz, який обчислюють за формулою:

$$\Delta z = (\partial F / \partial u)\Delta_x u + (\partial F / \partial v)\Delta_x v + \gamma_1 \Delta_x u + \gamma_2 \Delta_x v .$$

Розділимо усі члени цієї рівності на Δx:

$$\Delta z / \Delta x = (\partial F / \partial u)\Delta_x u / \Delta x + (\partial F / \partial v)\Delta_x v / \Delta x + \gamma_1 \Delta_x u / \Delta x + \gamma_2 \Delta_x v / \Delta x .$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\Delta_x u \to 0$ і $\Delta_x v \to 0$ (u і v неперервні). Тоді і $\gamma_1 \to 0$, $\gamma_2 \to 0$. Зробивши граничний перехід, коли $\Delta x \to 0$, маємо:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta z/\Delta x=\partial z/\partial x;\quad \lim_{\Delta x\to 0}\Delta_x u/\Delta x=\partial u/\partial x;\quad \lim_{\Delta x\to 0}\Delta_x v/\Delta x=\partial v/\partial x;$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\gamma_1=0;\quad \lim_{\Delta x\to 0}\gamma_2=0.$$

і, отже,

$$\partial z/\partial x=(\partial F/\partial u)(\partial u/\partial x)+(\partial F/\partial v)(\partial v/\partial x)\ . \tag{4.4}$$

Аналогічні перетворення з аргументом y дає:

$$\partial z/\partial y=(\partial F/\partial u)(\partial u/\partial y)+(\partial F/\partial v)(\partial v/\partial y). \tag{4.5}$$

Для випадку більшого числа змінних формули (4.4) і (4.5) звичайним чином узагальнюють.

Якщо маємо функцію $z = F(x,y,u,v)$, де y, u, і v, у свою чергу, залежать від одного аргументу x:

$$y=f(x),\quad u=\varphi(x),\quad v=\psi(x),$$

то, фактично, z є функцією тільки однієї змінної x, можна ставити питання про визначення повної похідної dz/dx. Ця похідна обчислюється за формулою:

$$dz/dx=\partial z/\partial x+(\partial z/\partial y)(dy/dx)+(\partial z/\partial u)(du/dx)+$$
$$+(\partial z/\partial v)(dv/dx), \tag{4.6}$$

де $\partial x/\partial x=1$, а так як y, u і v – є функції одного x, то частинні похідні перетворюються у звичайні. Остання формула (4.6) має назву ***повної похідної***.

Зразки розв'язування задач

Задача 1. Знайти dz/dx, якщо $z=x^2+y^{1/2},\quad y=\sin x$,

Розв'язання

Знаходимо частинні похідні

$$\partial z/\partial x=2x,\quad \partial z/\partial y=1/(2\sqrt{y}),\quad \partial y/\partial x=\cos x.$$

За формулою (4.4.6) маємо:

$$dz/dx = \partial z/\partial x + \partial z/\partial y \cdot dy/dx = 2x + 1/(2\sqrt{y})\cos x =$$
$$= 2x + \cos x/(2\sqrt{\sin x}).$$

Завдання для самостійної роботи

Задача 1. Знайти частинні похідні даної складної функції:

$z = \cos(u+v),\ \ u = x^2 - yx^3,\ \ v = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$;

Відповідь: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\sin\left(x^2 - yx^3 + \sqrt{1 + x^2 + y^2}\right)\left[2x - 3x^2 y + \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}\right]$;

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\sin\left(x^2 - yx^3 + \sqrt{1 + x^2 + y^2}\right)\left[-x^3 + \frac{y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}\right].$$

Задача 2. Продиференціювати дану складну функцію:

б) $z = tg\left(6 + x + 4y^2\right),\ \ x = e^t\cos t,\ \ y = e^t \sin t.$

Відповідь: $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{e^t\left[\cos t - \sin t + 8e^t \sin t\left(\sin t + \cos t\right)\right]}{\cos^2\left(6 + e^t\cos t + 4e^{2t}\sin^2 t\right)}$.

2.5. Частинні похідні функції, що задана неявно

Нехай функція y від x дана неявно і $F(x,y)$, $F'_x(x,y)$, $F'_y(x,y)$ - неперервні функції у деякій області D, координати (x,y) довільної точки $M \in D$ задовольняють рівнянню $F(x,y) = 0$, крім того, у цій точці $F'_y(x,y) \neq 0$. Тоді:

$$y'_x = -F'_x(x,y)/F'_y(x,y).$$

Якщо $F(x,y,z) = 0$, то $z'_x = -(\partial F/\partial x)/(\partial F/\partial z)$.

$$z'_y = -(\partial F/\partial y)/(\partial F/\partial z).$$

Припускається, що $\partial F/\partial z \neq 0$.

Зразки розв’язування задач

Задача 1. Знайти dy/dx для функції $x^2+y^2-1=0$.

