

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

О.П. МОРОЗЕНКО, І.В. ВИШНЕВСЬКИЙ

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ

Затверджено на засіданні Вченої ради академії як
навчальний посібник. Протокол № 1 від 29.01.2013

Дніпропетровськ НМетАУ 2013

УДК 515 (07)

Морозенко О.П., Вишневський І.В. Нарисна геометрія: Навчальний посібник.-
Дніпропетровськ: НМетАУ, 2013. – 56 с.

Викладено теоретичний матеріал основних розділів дисципліни «Нарисна геометрія». Висвітлені питання графічної підготовки майбутніх спеціалістів в галузі машинобудування та інженерної механіки. Наведені варіанти завдань контрольної роботи та приклади виконання.

Призначений для студентів напрямів 6.050503 – машинобудування та 6.050502 – інженерна механіка заочної форми навчання.

Іл. 42. Бібліогр. – 4 найм.

Друкується за авторською редакцією.

Відповідальна за випуск О.П. Морозенко, канд. техн. наук, доц.

Рецензенти: А.Д.Малий, канд. техн. наук, доц. (ДНУЗТ)

А.В.Яцуба, головний інженер ПАТ “Агрегатний завод”

© Національна металургійна академія
України, 2013

© Морозенко О.П., Вишневський І.В., 2013

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ



О.П. МОРОЗЕНКО, І.В. ВИШНЕВСЬКИЙ

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ

Дніпропетровськ НМетАУ 2013

ВСТУП

В останні роки в ВНЗ набувають вищої освіти студенти після технікумів. В робочих програмах більшості технікумів не передбачено вивчення дисципліни «Нарисна геометрія», яка сприяє розвитку просторової уяви (мислення), умінню "читати" креслення, передавати свої думки за допомогою креслення, що необхідно майбутньому інженерові. Поступивши до НМетАУ, студенти здають академічну різницю з цієї дисципліни.

Робочими програмами передбачено 12 годин лекцій та 8 годин практичних занять. При складанні академічної різниці з нарисної геометрії передбачено: лекційне викладання дисципліни, роботу з даним навчальним посібником, практичні заняття, виконання контрольної роботи. Заключним етапом є співбесіда по виконаній контрольній роботі. Знання, уміння, навички і здібності до представлення просторових форм перевіряються на іспиті.

По дисципліні «Нарисна геометрія» для студентів напряму підготовки «Інженерна механіка», «Машинобудування» робочими програмами передбачена одна контрольна робота, яку студенти виконують самостійно та висилають на кафедру для рецензування. Завдання на контрольну роботу індивідуальні. Варіанти завдань відповідають сумі двох останніх цифр номера залікової книжки. Контрольна робота виконується на аркуші формату А3 (297x420). На форматі необхідно провести лінії рамки (ліве поле на відстані 20 мм, інші – на відстані 5 мм від краю аркуша). В правому нижньому куті формату розташовується основний напис по ДСТУ ГОСТ 2.104:2006. Креслення завдань виконуються в заданому масштабі. Всі написи виконуються стандартним шрифтом згідно з ГОСТ 2.304-81.

Основне завдання навчального посібника - допомогти студентам заочної та денної форм навчання в самостійному вивченні дисципліни «Нарисна геометрія».

Дисципліна «Нарисна геометрія» вивчає основні правила побудови зображень геометричних фігур, а також розвиває просторове уявлення для порозуміння за зображенням конструкції і принципу дії технічного виробу. Інженерна графіка відноситься до загально інженерних дисциплін.

1. Метод проєкцій. Способи проєкціювання

Будь-яка кількість точок як скінченна, так і нескінченна називається геометричною фігурою (Г.Ф.). В просторі Г.Ф. дуже багато, але основними є точки, прямі, площини і поверхні.

Для побудови зображень Г.Ф. на площині користуються методом проєкціювання. Слово “проєкція” – латинське, від *proicere*, що в перекладі означає “кинути наперед”. Отже проєкція – це зображення предмета, “відкинуте” на площину за допомогою променів. Спроєкціувати предмет – це означає зобразити його на площині.

Проєкції поділяються на центральні і паралельні.

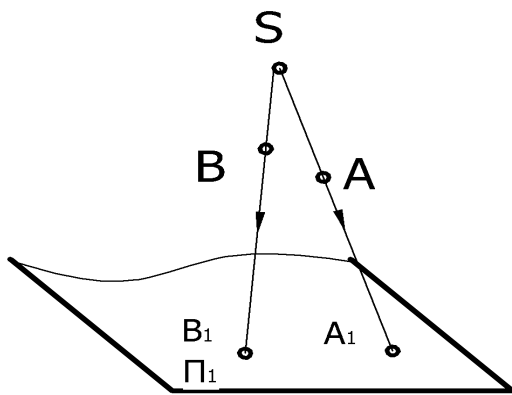


Рис. 1

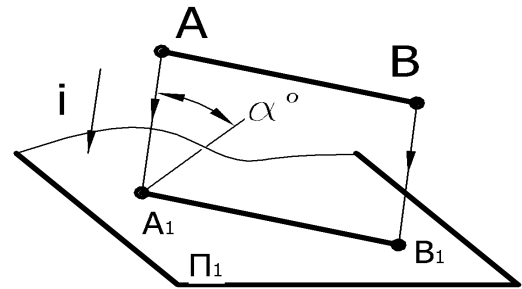


Рис. 2

де S – центр проєкціювання;

A, B, \dots - точки в просторі;

A_1, B_1, \dots - проєкції точок;

Π_1 - площина проєкцій;

AA_1, BB_1 – проєкціуючі промені;

i - напрямок проєкціювання;

α - кут нахилу променя до площини проєкцій.

Проекціювання з довільної точки простору (S) називається центральним проекціюванням (рис. 1). Якщо центр проекціювання (S) віддалити у нескінченність, то проекціуючі промені будуть паралельними. Таке проекціювання називається паралельним (рис. 2). Проекційні промені можуть складати з площиною проекцій гострі або прямі кути.

- 1) Косокутне проекціювання; $\alpha \neq 90^0$.
- 2) Прямокутне (ортогональне) проекціювання; $\alpha = 90^0$.

Паралельні і центральні проекції мають такі властивості:

- проекцією точки є точка на площині проекцій;
- проекцією прямої лінії є, як правило, також пряма (рис. 2);
- якщо пряма перпендикулярна площині проекцій, то проекцією прямої є точка;
- якщо пряма, або геометрична фігура паралельні площині проекцій, то вони проекціуються на цю площину в натуральну величину;
- якщо точка поділяє відрізок прямої у заданому відношенні, то проекції точки розділяють проекції прямої у тому ж відношенні.

2. Метод Гаспара Монжа. Проекції точки в системі трьох площин проекцій Π_1 , Π_2 та Π_3

Суть методу Г.Монжа полягає в тому, що, використовуючи паралельне ортогональне проекціювання, будуються проекції на дві, три або більш взаємно-перпендикулярних площин з наступним їхнім суміщенням в одну. При цьому предмет зображується з різних сторін (спереду, зверху, зліва, справа,...).

