

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ НАЦІОНАЛЬНА  
МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

**ПРОГРАМА, МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ**  
**З ДИСЦИПЛІНИ**  
**«МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ»**  
**ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЗАОЧНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ**  
**напрямку 122 – Комп'ютерні науки**

ДНІПРОПЕТРОВСЬК НМетАУ 2019

Програма, методичні вказівки та контрольні завдання з дисципліни «Математичні методи дослідження операцій» для студентів заочної форми навчання напрямку 122 – Комп'ютерні науки/ Склала Т.В. Селівьорстова. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2019.

Викладена програма дисципліни «Математичні методи дослідження операцій», зміст лекційного курсу, приведені завдання до виконання контрольних робіт, питання до підсумкового контролю.

## **ВСТУП**

Згідно з навчальним планом та програмою дисципліни "Математичні методи дослідження операцій" передбачена робота студентів в об'ємі 100 години самостійних занять по джерелах літератури, нормативних документах і виконанню контрольної роботи.

Крім того, згідно з навчальним планом передбачено проведення 12 години лекційних, 8 практичних аудиторних занять на кафедрі інформаційних технологій та систем. В лекціях будуть розглянуті найбільш актуальні та складні питання пов'язані з теорією математичних методів дослідження операцій

Зміст і об'єм самостійної роботи студентів по вивченню джерел літератури та нормативних документів в об'ємі 100 годин.

# **1 РОБОЧА ПРОГРАМА З ДИСЦИПЛІНИ**

## **"Математичні методи дослідження операцій"**

### **1 ЛЕКЦІЙНИЙ КУРС (12 год.)**

**Тема 1.** Основи дослідження операцій. Математичні методи розв'язку задач лінійного програмування (4 год.).

**Тема 2.** Математичні методи дослідження розв'язку двовимірних задач лінійного програмування в економіко-математичній постановці (4 год.).

**Тема 3.** Математичні методи розв'язку транспортних задач (4 год.).

### **2 ПРАКТИЧНІ РОБОТИ (8 год.)**

1. Розв'язання ЗЛП графічним методом (2 год.).
2. Розв'язання ЗЛП СМ (2 год.).
3. Отримання опорного розв'язку ТЗ (2 год.).
4. Отримання оптимального розв'язку ТЗ розподільним методом, методом потенціалів (2 год.).

### **3 САМОСТІЙНА ПРОРОБКА РОЗДІЛІВ ПРОГРАМИ, ЩО НЕ ВИКЛАДАЮТЬСЯ НА ЛЕКЦІЯХ (100 год.)**

1. Постановка задачі цілочислового лінійного програмування (ЦЗЛП).  
Методи розв'язку ЦЗЛП.
2. Розв'язок ЗЦЛП методом гілок та границь.
3. Метод Гоморі для розв'язку ЗЦЛП.
4. Евристичні методи розв'язання ЗЦЛП.
5. Постановка мережевої ТЗ. Методи отримання мінімальної мережі, найкоротшого шляху.
6. Постановка мережевої ТЗ з циклами. Методи знаходження найкоротшого шляху на мережевій ТЗ з циклами.

## 4 ЗАВДАННЯ НА КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ

### Контрольні запитання

#### Модуль 1 «Основы исследования операций»

1. Приведите определение понятия «исследование операций».
2. Какая сфера применения дисциплины «математические методы исследования операций»?
3. Приведите этапы операционного исследования.
4. Какой этап операционного исследования рассматривается в курсе ММИО.
5. Приведите примеры задач, которые решаются в курсе ММИО.
6. Приведите определение термина операция.
7. Что является целью исследования операций?
8. Что есть решение задачи исследования операций?
9. Что есть целевая функция? Приведите примеры формирования целевой функции.
10. Основные этапы применения метода исследования операций.
11. Типы задач, которые решаются методом исследования операций.
  
12. Постановка задачи математического программирования в общем виде.
13. Постановка задачи линейного программирования в общем виде.
14. Постановка задачи нелинейного программирования в общем виде.
15. Постановка задачи целочисленного программирования в общем виде.
16. Постановка задачи квадратичного программирования в общем виде.
17. Постановка задачи стохастического программирования в общем виде.
18. Постановка задачи динамического программирования в общем виде.

#### Модуль 2 «Математические методы решения и исследования двумерных задач линейного программирования»

1. В чем состоит задача оптимизации?
2. Приведите математическую запись задачи оптимизации.
3. Что означает найти решение задачи оптимизации?
4. В каком случае задача оптимизации не имеет решения?
5. В каком случае для решения задачи оптимизации необходимо использовать методы математического программирования?
  
6. Укажите характерные черты задачи линейного программирования.
7. Приведите общий вид математической модели задачи линейного программирования.
8. Что собой представляет область допустимых решений.
9. Приведите определение понятия «оптимальное решение».
10. Чем допустимое решение отличается от оптимального решения.
11. Приведите правила приведения задачи линейного программирования к каноническому виду.
12. Приведите область применения графического метода для решения задач линейного программирования.

13. Приведите примеры возможных конфигураций области допустимых решений при решении задачи линейного программирования графическим методом.

14. Приведите систему ограничений, которая образует в качестве области допустимых решений выпуклый многоугольник.

15. Приведите систему ограничений, которая образует в качестве области допустимых решений выпуклую многоугольную неограниченную область.

16. Приведите систему ограничений, которая не образует область допустимых решений.

17. Приведите систему ограничений, которая образует в качестве области допустимых решений луч.

18. Приведите систему ограничений, которая образует в качестве области допустимых решений отрезок.

19. Приведите систему ограничений, которая образует в качестве области допустимых решений точку.

20. Каким образом строится вектор-градиент целевой функции.

21. Какой смысл имеет вектор-градиент целевой функции.