Розв’язання

$$F(x,y)=x^2+y^2-1;\ \ \partial F/\partial x=2x;\ \ \partial F/\partial y=2y.$$

Отже,

$$dy/dx=-2x/2y=-x/y.$$

Задача 2. Обчислити частинні похідні функції $e^z+x^2y+z+5=0$.

Розв'язання

$$F(x,y,z)=e^z+x^2y+z+5=0,$$

$$\partial F/\partial x=2xy;\ \ \partial F/\partial y=x^2;\ \ \partial F/\partial z=e^z+1.$$

Отже,

$$\partial z/\partial x=-(2xy)/(e^z+1),\ \ \partial z/\partial y=-(x^2)/(e^z+1).$$

2.6. Дотична площина і нормаль до поверхні

Означення 7. Дотичною площиною до поверхні в точці M_0 називається площина, що містить у собі всі дотичні до кривих, що проведені на поверхні через точку M_0.

Означення 8. Нормаллю до поверхні називається пряма, що проходить через точку дотику M_0 і перпендикулярна до дотичної площини.

Якщо поверхня задана неявно, тобто її рівняння $F(x,y,z)=0$, тоді вигляд рівняння дотичної площини в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до поверхні має вид:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{M_0}(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{M_0}(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{M_0}(z-z_0)=0,$$

де $\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{M_0}$, $\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{M_0}$, $\frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{M_0}$ – значення частинних похідних функцій, що обчислені в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$, а x, y, z – поточні координати точки дотичної площини.

Рівняння нормалі до поверхні в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ записується у вигляді:

$$\frac{x - x_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}} = \frac{z - z_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}}.$$

Якщо рівняння поверхні задано явно, тобто $z = f(x, y)$:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}(x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}(y - y_0) = z - z_0,$$

$$\frac{x - x_0}{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Зразки розв'язування задач

Задача 1. Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $3xyz - z^3 = 1$ в точці $M_0(0; 1; z)$.

Розв'язання

Визначимо третю координату точки дотику. Підставимо $x = 0$, $y = 1$ до рівняння поверхні. Отримаємо $-z^3 = 1$, звідки $z = -1$. Таким чином, точка дотику має координати $M_0(0; 1; -1)$.

Перепишемо рівняння у вигляді $F(x, y, z) = 3xyz - z^3 - 1$ і знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3zy; \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 3xz; \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 3xy - 3z^2.$$

Підрахуємо їх значення в точці $M_0(0; 1; -1)$:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0} = -3; \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0} = 0; \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0} = -3.$$

Тоді: $-3(x - 0) + 0(y - 1) - 3(z + 1) = 0$ або $-3x - 3z - 3 = 0$.

Отже, $x + z + 1 = 0$ – рівняння дотичної площини,

$$\frac{x-0}{-3}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+1}{-3}$$ – рівняння нормалі.

Нуль у знаменнику означає, що напрямний вектор нормалі, а значить і сама нормаль, перпендикулярна до осі OY.

Завдання для самостійної роботи

Задача 1. Знайти рівняння дотичної площини до даної поверхні в заданій точці $z = xy - x^2 + 8x - 16,\ \ M_0(2,3,2)$.

Відповідь: $7x + 2y - z - 18 = 0$.

Задача 2*.* Знайти рівняння нормалі до даної поверхні в заданій точці $z = x + \arccos y,\ \ M_0(0,0,\pi/2)$.

Відповідь: $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-\pi/2}{1}$.

2.7. Екстремум функції двох незалежних змінних

Означення 9. Функція $z = f(x,y)$ має в точці $M_0(x_0, y_0)$ максимум (або мінімум), що дорівнює $f(x_0, y_0)$, якщо в околі цієї точки для всіх точок M, відмінних від M_0, виконується нерівність

$$f(x,y) < f(x_0,y_0) \quad \textbf{або} \quad \big(f(x,y) > f(x_0,y_0)\big).$$

Максимум і мінімум функції називаються її екстремумами. Точка M_0, в якій функція має екстремум, називається точкою екстремуму.

Необхідні умови екстремуму

Якщо диференційована функція $z = f(x,y)$ досягає екстремуму в точці $M_0(x_0, y_0)$, то її частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю, тобто

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{M_0} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_{M_0} = 0 \end{cases}$$

Точки, в яких частинні похідні дорівнюють нулю, називаються стаціонарними, або критичними точками. Відмітимо, що не всі стаціонарні точки являються точками екстремуму. Кожна з цих точок повинна бути перевірена на екстремум за допомогою достатніх умов.

Достатні умови екстремуму

Нехай точка $M_0(x_0, y_0)$ – стаціонарна точка функції $z = f(x, y)$.
Позначимо

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{M_0}; \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big|_{M_0}; \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{M_0}.$$

Складемо вираз $\Delta = AC - B^2$.

Тоді, якщо:

1) $\Delta > 0$, то функція має в точці $M_0(x_0, y_0)$ екстремум, а саме максимум при $A < 0$ (або $C < 0$) і мінімум при $A > 0$ (або $C > 0$);

2) $\Delta < 0$, то в точці $M_0(x_0, y_0)$ екстремуму немає;

3) $\Delta = 0$, то потрібно подальше дослідження.