Проекції Г.Ф. будуються за допомогою:

- наочного зображення (косокутна фронтальна диметрія) (рис. 3); коефіцієнти спотворення за осями $K_x = 1$, $K_y = 0.5$, $K_z = 1$, коефіцієнт спотворення – це відношення аксонометричної проекції відрізка координатної осі до довжини самого відрізка цієї осі в натурі;
- комплексного креслення (епюра) (рис. 4). Коефіцієнти спотворення за осями $K_x = 1$, $K_y = 1$, $K_z = 1$.

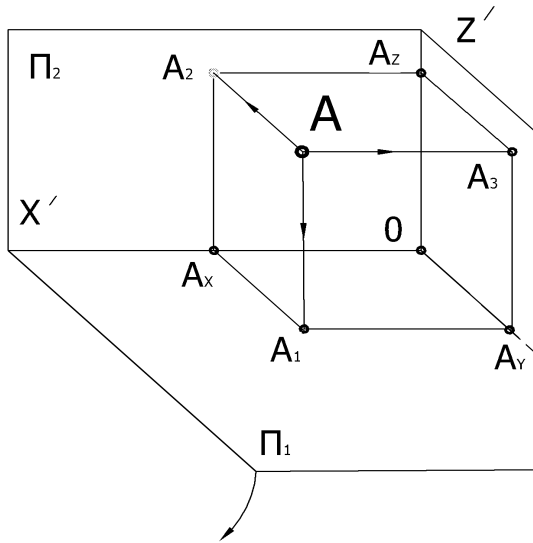


Рис. 3

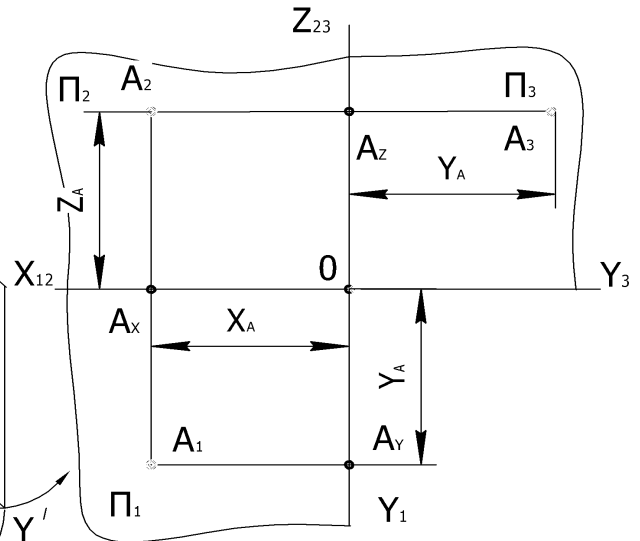


Рис. 4

Скористаємося трьома взаємно-перпендикулярними площинами, що утворюють прямий тригранний кут (рис. 3). Тут Π_1 , Π_2 , Π_3 – площини проєкцій (горизонтальна, фронтальна та профільна); лінії OX' , OY' , OZ' взаємного перетину площин проєкцій – осі проєкцій, т.О – початок осей проєкцій.

Розмістимо в просторі тригранного кута точку А і побудуємо її проєкції на площинах Π_1 , Π_2 , Π_3 . Для цього з точки А проведемо проєкціюючі промені AA_1 , AA_2 , AA_3 , перпендикулярні до площин проєкцій, до перетину з ними. Внаслідок дістанемо A_1 , A_2 , A_3 - горизонтальну, фронтальну, профільну проєкції точки.

Горизонтальна проєкція точки A_1 визначається координатами X_A та Y_A , фронтальна проєкція A_2 – координатами X_A та Z_A , профільна A_3 – Y_A та Z_A . При переході від наочного зображення до комплексного креслення площини проєкцій Π_1 та Π_3 потрібно сумістити з площиною Π_2 . Для суміщення трьох площин необхідно горизонтальну (Π_1) і профільну (Π_3) площини обертанням навколо осей X та Z відповідно сумістити з площиною Π_2 (рис. 4) Після суміщення ламані лінії, що з'єднують дві проєкції точок ($A_2A_1A_3$ та $A_2A_3A_1$), перетворюються в прямі, які перпендикулярні до осей X_{12} , Z_{23} , їх називають лініями проєкційного зв'язку.

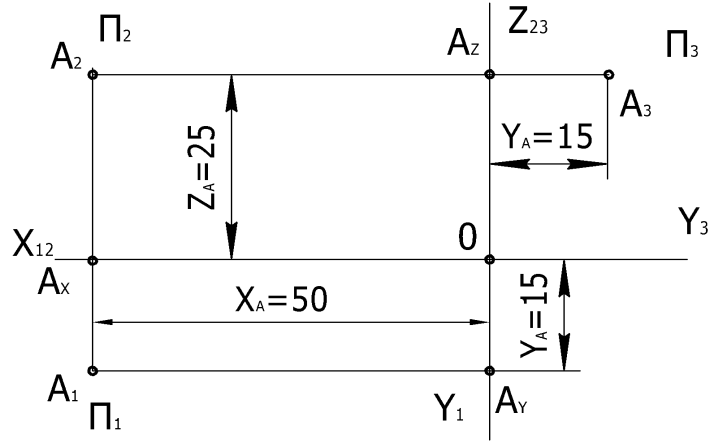
$$A_2A_1 \perp OX_{12} - \text{вертикальна лінія зв'язку};$$

$A_2A_3 \perp OZ_{23}$ – горизонтальна лінія зв'язку.

ПРИКЛАД: Побудувати проєкції т. $A(50, 15, 25)$ за її координатами

Алгоритм:

1. $OA_x = X_A = 50$.
1. $A_2A_1 \cap X_{12} = A_x$;
 $A_2A_1 \perp X_{12}$.
2. $A_xA_1 = Y_A = 15$.
3. $A_xA_2 = Z_A = 25$.
4. $A_2A_3 \cap Z_{23} = A_z$;
 $A_2A_3 \perp Z_{23}$;
 $A_zA_3 = Y_A$.



3. Проекції прямої. Положення прямої відносно площин проєкцій

Дві точки повністю визначають положення прямої в просторі. Провівши через точки A і B (рис. 5) перпендикуляри до площини Π_1 , на перетині знайдемо їх горизонтальні проєкції A_1 і B_1 . Відрізок A_1B_1 – горизонтальна проєкція прямої AB . Відрізок A_2B_2 – фронтальна проєкція прямої AB .

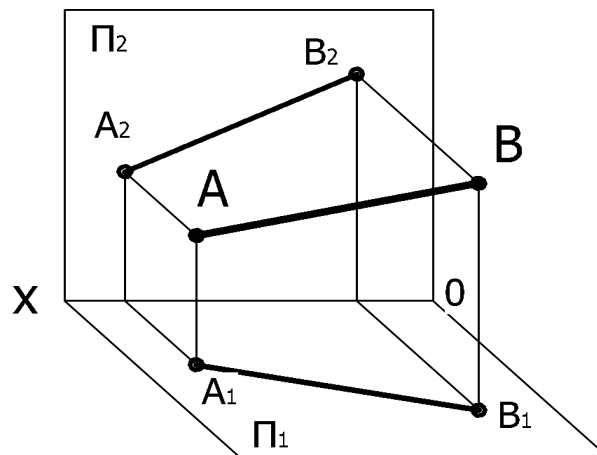


Рис. 5

Прямою загального положення називають пряму, розташовану похило до всіх площин проєкцій (рис. 5). Жодна з проєкцій цієї прямої не може бути паралельною осям проєкцій або перпендикулярною до них і не зображується на епюрі в натуральну величину.