22. Какими рассуждениями руководствуются при определении максимального значения целевой функции, решая задачу линейного программирования графическим методом.

23. Какими рассуждениями руководствуются при определении минимального значения целевой функции, решая задачу линейного программирования графическим методом.

24. В чем заключается идея метода ветвей и границ?

25. Сформулируйте правило формирования дополнительных «отсекающих» ограничений при нахождении целочисленного решения ЗЛП методом Гомори.

26. Приведите геометрическую идею симплекс-метода.

27. Приведите порядок решения ЗЛП симплекс-методом.

28. Что означает ситуация когда в симплекс-таблице все коэффициенты в столбце свободных членов положительные.

29. Что означает ситуация когда в симплекс-таблице один из коэффициентов столбца свободных членов отрицательный и среди коэффициентов этой строки есть несколько отрицательных коэффициентов.

30. Что означает ситуация когда в симплекс-таблице один из коэффициентов столбца свободных членов отрицательный и среди коэффициентов этой строки нет отрицательных.

31. Что означает ситуация когда в симплекс-таблице все коэффициенты столбца свободных членов и строки целевой функции положительные.

32. Что означает ситуация при отыскании оптимального решения когда в строке целевой функции симплекс-таблицы есть несколько отрицательных

коэффициентов.

33. Что означает ситуация при отыскании оптимального решения когда в строке целевой функции симплекс-таблицы есть отрицательный коэффициент и столбец в котором он находится, содержит несколько положительных коэффициентов.

34. Что означает ситуация при отыскании оптимального решения когда в симплекс-таблице в строке целевой функции есть отрицательный коэффициент и столбец в котором он находится не содержит положительных коэффициентов.

### **Модуль 3 «Математические методы решения целочисленных задач линейного программирования»**

1. В чем заключается идея метода ветвей и границ?
2. Сформулируйте правило формирования дополнительных «отсекающих» ограничений при нахождении целочисленного решения ЗЛП методом Гомори.
3. ЗЛП дополнить условием целочисленности и отыскать целочисленное решение методом ветвей и границ.

### **Модуль 4 «Математические методы решения транспортных задач»**

1. Сформулируйте общую постановку транспортной задачи о грузоперевозках.
2. Сформулируйте математическую постановку транспортной задачи о грузоперевозках.
3. Каким образом транспортная задача о грузоперевозках сводится к закрытому типу? Привести пример.
4. Сформулируйте «теорему о разрешимости транспортной задачи». Приведите математическую интерпретацию этой теоремы.
5. Сформулируйте правило корректировки объема поставок при отыскании оптимального решения транспортной задачи о грузоперевозках.
6. В чем заключается идея определения начального опорного плана транспортной задачи о грузоперевозках методом «северо-западного угла»?
7. В чем заключается идея определения начального опорного плана транспортной задачи о грузоперевозках методом минимального элемента?
8. Что представляет собой вырожденность опорного плана транспортной задачи о грузоперевозках? Укажите способ устранения вырожденности.
9. Что представляет собой цикл пересчета в таблице перевозок транспортной задачи. Каким условиям он удовлетворяет? Приведите пример цикла.
10. Приведите общую схему нахождения оптимального решения транспортной задачи о грузоперевозках распределительным методом.
11. Каким образом вычисляется цена клетки при нахождении оптимального решения транспортной задачи о грузоперевозках распределительным методом?

12. Укажите условие оптимальности при нахождении оптимального решения транспортной задачи о грузоперевозках распределительным методом.
13. Приведите общую схему нахождения оптимального решения транспортной задачи о грузоперевозках методом потенциалов.
14. Каким образом вычисляется оценка клетки при нахождении оптимального решения транспортной задачи о грузоперевозках методом потенциалов.
15. Укажите условие оптимальности при нахождении оптимального решения транспортной задачи о грузоперевозках методом потенциалов.
16. Для транспортной задачи о грузоперевозках определить опорное решение.
17. Для транспортной задачи определить оптимальное решение распределительным методом.
18. Для транспортной задачи определить оптимальное решение методом потенциалов.

### **Контрольна робота**

#### **Виконати практичні роботи по дисципліні**

#### **"Математичні методи дослідження операцій"**



## Индивидуальное задание № 1

Тема: основная задача линейного программирования.

Задание: решить основную ЗЛП графическим и симплекс-методом, показать на графике траекторию движения точек решения симплекс-метода, проверить полученное решение в Excel.