Зразки розв'язування задач

Задача 1. Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 + xy^2 + 6xy$.

Розв'язання

Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2 + y^2 + 6x \\ z'_y = 2xy + 6x \end{cases}.$$

Прирівняємо z'_x і z'_y до нуля і розв'яжемо отриману систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 + 6x = 0 \\ 2xy + 6x = 0 \end{cases}.$$

З другого рівняння $3x(y+3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \; y = -3.$

Підставимо отримані рівняння до першого рівняння, маємо для $x = 0$ $y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$. Для $y = -3 \Rightarrow 3x^2 + 9 - 18 = 0$ або $x = \pm\sqrt{3}$.

Отримано три точки, в яких може бути екстремум $M_0(0,0)$, $M_1(-\sqrt{3}, -3)$, $M_2(\sqrt{3}, -3)$.

Знайдемо A, B, C за формулами:

$z''_{xx} = 6x$,	$A\big\|_{M_0} = 0$,	$A\big\|_{M_1} = -6\sqrt{3}$	$A\big\|_{M_2} = 6\sqrt{3}$.
$z''_{xy} = 2y + 6$,	$B\big\|_{M_0} = 6$,	$B\big\|_{M_1} = 2 - (3) + 6 = 0$	$B\big\|_{M_2} = 0$.
$z''_{yy} = 2x$,	$C\big\|_{M_0} = 0$,	$C\big\|_{M_1} = -2\sqrt{3}$	$C\big\|_{M_2} = 2\sqrt{3}$.

Тоді $\Delta\big|_{M_0} = -36 < 0$ – екстремуму в точці M_0 немає,

$\Delta\big|_{M_1} = -6\sqrt{3} \cdot (-2\sqrt{3}) - 0 = 36 > 0$ – екстремум є,

$\Delta\big|_{M_2} = 6\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} - 0 = 36 > 0$ – екстремум є.

З'ясуємо, який саме екстремум в точках M_1 і M_2. Це визначається знаком другої похідної змінної x. В точці $M_1(-\sqrt{3}, -3)$ $A < 0$, тому в цій точці буде максимум, а в точці $M_2(\sqrt{3}, -3)$ $A > 0$ – мінімум.

$Z_{\max} = Z(-\sqrt{3}, -3) = 6\sqrt{3}$,

$Z_{\min} = Z(\sqrt{3}, -3) = -6\sqrt{3}$.

Задача 2. Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Розв'язання

Знайдемо критичні точки, використовуючи необхідні умови екстремуму:

$$\left.\begin{aligned} \partial z / \partial x = 3x^2 - 3y = 0, \\ \partial z / \partial y = 3y^2 - 3x = 0. \end{aligned}\right\}.$$

Звідси маємо дві критичні точки: ***M(1,1)*** і ***N(0,0).***

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\partial^2 z / \partial x^2 = 6x, \ \ \partial^2 z / \partial x \partial y = -3, \ \ \partial^2 z / \partial y^2 = 6y.$$

Обчислимо ці похідні у першій критичній точці:

$$A = \partial^2 z / \partial x^2 \Big|_M = 6; \ \ B = \partial^2 z / \partial x \partial y \Big|_M = -3; \ C = \partial^2 z / \partial y^2 \Big|_M = 6;$$

$$AC - B^2 = 36 - 9 = 27 > 0; \ \ A > 0.$$

За достатніми умовами у точці M функція досягає мінімуму:

$$Z_{\min} = 1 + 1 - 3 = -1.$$

Обчислимо у другій критичній точці частинні похідні другого порядку, маємо:

$$A = 0, \ \ B = -3, \ C = 0; \ \ \ AC - B^2 = -9 < 0.$$

Отже, у точці $N(0,0)$ функція не має екстремуму.

Завдання для самостійної роботи

Задача 1. Дослідити на екстремум дану функцію:

$$z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2 \ .$$

Відповідь: $z_{max} = 13$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик В.П., Юрик І І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2005. – 648 с.

2. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін. За ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. – К.: Видавництво А.С.К., 2003. – 480 с.

3. Тріщ Б.М. Основи вищої математики. – Львів: ЛНУ, 2008. – 403 с.

4. Письменный Д.Г. Конспект лекций по высшей математике полный курс / Дмитрий Письменный. – 7-е изд. М.: Айрис - пресс. 2008. – 608 с.

5. Клепко В.Ю, Голець В.Л. Вища математика в прикладах і задачах. – 2-ге видання. – К.: Центр учбової літератури, 2009. – 594 с.

Навчальне видання

Запорожченко Олена Євгенівна
Білова Оксана Вікторівна
Сушко Лариса Федорівна
Кочеткова Інна Борисівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 3

Навчальний посібник

Тем. план 2017, поз.

Підписано до друку. Формат 60x84 1/16. Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид. арк.. Умов. друк. арк.. Тираж пр. Замовлення №
Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпро-5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