Без додаткової побудови з креслення не можна визначити кути нахилу.

Прямі окремого положення поділяються на прямі рівня і проєкціювальні.

Прямими рівня називаються прямі, паралельні одній з площин проєкцій.

Пряма АВ (рис. 6 а), паралельна горизонтальній площині проєкцій Π_1 , називається горизонтальною прямою, або, скорочено, горизонталлю.

Пряма CD (рис. 6 б), паралельна фронтальній площині проєкцій Π_2 , називається фронтальною прямою, або, скорочено, фронталлю.

Пряма MN (рис. 6 в), паралельна профільній площині проєкцій Π_3 , називається профільною прямою.

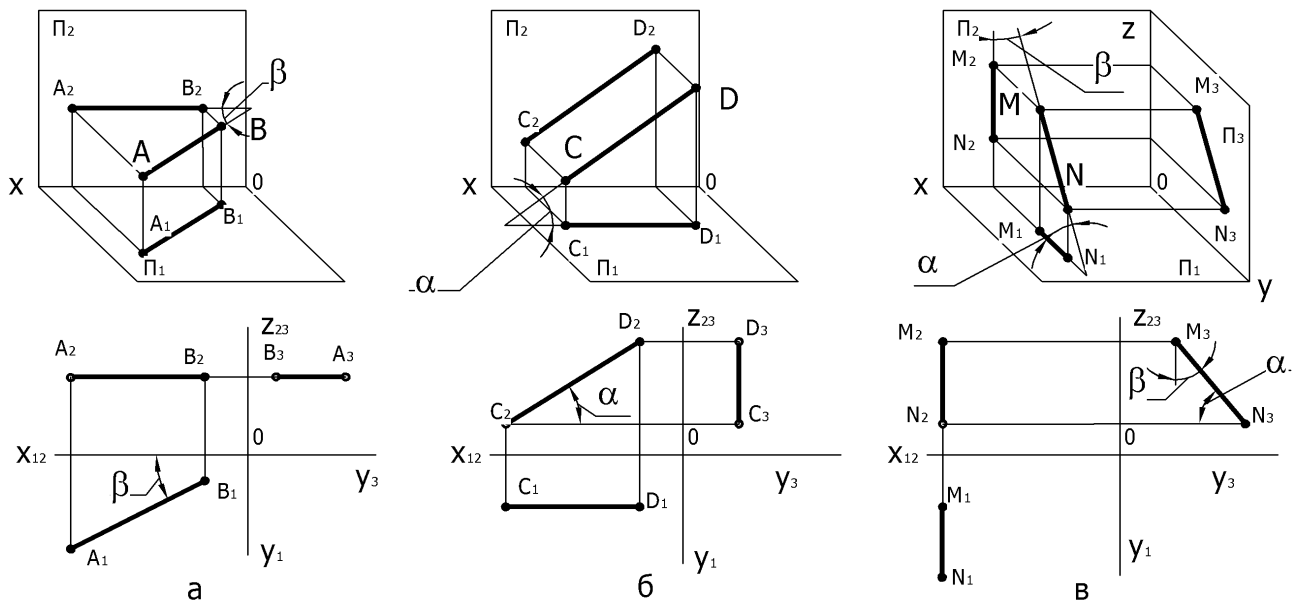


Рис. 6

Властивості прямих рівня

A_1B_1 – горизонтальна проєкція горизонталі (ГПГ)

A_2B_2 – фронтальна проєкція

C_1D_1 – горизонтальна проєкція фронталі (ГПФ)

C_2D_2 – фронтальна проєкція

$M_2N_2 \perp X_{12}$

$M_1N_1 \perp X_{12}$

$M_3N_3 = |MN|$

горизонталі (ФПГ)

фронталі (ФПФ)

$$\Phi\PiГ \parallel X_{12}$$

$$\Gamma\PiФ \parallel X_{12}$$

$$A_1B_1 = |AB|$$

$$C_2D_2 = |CD|$$

Кут нахилу АВ до π_2 - β

Кут нахилу АВ до π_1 - α

Проекціювальними називаються прямі, перпендикулярні одній з площин проєкцій, тобто паралельні двом іншим площинам. Пряма АВ (рис. 7 а), перпендикулярна до площини проєкцій Π_1 , називається горизонтально-проекціювальною прямою; пряма CD (рис. 7 б), перпендикулярна до площини проєкцій Π_2 , називається фронтально-проекціювальною прямою; пряма MN (рис. 7 в), перпендикулярна до площини проєкцій Π_3 , називається профільно-проекціювальною прямою.