Группа – 1			Группа – 2			Группа – 3			Группа – 4		
Вариант №	№ по журналу	Задания	Вариант №	№ по журналу	Задания	Вариант №	№ по журналу	Задания	Вариант №	№ по журналу	Задания
1	1	1, 31	31	1	1, 60	61	1	1, 11	91	1	1, 32
2	2	2, 32	32	2	2, 59	62	2	2, 12	92	2	4, 35
3	3	3, 33	33	3	3, 58	63	3	3, 13	93	3	7, 38
4	4	4, 34	34	4	4, 57	64	4	4, 14	94	4	10, 41
5	5	5, 35	35	5	5, 56	65	5	5, 15	95	5	13, 44
6	6	6, 36	36	6	6, 55	66	6	6, 16	96	6	16, 47
7	7	7, 37	37	7	7, 54	67	7	7, 17	97	7	19, 50
8	8	8, 38	38	8	8, 53	68	8	8, 18	98	8	22, 53
9	9	9, 39	39	9	9, 52	69	9	9, 19	99	9	25, 56
10	10	10, 40	40	10	10, 51	70	10	10, 20	100	10	28, 59
11	11	11, 41	41	11	11, 50	71	11	21, 31	101	11	31, 3
12	12	12, 42	42	12	12, 49	72	12	22, 32	102	12	34, 6
13	13	13, 43	43	13	13, 48	73	13	23, 33	103	13	37, 9
14	14	14, 44	44	14	14, 47	74	14	24, 34	104	14	40, 12
15	15	15, 45	45	15	15, 46	75	15	25, 35	105	15	43, 15
16	16	16, 46	46	16	16, 45	76	16	26, 36	106	16	46, 18
17	17	17, 47	47	17	17, 44	77	17	27, 37	107	17	49, 21
18	18	18, 48	48	18	18, 43	78	18	28, 38	108	18	52, 24
19	19	19, 49	49	19	19, 42	79	19	29, 39	109	19	55, 27
20	20	20, 50	50	20	20, 41	80	20	30, 40	110	20	58, 30
21	21	21, 51	51	21	21, 40	81	21	41, 51	111	21	2, 33
22	22	22, 52	52	22	22, 39	82	22	42, 52	112	22	5, 36
23	23	23, 53	53	23	23, 38	83	23	43, 53	113	23	8, 39
24	24	24, 54	54	24	24, 37	84	24	44, 54	114	24	11, 42
25	25	25, 55	55	25	25, 36	85	25	45, 55	115	25	14, 45
26	26	26, 56	56	26	26, 35	86	26	46, 56	116	26	17, 48
27	27	27, 57	57	27	27, 34	87	27	47, 57	117	27	20, 51
28	28	28, 58	58	28	28, 33	88	28	48, 58	118	28	23, 54
29	29	29, 59	59	29	29, 32	89	29	49, 59	119	29	26, 57
30	30	30, 60	60	30	30, 31	90	30	50, 60	120	30	29, 60

Пример 1

$$F = 7 x_1 - 9 x_2 \rightarrow \max, \min$$

$$x_1 + x_2 \geq 7,$$

$$9 x_1 - 8 x_2 \geq -72,$$

$$-x_2 \leq -2,$$

$$x_1 + 3 x_2 \geq 9,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Пример 2

$$F = 8 x_1 + 9 x_2 \rightarrow \max, \min$$

$$9 x_1 + 3 x_2 \leq 27,$$

$$-3 x_1 + 3 x_2 \geq -9,$$

$$7 x_1 + 4 x_2 \leq 28,$$

$$2 x_1 + x_2 \geq 2,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Пример 3

$$F = -8 x_1 - 5 x_2 \rightarrow \max, \min$$

$$9 x_1 - x_2 \geq -9,$$

$$8 x_1 + 4 x_2 \leq 32,$$

$$7 x_1 + 9 x_2 \geq 63,$$

$$3 x_2 \geq -1,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Пример 4

$$F = 3 x_1 + 2 x_2 \rightarrow \max, \min$$

$$7 x_1 - 7 x_2 \geq -49,$$

$$4 x_1 + 7 x_2 \geq 28,$$

$$8 x_1 - x_2 \geq -8,$$

$$10 x_1 + 9 x_2 \leq 90,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Пример 5

$$F = -4 x_1 + x_2 \rightarrow \max, \min$$

$$x_1 - 9 x_2 \geq -9,$$

$$7 x_1 - 6 x_2 \leq 42,$$

$$5 x_1 + 9 x_2 \geq 45,$$

$$-7 x_1 + 2 x_2 \leq 14,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Пример 6

$$F = -x_2 \rightarrow \max, \min$$

$$7 x_1 + 5 x_2 \geq 35,$$

$$-2 x_1 + 3 x_2 \geq 6,$$

$$8 x_1 + 3 x_2 \geq 24,$$

$$-5 x_1 + 2 x_2 \leq 10,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Пример 7

$$F = 5 x_1 + x_2 \rightarrow \max, \min$$

$$-2 x_1 + 3 x_2 \geq -6,$$

$$-8 x_1 + 8 x_2 \leq 64,$$

$$-4 x_1 + 8 x_2 \geq -32,$$

$$7 x_1 + 9 x_2 \geq 63,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Пример 8

$$F = 4 x_1 \rightarrow \max, \min$$

$$4 x_1 + 8 x_2 \geq 32,$$

$$12 x_1 + 7 x_2 \leq 84,$$

$$x_1 - 9 x_2 \leq -9,$$

$$-3 x_1 + 5 x_2 \leq 15,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Пример 9

$$F = 5 x_1 + 6 x_2 \rightarrow \max, \min$$

$$4 x_1 - 3 x_2 \leq 24,$$

$$2 x_1 - x_2 \leq 2,$$

$$6 x_1 - 9 x_2 \geq -54,$$

$$-2 x_1 \geq -9,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Пример 10

$$F = -x_1 + 8 x_2 \rightarrow \max, \min$$

$$x_1 + x_2 \geq 3,$$

$$x_1 - 2 x_2 \leq 2,$$

$$4 x_1 + 7 x_2 \geq 28,$$

$$-9 x_1 + 2 x_2 \leq 18,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Пример 11

$$F = -7 x_1 + x_2 \rightarrow \max, \min$$

$$5 x_1 - 7 x_2 \geq -35,$$

$$2 x_1 + x_2 \leq 4,$$

$$x_1 + 3 x_2 \geq 3,$$

$$-2 x_2 \geq -5,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Пример 12

$$F = 2 x_1 - x_2 \rightarrow \max, \min$$

$$3 x_1 + x_2 \geq 6,$$

$$5 x_1 + 6 x_2 \leq 30,$$

$$x_1 - x_2 \geq -1,$$

$$-x_1 + x_2 \leq 4,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Пример 13

$$\begin{aligned} F &= -4x_1 - 5x_2 \rightarrow \max, \min \\ x_1 + x_2 &\leq 8, \\ x_1 - x_2 &\geq 4, \\ x_1 + 6x_2 &\geq 6, \\ x_1 + x_2 &\leq 9, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Пример 14