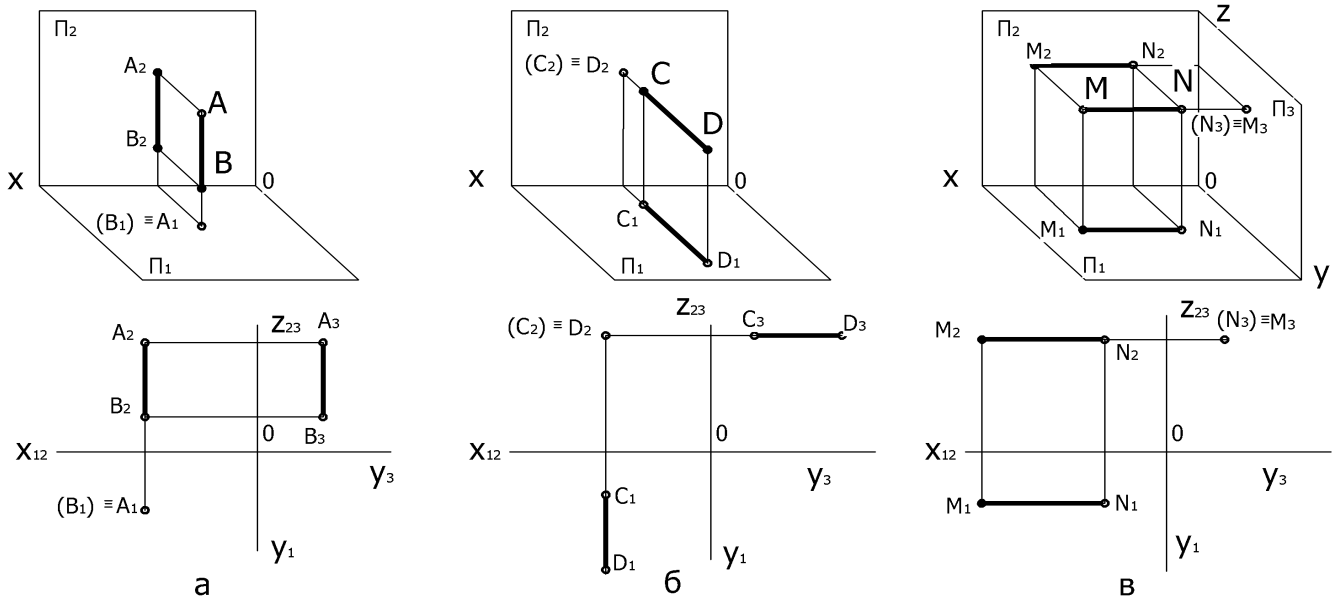


Рис. 7

Властивості проєкціювальних прямих

$$A_2B_2 = A_3B_3 = |AB|$$

$$C_1D_1 = C_3D_3 = |CD|$$

$$M_2N_2 = M_1N_1 = |MN|$$

$$A_2B_2 \perp X_{12}$$

$$C_1D_1 \perp X_{12}$$

$$M_2N_2 \parallel X_{12}; M_1N_1 \parallel X_{12}$$

Якщо пряма лежить у площині проєкцій, то одна її проєкція (однойменна) співпадає з самою прямою, а дві інші – з осями. Наприклад, пряма АВ (рис. 8)

лежить у площині Π_1 . Таку пряму називають нульовою горизонталлю, бо висота її точок дорівнює нулю. CD (рис. 8) – нульова фронталь.

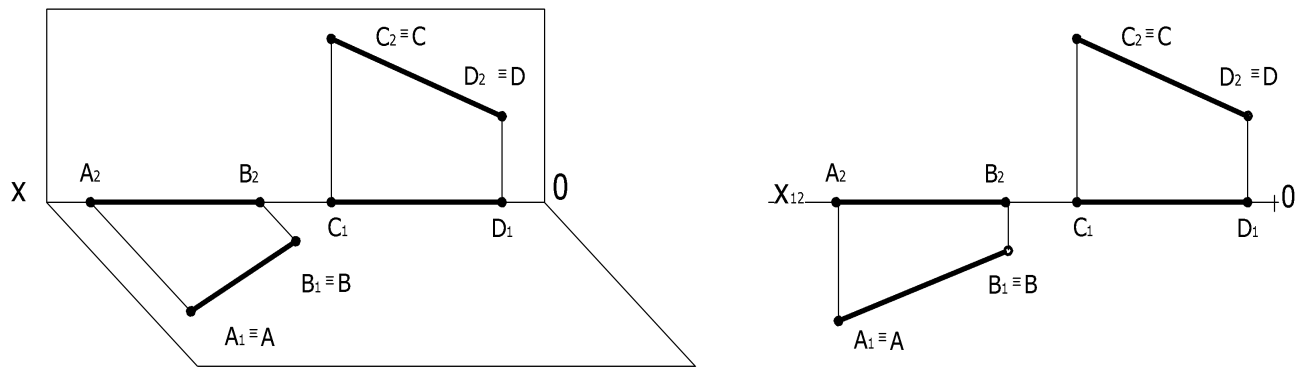


Рис. 8

4. Проекції площин. Класифікація площин

Площина – найпростіша поверхня, з будь-яким напрямком якої суміщається пряма лінія. На кресленні площина може бути задана визначником, відсіком або обрисом.

Визначник – це сукупність мінімального числа ліній і точок, а також додаткових умов, за допомогою яких зображують площину.

Відсік – деяка частина площини, обмежена якимсь довільним контуром.

Обрис – контур видимої частини Г.Ф.

На комплексному кресленні площина може бути задана:

- проекціями трьох точок, що не лежать на одній прямій (рис. 9 а);
- проекціями прямої і точки, яка не належить даній прямій (рис. 9 б);
- проекціями прямих, що перетинаються, або двох паралельних прямих (рис. 9 в,г);
- проекціями плоскої фігури (рис. 10);
- слідами площини (рис. 11).

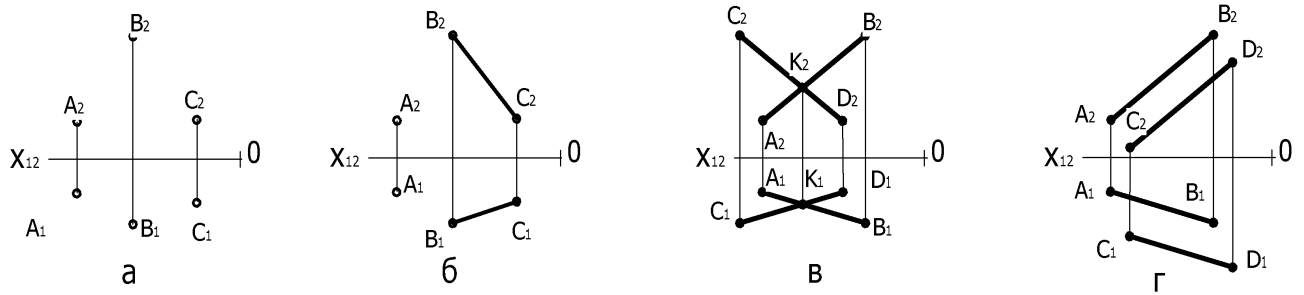


Рис. 9

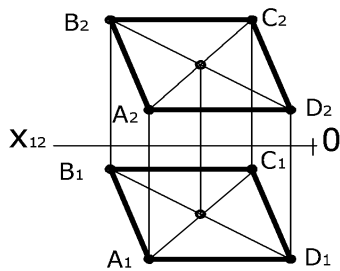


Рис. 10

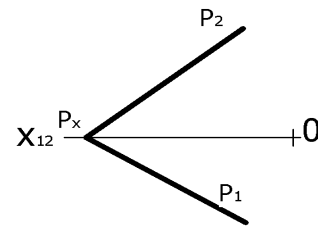


Рис. 11

Слідами площини називаються лінії перетину площини з площинами проєкцій (рис. 12).

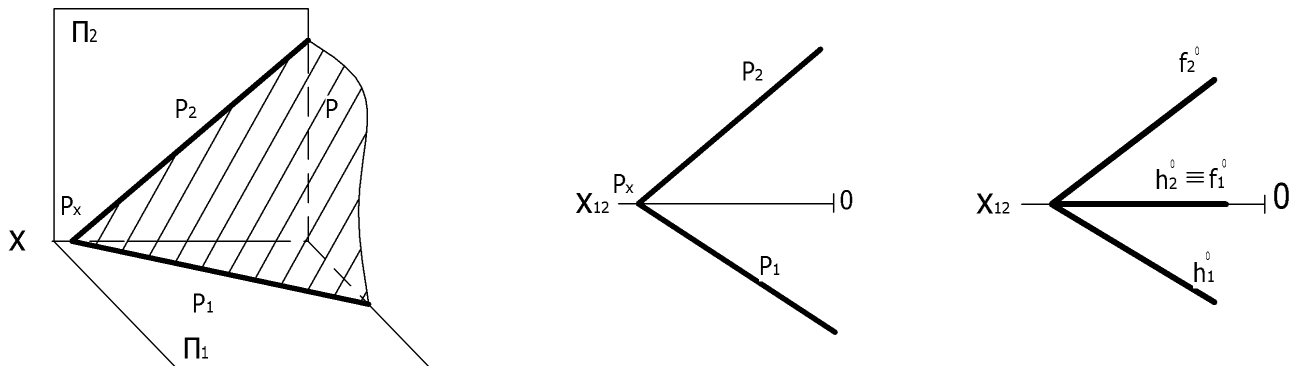


Рис. 12

$P \cap \Pi_1 = P_1$ – горизонтальний слід;

$P \cap \Pi_2 = P_2$ – фронтальний слід;

$P_1 \cap P_2 = P_x$ – точка збігу слідів.

Горизонтальний слід P_1 збігається із своєю горизонтальною проєкцією, а фронтальна проєкція – з віссю OX_{12} . Аналогічно, фронтальний слід P_2 збігається зі своєю фронтальною проєкцією, а його горизонтальна проєкція – з віссю OX_{12} .

Класифікація площин – це характерне розташування площини відносно площин проекцій. У просторі площини можуть займати загальне і окреме положення.

Площина загального положення – це площина, яка не паралельна і не перпендикулярна жодній площині проекцій (рис. 12).

Площини окремого положення поділяють на:

- проєкціювальні – площини, перпендикулярні до однієї площини проекцій (рис. 13, 14, 15);
- рівня – площини, паралельні одній площині проекцій (рис. 16 а,б,в).

Проекціювальні площини

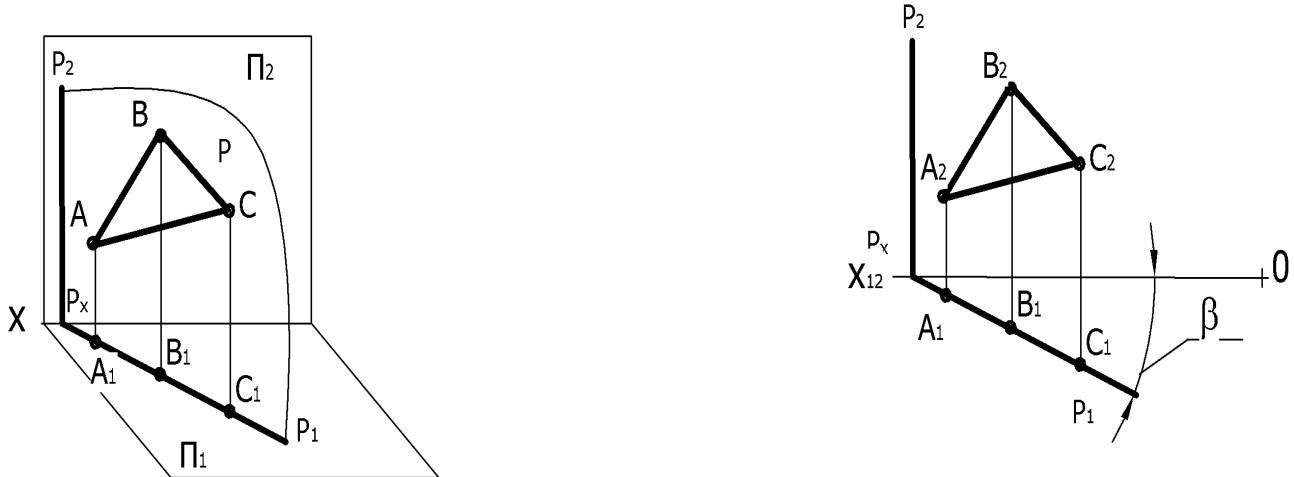


Рис. 13

Властивості горизонтально-проекціювальної площини

$P \perp \Pi_1$ – горизонтально-проекціювальна площина;

$P_2 \perp X_{12}$;

β - кут нахилу площини P до Π_2 .

Горизонтальні проєкції точок, прямих, геометричних фігур, які належать горизонтально- проекціювальній площині, лежать на горизонтальному сліді цієї площини. Ця властивість називається збиральною ($A_1B_1C_1 \subset P_1$).

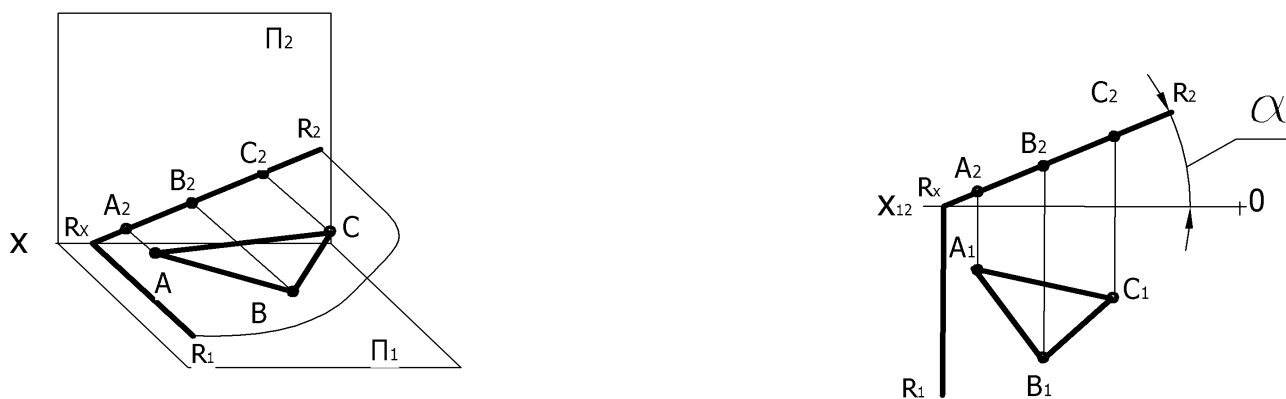


Рис. 14

Властивості фронтально-проекціювальної площини

$R \perp \Pi_2$ – фронтально- проекціювальна площина;

$R_1 \perp X_{12}$;

α - кут нахилу площини R до Π_1 .

Фронтальний слід володіє збиральною властивістю ($A_2B_2C_2 \subset R_2$).