$$\begin{aligned} F &= -5x_1 + 7x_2 \rightarrow \max, \min \\ -5x_1 + 3x_2 &\geq 15, \\ x_1 + 4x_2 &\geq 8, \\ 5x_1 + 6x_2 &\leq 30, \\ 9x_1 - 2x_2 &\leq 18, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Пример 15

$$\begin{aligned} F &= -9x_1 + x_2 \rightarrow \max, \min \\ -2x_1 + x_2 &\geq -4, \\ 8x_1 + x_2 &\geq 8, \\ x_1 - 5x_2 &\leq -5, \\ 2x_1 - x_2 &\leq 2, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Пример 16

$$\begin{aligned} F &= 4x_1 - 7x_2 \rightarrow \max, \min \\ 7x_1 + 5x_2 &\geq 35, \\ -3x_1 + 7x_2 &\leq 21, \\ -2x_1 + 3x_2 &\leq 6, \\ 7x_1 - 2x_2 &\geq 14, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Пример 17

$$\begin{aligned} F &= 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max, \min \\ 7x_1 + 4x_2 &\geq 28, \\ -7x_1 + 4x_2 &\leq -28, \\ 3x_1 - x_2 &\geq -9, \\ -2x_1 + x_2 &\leq -6, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Пример 18

$$\begin{aligned} F &= 4x_1 - x_2 \rightarrow \max, \min \\ 3x_1 &\leq 5, \\ -7x_1 + 8x_2 &\geq 56, \\ 7x_1 - 4x_2 &\leq 28, \\ 8x_1 + 5x_2 &\leq 40, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Пример 19

$$\begin{aligned} F &= 5x_1 + 6x_2 \rightarrow \max, \min \\ 3x_1 + x_2 &\geq 3, \\ 3x_1 - 2x_2 &\leq 18, \\ -5x_1 + 7x_2 &\geq -35, \\ 3x_1 + 4x_2 &\geq 36, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Пример 20

$$\begin{aligned} F &= 9x_1 - 7x_2 \rightarrow \max, \min \\ -3x_1 + 2x_2 &\geq -6, \\ 9x_2 &\leq 29, \\ -8x_1 + 5x_2 &\geq -40, \\ 4x_1 + 5x_2 &\leq 20, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Пример 21

$$\begin{aligned} F &= 2x_1 + x_2 \rightarrow \max, \min \\ x_1 - 6x_2 &\leq 6, \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 24, \\ 6x_1 + 7x_2 &\geq 42, \\ -7x_1 + 4x_2 &\leq 28, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Пример 22

$$\begin{aligned} F &= -4x_1 + 7x_2 \rightarrow \max, \min \\ 6x_1 - 5x_2 &\geq -30, \\ x_1 - x_2 &\leq 9, \\ -9x_1 + 8x_2 &\leq 72, \\ 8x_1 + 7x_2 &\geq 56, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Пример 23

$$\begin{aligned} F &= 5x_1 + 8x_2 \rightarrow \max, \min \\ 2x_1 - 9x_2 &\leq 18, \\ -x_1 + x_2 &\geq 1, \\ -5x_1 + 7x_2 &\geq -35, \\ 8x_1 + 5x_2 &\leq 40, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Пример 24

$$\begin{aligned} F &= -4x_1 - 7x_2 \rightarrow \max, \min \\ 5x_1 - 4x_2 &\geq -20, \\ 7x_2 &\leq 51, \\ 5x_1 + 8x_2 &\geq 40, \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 24, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Пример 25

$$\begin{aligned} F &= 4 x_1 + 5 x_2 \rightarrow \max, \min \\ 3 x_1 - x_2 &\leq 3, \\ 9 x_1 - 8 x_2 &\leq -72, \\ 3 x_1 + 8 x_2 &\geq 24, \\ 3 x_1 + 2 x_2 &\geq -12, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Пример 26

$$\begin{aligned} F &= -3 x_1 + 4 x_2 \rightarrow \max, \min \\ 7 x_1 - 4 x_2 &\geq -28, \\ 4 x_1 + 3 x_2 &\leq 36, \\ x_1 - 3 x_2 &\leq 6, \\ -2 x_1 + 3 x_2 &\geq 6, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Пример 27

$$\begin{aligned} F &= x_1 + x_2 \rightarrow \max, \min \\ 7 x_1 - 6 x_2 &\geq -42, \\ x_1 + 2 x_2 &\geq 8, \\ 3 x_1 - x_2 &\geq -3, \\ 7 x_1 - 9 x_2 &\leq 63, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Пример 28

$$\begin{aligned} F &= 5 x_1 + 7 x_2 \rightarrow \max, \min \\ 8 x_1 + x_2 &\geq 8, \\ 3 x_1 + 7 x_2 &\leq 21, \\ x_1 + 2 x_2 &\geq 4, \\ -6 x_1 + 5 x_2 &\leq 30, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Пример 29

$$\begin{aligned} F &= 4 x_1 + x_2 \rightarrow \max, \min \\ x_1 + 4 x_2 &\geq 8, \\ 2 x_1 - 3 x_2 &\leq -18, \\ 9 x_1 - 5 x_2 &\geq -45, \\ 4 x_1 &\geq 7, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Пример 30

$$\begin{aligned} F &= -9 x_2 \rightarrow \max, \min \\ x_1 + 3 x_2 &\geq 9, \\ -2 x_1 + x_2 &\geq 4, \\ x_1 - x_2 &\leq 9, \\ x_1 - 4 x_2 &\leq -8, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Вариант 31

$$\begin{aligned} F &= -x_1 - 4 x_2 \rightarrow \max, \min \\ 7 x_1 + 3 x_2 &\geq 21, \\ -7 x_1 + 2 x_2 &\leq -14, \\ 13 x_1 + 12 x_2 &\leq 156, \\ x_1 &\leq 8, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Вариант 32