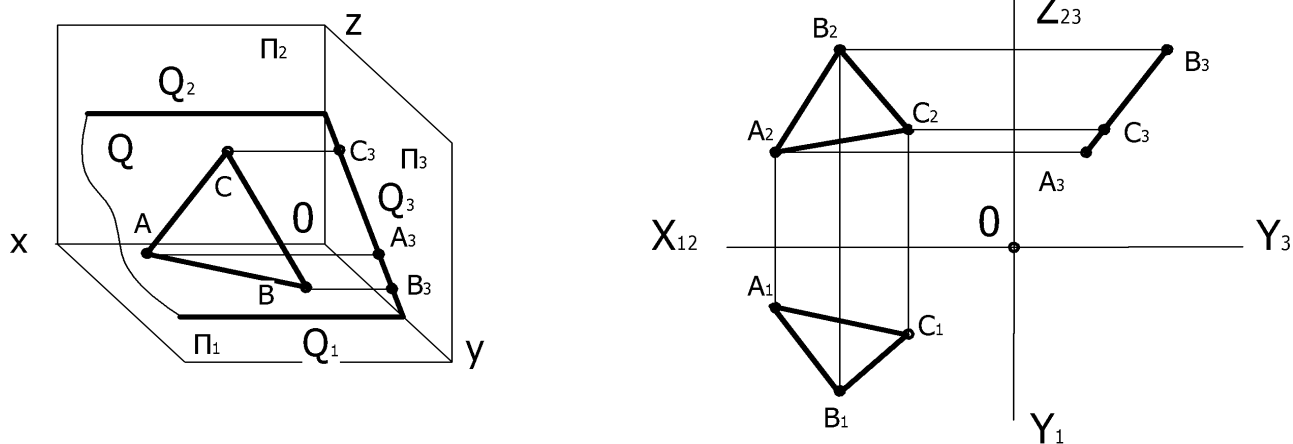


Рис. 15

Властивості профільно- проекціювальної площини

$Q \perp \Pi_3$ – профільно- проекціювальна площина;

$Q_1, Q_2 \parallel X_{12}$.

Профільний слід володіє збиральною властивістю ($A_3B_3C_3 \subset Q_3$).

Площини рівня

Площина, яка перпендикулярна до двох площин проєкцій і, як наслідок, паралельна третій площині проєкцій, має назву площини рівня (рис. 16).

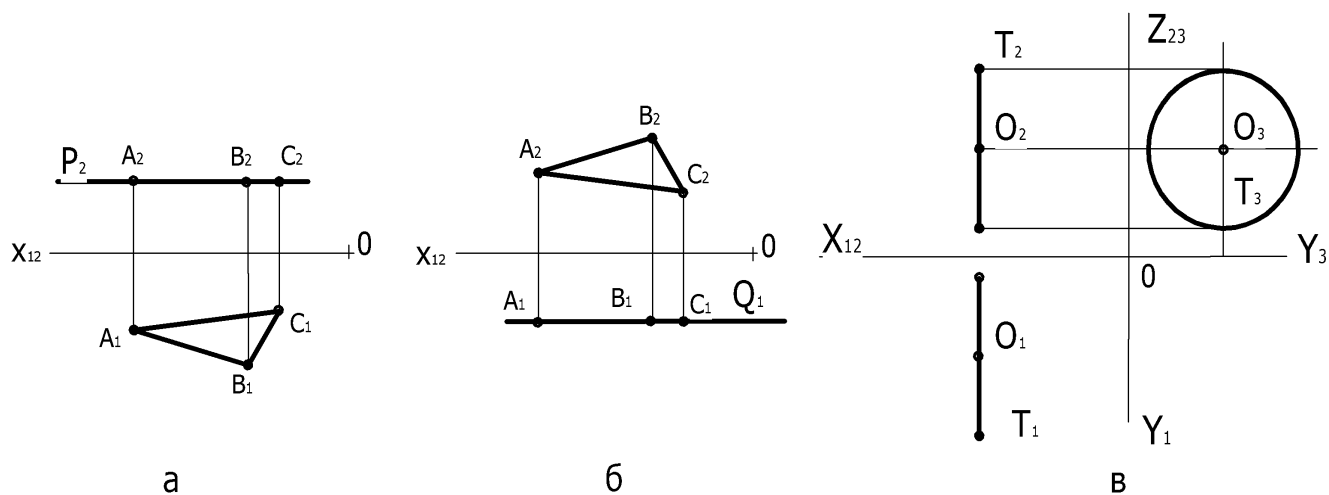


Рис. 16

Властивості площини рівня

$P(\triangle ABC) \parallel \Pi_1$ – горизонтальна площина; $A_2B_2C_2 \subset P_2$; $P_2 \parallel X_{12}$; $\triangle A_1B_1C_1 = |\triangle ABC|$;

$Q \parallel \Pi_2$ – фронтальна площина; $A_1B_1C_1 \subset Q_1$; $Q_1 \parallel X_{12}$; $\triangle A_2B_2C_2 = |\triangle ABC|$;

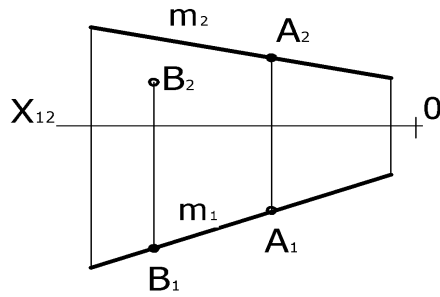
$T \parallel \Pi_3$ – профільна площина; $T_1, T_2 \perp X_{12}$.

Будь-яка фігура, що належить площині рівня, має дві проєкції, що збігаються зі слідами площини (збиральна властивість).

5. Властивості проєкцій пар геометричних фігур

Точка і пряма

Точка належить прямій, якщо її проєкції належать проєкціям прямої і не належить прямій, якщо хоча б одна її проєкція не належить проєкції прямої (рис. 17).



$$A \in m \rightarrow \begin{cases} A_2 \in m_2; \\ A_1 \in m_1; \end{cases}$$

$$B \notin m$$

Рис. 17

Дві прямі

Дві прямі в просторі одна відносно одної можуть бути взаємно-паралельними, перетинатися і бути мимобіжними.

- Якщо прямі в просторі паралельні, то їх однойменні проєкції на будь-яку площину також паралельні (рис. 18 а).
- Якщо прямі в просторі перетинаються, то на комплексному кресленні точки перетину однойменних проєкцій розташовані на одній лінії проєкційного зв'язку (рис. 18 б).
- Якщо дві прямі в просторі не паралельні між собою і не перетинаються, то такі прямі називаються мимобіжними. Точки перетину однойменних проєкцій у мимобіжних прямих лежать на різних перпендикулярах до осі ОХ (рис. 18 в). Точки, проєкції яких співпадають на одній площині проєкції, називаються конкуруючими (рис. 18 в) – точка 1 і точка 2, точка 3 і точка 4.