$$\begin{aligned} F &= -2 x_1 - 5 x_2 \rightarrow \max, \min \\ 7 x_1 &\geq 8, \\ 7 x_1 - 2 x_2 &\geq 14, \\ 4 x_1 + 5 x_2 &\geq 20, \\ 2 x_1 - 3 x_2 &\leq -12, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Вариант 33

$$\begin{aligned} F &= -7 x_1 + 6 x_2 \rightarrow \max, \min \\ x_1 + x_2 &\geq 4, \\ 2 x_1 - 9 x_2 &\leq 18, \\ -4 x_1 + x_2 &\geq -4, \\ -5 x_1 + 9 x_2 &\geq 45, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Вариант 34

$$\begin{aligned} F &= 5 x_1 + 4 x_2 \rightarrow \max, \min \\ 8 x_1 + 5 x_2 &\geq 40, \\ 4 x_2 &\geq 7, \\ 3 x_1 - x_2 &\geq -9, \\ x_1 + x_2 &\leq 11, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Вариант 35

$$\begin{aligned} F &= -7 x_1 + x_2 \rightarrow \max, \min \\ 9 x_1 + 4 x_2 &\geq 36, \\ x_1 - x_2 &\leq -8, \\ x_1 + 7 x_2 &\geq 7, \\ 2 x_1 + x_2 &\leq 14, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Вариант 36

$$\begin{aligned} F &= -4 x_1 - 5 x_2 \rightarrow \max, \min \\ 5 x_1 &\geq 7, \\ -4 x_1 + 3 x_2 &\leq -24, \\ x_1 + x_2 &\geq 3, \\ x_1 + x_2 &\leq 7, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

**Вариант 37**

$$\begin{aligned}
F &= -3x_1 + 8x_2 \rightarrow \max, \min \\
5x_1 + 6x_2 &\geq 30, \\
x_1 + x_2 &\leq 10, \\
-5x_1 + x_2 &\geq -5, \\
-x_1 &\geq -3, \\
x_1, x_2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

**Вариант 38**

$$\begin{aligned}
F &= -7x_1 - 3x_2 \rightarrow \max, \min \\
5x_1 - 3x_2 &\geq -15, \\
9x_1 - 2x_2 &\geq 18, \\
3x_1 &\geq 7, \\
6x_1 - x_2 &\geq -6, \\
x_1, x_2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

**Вариант 39**

$$\begin{aligned}
F &= 2x_1 - 3x_2 \rightarrow \max, \min \\
2x_1 + x_2 &\geq -2, \\
6x_2 &\geq 7, \\
3x_1 + x_2 &\geq 3, \\
x_1 + x_2 &\leq 5, \\
x_1, x_2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

**Вариант 40**

$$\begin{aligned}
F &= -x_1 - x_2 \rightarrow \max, \min \\
8x_1 + x_2 &\geq 8, \\
3x_1 + 8x_2 &\leq 24, \\
x_1 - 4x_2 &\geq -4, \\
5x_1 - 3x_2 &\leq 15, \\
x_1, x_2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

**Вариант 41**

$$\begin{aligned}
F &= x_1 + 9x_2 \rightarrow \max, \min \\
-6x_1 + 7x_2 &\geq -42, \\
x_1 - 2x_2 &\geq 2, \\
4x_1 &\geq 9, \\
9x_1 + x_2 &\geq -9, \\
x_1, x_2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

**Вариант 42**

$$\begin{aligned}
F &= 3x_1 - 5x_2 \rightarrow \max, \min \\
x_1 + 5x_2 &\geq 5, \\
2x_1 - x_2 &\geq 4, \\
-x_1 + 3x_2 &\geq -6, \\
2x_1 + 7x_2 &\leq 14, \\
x_1, x_2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

**Вариант 43**

$$\begin{aligned}
F &= 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \min \\
x_1 - x_2 &\geq -7, \\
5x_1 - 8x_2 &\geq 40, \\
-3x_1 + 8x_2 &\geq -24, \\
-3x_1 - 4x_2 &\leq -12, \\
x_1, x_2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

**Вариант 44**

$$\begin{aligned}
F &= 4x_1 + 5x_2 \rightarrow \max, \min \\
x_1 + x_2 &\geq 6, \\
4x_1 - 5x_2 &\leq 20, \\
x_1 + x_2 &\geq 1, \\
5x_1 - 8x_2 &\leq -40, \\
x_1, x_2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

**Вариант 45**

$$\begin{aligned}
F &= -4x_1 + 5x_2 \rightarrow \max, \min \\
7x_1 + 9x_2 &\leq 63, \\
x_1 - 2x_2 &\leq 6, \\
7x_1 + 2x_2 &\geq 14, \\
-x_1 + x_2 &\geq -5, \\
x_1, x_2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

**Вариант 46**

$$\begin{aligned}
F &= -4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \min \\
7x_1 - 2x_2 &\geq -14, \\
4x_1 + 3x_2 &\leq 12, \\
-7x_1 + 4x_2 &\geq -28, \\
x_1 + x_2 &\leq 10, \\
x_1, x_2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

**Вариант 47**

$$\begin{aligned}
F &= -4x_1 \rightarrow \max, \min \\
4x_1 - 5x_2 &\geq -20, \\
9x_1 + 5x_2 &\leq 45, \\
x_1 - x_2 &\geq -3, \\
-x_1 + 2x_2 &\geq 2, \\
x_1, x_2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

**Вариант 48**

$$\begin{aligned}
F &= -3x_1 - x_2 \rightarrow \max, \min \\
7x_1 + 3x_2 &\geq 21, \\
-x_1 + 8x_2 &\geq 8, \\
-3x_1 + 8x_2 &\leq 24, \\
-2x_1 + x_2 &\leq -8, \\
x_1, x_2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