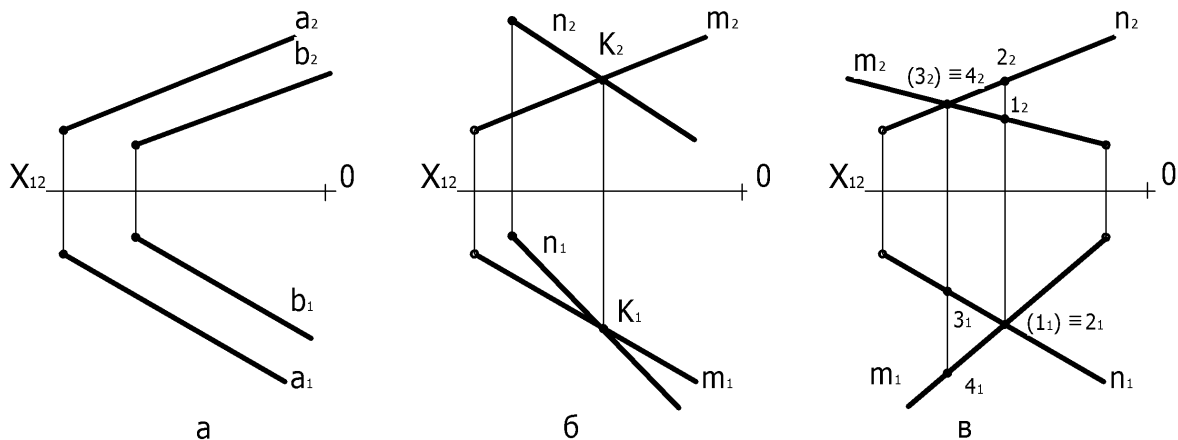


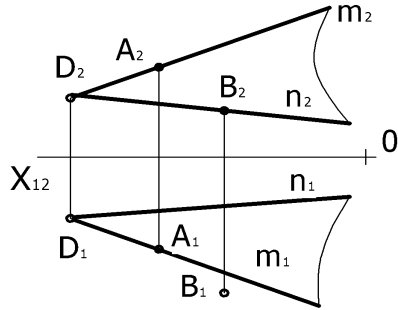
Рис. 18

$$a \parallel b; \quad a_2 \parallel b_2; \quad a_1 \parallel b_1 \quad m \cap n; \quad m_1 \cap n_1 = K_1; \quad m_2 \cap n_2 = K_2; \quad m \div n; \quad 1, 4 \in m; \quad 2, 3 \in n$$

$$K_2 K_1 \perp OX$$

Точка і площина

Точка може належати площині або не належати їй. Це визначається за допомогою прямої, яка проходить через точку та інцидентна (належить) площині (рис. 19).



$$A \in \Phi(m \cap n) \begin{cases} A \in m \\ m \subset \Phi(m \cap n) \end{cases}$$

$$B \notin \Phi$$

Рис. 19

Пряма і площина. Дві площини

Пряма може:

- належати площині;
- бути паралельна площині;
- перетинати площину.

Пряма належить площині, якщо вона проходить через дві точки, що належать цій площині (рис. 20 а, б).

Пряма належить площині, якщо вона проходить через точку, що лежить у площині і паралельна іншій прямій цієї площини (рис. 20 в).

До головних прямих площин відносяться прямі рівня, що належать площині і паралельні будь-якій площині проєкцій – горизонталі і фронталі (рис. 20 а, б).

Горизонталь площини – це лінія, що належить площині і паралельна горизонтальній площині проєкцій Π_1 .

Фронталь площини – це лінія, що належить площині та паралельна фронтальній площині проєкцій Π_2 .

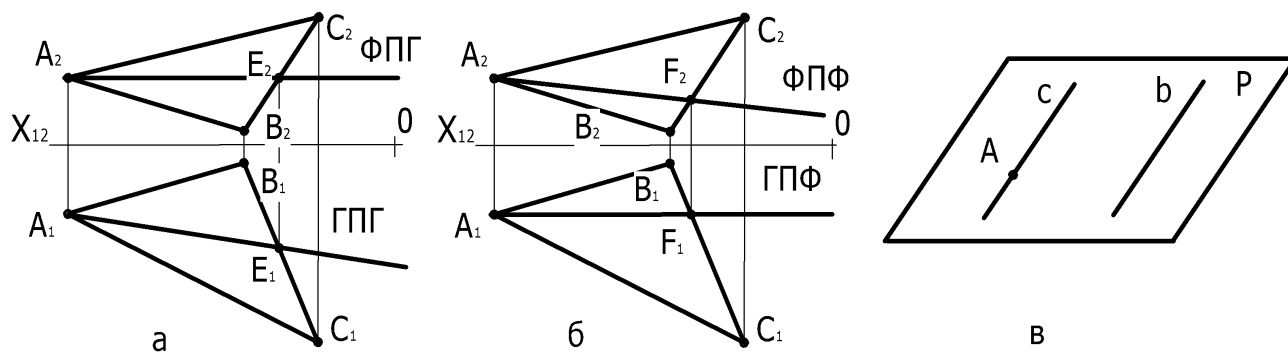


Рис. 20

$$AE \subset ABC \rightarrow \begin{cases} A \in ABC \\ E \in ABC \end{cases}$$

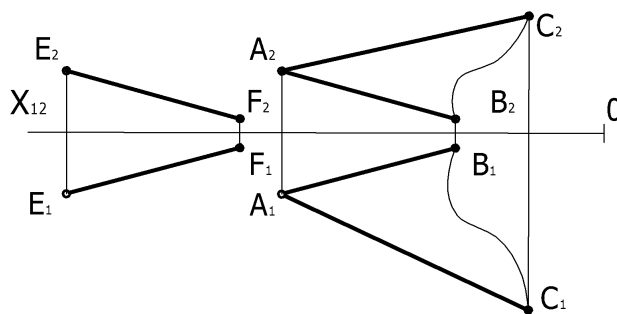
$$AF \subset ABC \rightarrow \begin{cases} A \in ABC \\ F \in ABC \end{cases}$$

$$(c \subset P) \rightarrow \begin{cases} A \in c \\ c \parallel e \\ e \subset P \end{cases}$$

$AE \parallel \Pi_1$ – горизонталь;
 $AF \parallel \Pi_2$ – фронталь.

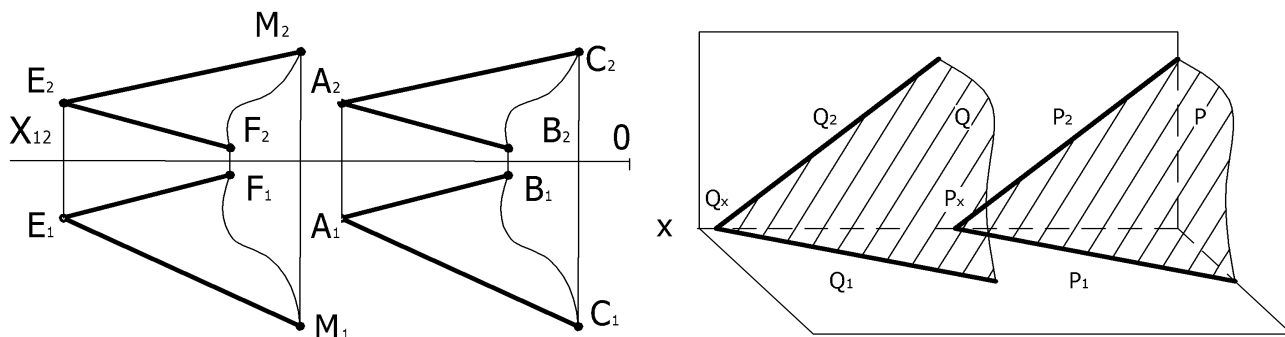
Пряма паралельна площині, якщо вона паралельна будь-якій прямій, що лежить у цій площині.

ПРИКЛАД:



Дві площини паралельні, якщо дві прямі, що перетинаються - однієї площини паралельні двом прямим, що перетинаються - другої площини.

ПРИКЛАД:



Дві площини можуть перетинатись. Лінія перетину площин визначається двома точками, які одночасно належать заданим площинам. Тут можливі три випадки:

- 1) площини є проєкціювальними відносно однієї й тієї самої площини проєкцій;
- 2) одна з площин – проєкціювальна, або рівня, а друга – загального положення;
- 3) обидві площини є площинами загального положення.