**Вариант 49**

$$\begin{aligned}
F &= -2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \min \\
-4x_1 + 5x_2 &\geq -20, \\
8x_1 - x_2 &\geq 8, \\
2x_1 + 3x_2 &\geq 12, \\
6x_1 - 5x_2 &\leq -30, \\
x_1, x_2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

**Вариант 50**

$$\begin{aligned}
F &= 8x_1 - 9x_2 \rightarrow \max, \min \\
x_1 - x_2 &\geq -9, \\
8x_1 - 9x_2 &\leq 72, \\
-4x_1 + x_2 &\leq -4, \\
3x_1 - 2x_2 &\leq 18, \\
x_1, x_2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

**Вариант 51**

$$\begin{aligned}
F &= -x_1 - 3x_2 \rightarrow \max, \min \\
5x_1 - 2x_2 &\geq -10, \\
-x_2 &\geq -6, \\
x_1 - 4x_2 &\geq -8, \\
-x_1 - 2x_2 &\leq -6, \\
x_1, x_2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

**Вариант 52**

$$\begin{aligned}
F &= x_1 - 7x_2 \rightarrow \max, \min \\
-6x_1 + x_2 &\leq -6, \\
-8x_1 - 3x_2 &\leq -24, \\
9x_1 &\geq -7, \\
-x_1 - x_2 &\geq -10, \\
x_1, x_2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

**Вариант 53**

$$\begin{aligned}
F &= -4x_1 + x_2 \rightarrow \max, \min \\
-x_1 + x_2 &\geq -3, \\
x_2 &\leq 8, \\
x_1 + 2x_2 &\geq 8, \\
x_1 &\geq 2, \\
x_1, x_2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

**Вариант 54**

$$\begin{aligned}
F &= 2x_1 - 2x_2 \rightarrow \max, \min \\
7x_1 + 5x_2 &\geq 35, \\
-x_1 - 6x_2 &\leq -6, \\
-9x_1 + 8x_2 &\geq -72, \\
8x_1 - x_2 &\geq 8, \\
x_1, x_2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

**Вариант 55**

$$\begin{aligned}
F &= 7x_1 - 7x_2 \rightarrow \max, \min \\
5x_1 + 6x_2 &\geq 30, \\
-3x_1 - 2x_2 &\geq -18, \\
x_1 + 3x_2 &\geq 6, \\
x_1 - 7x_2 &\leq -7, \\
x_1, x_2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

**Вариант 56**

$$\begin{aligned}
F &= 6x_1 - 8x_2 \rightarrow \max, \min \\
x_1 + x_2 &\geq 5, \\
-2x_1 + x_2 &\geq 8, \\
-3x_1 + x_2 &\geq -9, \\
-9x_1 + x_2 &\leq 9, \\
x_1, x_2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

**Вариант 57**

$$\begin{aligned}
F &= -4x_1 - 6x_2 \rightarrow \max, \min \\
-7x_1 + 8x_2 &\geq -56, \\
-8x_1 + 5x_2 &\leq 40, \\
-9x_1 + x_2 &\leq -9, \\
-2x_1 - 3x_2 &\leq -6, \\
x_1, x_2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

**Вариант 58**

$$\begin{aligned}
F &= -8x_1 - 5x_2 \rightarrow \max, \min \\
9x_1 - 5x_2 &\geq -45, \\
8x_1 - 9x_2 &\leq 72, \\
x_1 + 4x_2 &\geq 8, \\
-9x_1 - 5x_2 &\geq -45, \\
x_1, x_2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

**Вариант 59**

$$\begin{aligned}
F &= 4x_1 - 3x_2 \rightarrow \max, \min \\
9x_1 + 4x_2 &\geq 36, \\
x_1 - x_2 &\geq 2, \\
-2x_1 + 3x_2 &\geq -18, \\
5x_1 + 8x_2 &\leq 40, \\
x_1, x_2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

**Вариант 60**

$$\begin{aligned}
F &= -2x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \min \\
6x_1 + 5x_2 &\geq 30, \\
8x_1 + 3x_2 &\leq 24, \\
5x_1 - 3x_2 &\leq 15, \\
-x_2 &\geq -7, \\
x_1, x_2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Тема: задача транспортная задача.

Задание. Найти опорное решение транспортной задачи методом северо-западного угла и минимального элемента.

Найти оптимальное решение транспортной задачи распределительным методом, методом потенциалов, проверить полученное решение в EXEL.

Группа – 1			Группа – 2			Группа – 3			Группа – 4		
Вариант №	№ по журналу	Задания	Вариант №	№ по журналу	Задания	Вариант №	№ по журналу	Задания	Вариант №	№ по журналу	Задания
1	1	1, 31	31	1	1, 60	61	1	1, 32	91	1	1, 33
2	2	2, 32	32	2	2, 59	62	2	3, 34	92	2	4, 36
3	3	3, 33	33	3	3, 58	63	3	5, 36	93	3	7, 39
4	4	4, 34	34	4	4, 57	64	4	7, 38	94	4	10, 42
5	5	5, 35	35	5	5, 56	65	5	9, 40	95	5	13, 45
6	6	6, 36	36	6	6, 55	66	6	11, 42	96	6	16, 48
7	7	7, 37	37	7	7, 54	67	7	13, 44	97	7	19, 51
8	8	8, 38	38	8	8, 53	68	8	15, 46	98	8	22, 54
9	9	9, 39	39	9	9, 52	69	9	17, 48	99	9	25, 57
10	10	10, 40	40	10	10, 51	70	10	19, 50	100	10	28, 60
11	11	11, 41	41	11	11, 50	71	11	21, 52	101	11	2, 31
12	12	12, 42	42	12	12, 49	72	12	23, 54	102	12	5, 34
13	13	13, 43	43	13	13, 48	73	13	25, 56	103	13	8, 37
14	14	14, 44	44	14	14, 47	74	14	27, 58	104	14	11, 40
15	15	15, 45	45	15	15, 46	75	15	29, 60	105	15	14, 43
16	16	16, 46	46	16	16, 45	76	16	2, 31	106	16	17, 46
17	17	17, 47	47	17	17, 44	77	17	4, 33	107	17	20, 49
18	18	18, 48	48	18	18, 43	78	18	6, 35	108	18	23, 52
19	19	19, 49	49	19	19, 42	79	19	8, 37	109	19	26, 55
20	20	20, 50	50	20	20, 41	80	20	10, 39	110	20	29, 58
21	21	21, 51	51	21	21, 40	81	21	12, 41	111	21	3, 32
22	22	22, 52	52	22	22, 39	82	22	14, 43	112	22	6, 35
23	23	23, 53	53	23	23, 38	83	23	16, 45	113	23	9, 38
24	24	24, 54	54	24	24, 37	84	24	18, 47	114	24	12, 41
25	25	25, 55	55	25	25, 36	85	25	20, 49	115	25	15, 44
26	26	26, 56	56	26	26, 35	86	26	22, 51	116	26	18, 47
27	27	27, 57	57	27	27, 34	87	27	24, 53	117	27	21, 50
28	28	28, 58	58	28	28, 33	88	28	26, 55	118	28	24, 53
29	29	29, 59	59	29	29, 32	89	29	28, 57	119	29	27, 56
30	30	30, 60	60	30	30, 31	90	30	30, 59	120	30	30, 59

1) 

11	11	4
3	10	5
11	9	11

 40  
70  
80  
50 90 90

2) 

13	2	7
7	13	13
3	1	8

 80  
40  
70  
30 50 40

3) 

8	9	4
6	9	10
11	9	9

 20  
90  
50  
80 70 20

4) 

10	4	12
2	7	9
5	6	12

 60  
80  
50  
20 80 70

5) 

8	11	1
4	5	8
9	13	5

 60  
90  
20  
30 70 30

6) 

7	8	13
3	12	11
13	9	9

 50  
50  
70  
60 20 20

7) 

11	13	6
6	4	2
10	12	11

 90  
60  
30  
90 50 40

8) 

11	5	10
6	13	2
10	1	12

 30  
20  
60  
80 80 30

9) 

13	10	3
6	12	12
9	6	11

 60  
20  
90  
20 40 40

10) 

12	1	10
7	8	4
2	1	13

 80  
50  
50  
80 80 50

11) 

10	8	7
7	7	1
8	8	5

 40  
40  
50  
80 60 30

12) 

4	13	2
10	4	2
5	3	3

 40  
20  
30  
30 60 70

13) 

1	1	3
8	3	7
9	10	1

 70  
70  
60  
70 50 90

14) 

5	10	1
7	6	12
3	9	8

 50  
90  
60  
90 90 80

15) 

1	13	8
2	3	4
4	8	6

 60  
30  
50  
40 80 80

16) 

7	10	5
7	7	6
1	4	12

 30  
40  
20  
30 40 80

17) 

3	10	10
8	3	9

 30  
60

18) 

5	3	11
5	2	1

 50  
70



8	9	7	90
30	70	50	

3	6	13	20
90	90	80	

19)

8	9	5	40
12	5	2	90
6	8	8	30
20	90	40	

20)

10	6	5	90
3	13	13	80
13	4	6	40
20	80	60	

21)

2	1	5	30
9	4	8	60
8	9	1	60
30	50	80	

22)

11	13	6	30
13	4	4	70
9	11	2	40
20	30	50	

23)

12	5	9	90
3	5	6	60
13	11	11	80
40	20	60	

24)

11	2	7	50
7	8	9	50
3	3	2	50
30	90	90	

25)

3	1	8	90
5	8	6	60
13	9	10	40
60	20	70	

26)

1	11	9	40
4	12	2	60
9	13	6	90
90	30	50	

27)

11	3	9	80
13	12	13	60
8	10	1	40
20	90	80	

28)

7	7	10	70
8	6	3	60
6	6	1	80
80	80	70	

29)

2	3	13	50
9	8	8	40
11	7	13	30
70	80	50	

30)

12	9	3	90
8	9	8	80
5	6	13	40
80	60	90	

31)

9	7	4	1	20	80
1	3	19	2	9	45
2	7	5	8	9	55
19	8	7	12	17	105
105	140	5	5	40	

32)

10	1	16	5	150
10	9	3	5	50
11	7	15	3	100
13	8	6	7	195
9	5	2	1	10
120	60	95	170	

33)

7	7	5	10	2	60
3	6	15	7	6	60
18	4	5	10	7	85
18	2	1	8	16	140
115	15	10	140	5	

34)

8	9	16	17	140
7	2	2	7	75
3	1	17	3	105
12	3	10	15	195
6	20	4	14	70
190	150	80	135	

35)

1	14	11	9	11	130
4	10	19	9	1	40
18	9	4	5	3	125
9	9	1	13	4	20
100	45	120	90	110	

36)

2	15	5	9	65
9	4	14	10	190
15	1	16	7	10
5	16	4	4	60
20	1	9	6	190
170	155	20	140	

37)

7	3	16	9	17	55
4	8	8	9	10	30
20	8	2	15	8	60
15	2	4	20	16	105
25	125	70	150	35	

38)

7	18	18	11	10
10	10	8	2	35
6	1	19	8	45
11	1	10	12	5
4	3	10	10	105
90	55	60	70	

39)

7	4	1	8	16	40
6	4	5	3	2	85
2	3	10	6	8	90
17	6	5	19	18	70
90	20	60	110	25	

40)

2	6	1	13	185
7	9	3	2	80
15	7	6	5	10
15	7	1	7	60
16	10	8	16	110
65	110	145	90	

41)

4	9	16	8	11	90
4	3	12	3	5	10
9	9	4	14	3	120
2	10	10	17	16	70
145	95	30	20	130	

42)

1	12	12	14	190
9	2	4	4	110
3	6	18	3	40
12	2	4	13	5
16	13	7	12	15
200	190	45	135	

43)

5	15	13	6	5	145
1	1	15	1	1	55
16	2	8	16	3	125
4	8	8	17	7	30
75	50	60	110	150	

44)

1	6	19	10	190
3	1	1	4	90
8	8	15	9	185
2	3	5	14	95
5	8	8	3	165
15	170	25	165	

45)

9	6	10	10	8	20
10	6	11	10	7	150
10	9	1	13	6	145
19	7	10	11	4	130
30	40	95	90	140	

46)

2	6	1	9	65
8	4	20	8	180
17	6	1	3	40
8	18	4	13	165
20	8	1	1	5
140	135	180	135	

47)

4	6	5	6	19	100
3	16	16	6	7	90
13	9	7	8	2	90
12	5	3	7	5	45
45	85	125	115	150	

48)

3	15	13	7	30
7	10	1	1	160
17	3	1	2	155
6	1	10	15	200
2	5	5	10	40
50	10	160	175	

49)

7	10	10	1	2	105
1	6	14	7	6	15
19	7	1	15	8	5
11	6	1	9	7	80
50	95	30	20	150	

50)

1	3	6	2	105
5	1	8	3	125
16	6	17	2	135
10	4	4	8	100
2	16	6	4	55
170	115	195	90	

51)

2	17	14	3	10	15
8	13	17	9	1	65
15	6	10	15	7	110
9	10	5	4	7	85
120	50	35	60	45	

52)

6	9	9	7	50
3	4	20	4	95
5	9	18	8	90
13	7	7	17	70
18	14	4	6	20
130	135	85	70	

53)

5	7	7	3	6	105
3	11	12	7	7	80
5	5	2	3	5	120
8	10	5	20	19	45
95	5	115	110	40	

54)

9	15	9	10	35
6	3	20	2	180
2	7	20	9	30
11	3	4	7	40
5	13	2	10	155
170	45	90	145	

55)

8	6	3	4	20	95
6	6	17	10	2	10
10	9	1	19	2	25
19	5	1	6	7	75
85	130	35	35	110	

56)

7	8	8	10	25
5	6	16	1	115
20	8	20	3	140
10	14	4	19	70
1	3	9	16	100
10	65	60	195	

57)

5	18	14	1	7	100
4	5	1	6	10	50
2	8	1	2	2	65
20	5	4	4	4	10
5	120	35	115	135	

58)

8	6	5	18	110
2	3	5	2	75
3	8	15	4	35
2	5	6	19	55
20	13	6	7	75
110	120	40	200	

59)

6	3	12	9	10	40
9	10	20	7	3	150
8	4	10	16	3	30
10	10	5	7	10	55
150	5	20	65	145	

60)

9	8	5	7	15
10	7	1	6	135
14	2	16	1	175
4	8	5	4	90
10	1	2	18	95
125	130	95	20	

## ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах / Акулич И.Л.. – М.: Высшая школа, 1986.
2. Ашманов С.А. Линейное программирование / Ашманов С.А.. – М.: Наука, 1981. – 340 с.
3. Банди Б. Методы оптимизации. / Банди Б.. – М.: Радио и связь, 1988. – 128 с.
4. Вентцель Е.С. Исследования операций. Задачи, принципы, методология / Вентцель Е.С.. – М.: Наука, 1989.
5. Зайченко Ю.П. Исследование операций / Зайченко Ю.П., Шумилова С.А.. – Киев: Вища школа, 1984.
6. Зуховицкий С.И. Линейное и выпуклое программирование / Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И.. – М.: Издательство "Наука", 1967. – 460 с.
7. Кузнецов А.В. Математическое программирование / Кузнецов А.В., Холод Н.И.. – Минск: Высшая школа, 1984.
8. Методичні вказівки до самостійної роботи та практичних занять з дисципліни «Математичні методи дослідження операцій» для студентів напрямку 6.050101 – Комп'ютерні науки. – 1 частина. / Упоряд.: Т.В. Селівьорстова, О.І. Михальов. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2019. – 64 с.
9. Методичні вказівки до самостійної роботи та практичних занять з дисципліни «Математичні методи дослідження операцій» для студентів напрямку 6.050101 – Комп'ютерні науки. – 2 частина. / Упоряд.: Т.В. Селівьорстова, О.І. Михальов. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2019. – 62 с.
10. Методичні вказівки до самостійної роботи та практичних занять з дисципліни «Математичні методи дослідження операцій» для студентів напрямку 6.050101 – Комп'ютерні науки. – 3 частина. / Упоряд.: Т.В. Селівьорстова, О.І. Михальов. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2019. – 54 с.

11. Методичні вказівки до самостійної роботи та практичних занять з дисципліни «Математичні методи дослідження операцій» для студентів напрямку 6.050101 – Комп’ютерні науки. – 4 частина. / Упоряд.: Т.В. Селівьорстова, О.І. Михальов. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2019. – 52 с.

12. Методичні вказівки до самостійної роботи та практичних занять з дисципліни «Математичні методи дослідження операцій» для студентів напрямку 6.050101 – Комп’ютерні науки. – 5 частина. / Упоряд.: Т.В. Селівьорстова, О.І. Михальов. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2019. – 48 с.