У першому та другому випадках лінія перетину вже є на одній з проєкцій і за нею знаходять другу проєкцію лінії (рис. 21 а, б).

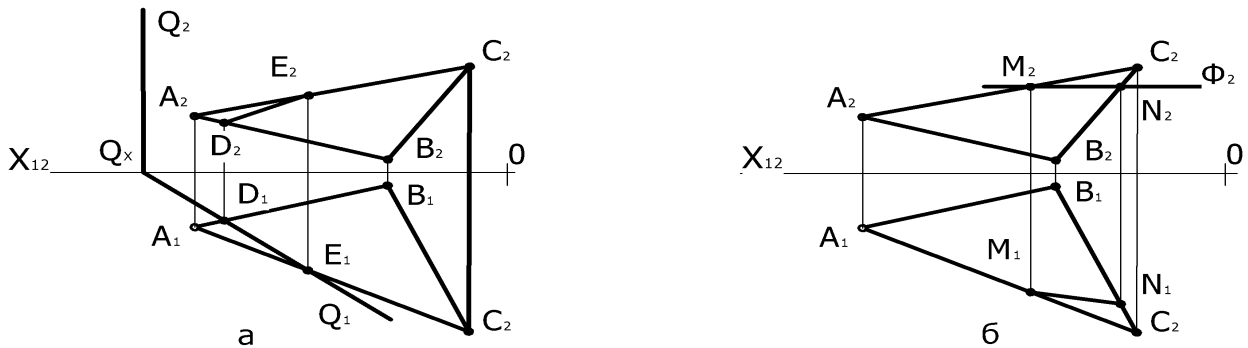


Рис. 21

$\Delta ABC \cap (Q \perp \Pi_1) = DE$; Q_1 – володіє збиральною властивістю $D_1 E_1 \subset Q_1$;

$\Delta ABC \cap (\Phi \parallel \Pi_1) = MN$; $M_2 N_2 \subset \Phi_2$ (збиральна властивість).

При розв'язанні задачі на перетин прямої з площиною розглядають три випадки розміщення фігур:

1. Фігури є проєкціювальними відносно різних площин проєкцій.

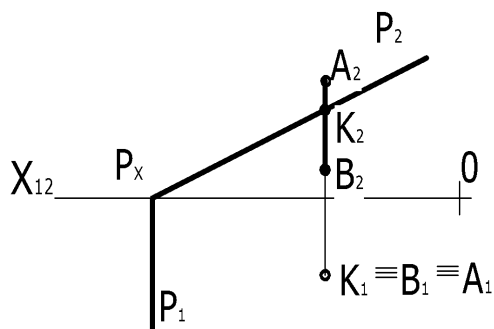


Рис. 22

$P \perp \Pi_2$;

$AB \perp \Pi_1$;

Точка перетину прямої з площиною визначається на підставі інцидентності.

2. Одна з фігур, що перетинається, є проєкціювальною, а друга – загального положення.

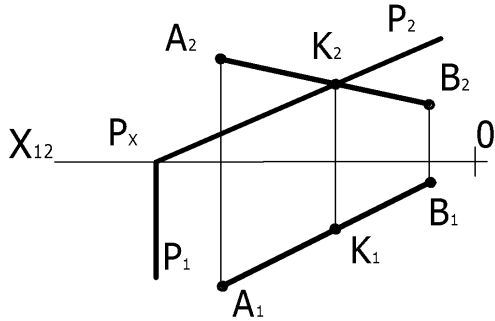


Рис. 23

$P \perp P_2$;

AB – загального положення;

K_2 - визначається на підставі інцидентності;

K_1 – за вертикальною відповідністю;

$K_1 \in A_1B_1$.

3. Обидві фігури займають загальне положення.

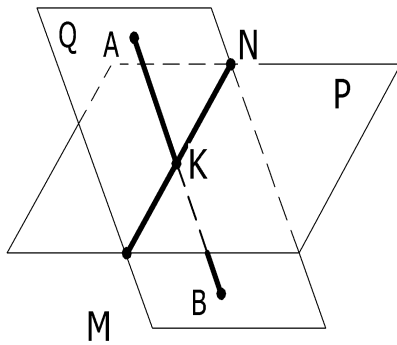
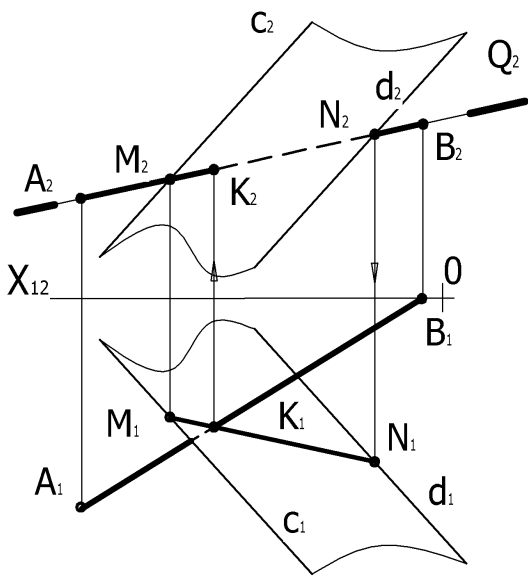


Рис. 24

Для побудови точки перетину:

1. Пряму поміщають у допоміжну площину (Q).
2. Знаходять лінію перетину заданої площини з допоміжною.
3. Визначають точку перетину двох прямих (заданої та лінії перетину):
а) $AB \subset Q$; б) $MN = P \cap Q$; в) $K = MN \cap AB$.

ПРИКЛАД: Побудувати точку перетину прямої загального положення з площиною загального положення.

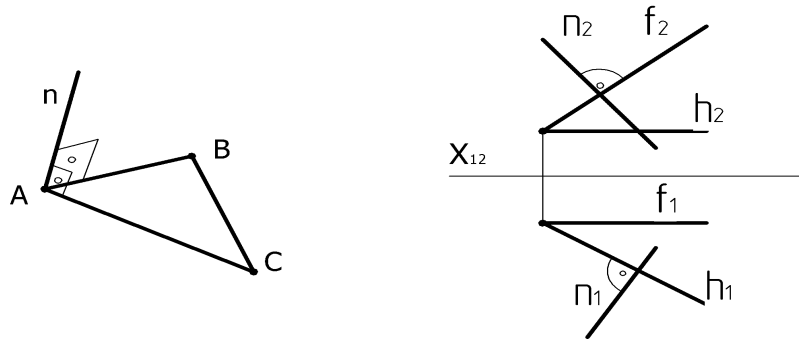


Через пряму AB проводимо фронтально - проєкційвальну площину Q ($A_2B_2 \equiv Q_2$).

Знаходимо лінію перетину (MN) заданої площини з допоміжною. Фронтальна проєкція $M_2N_2 \equiv Q_2$. Визначаємо горизонтальну проєкцію M_1N_1 . У перетині A_1B_1 з M_1N_1 знаходимо горизонтальну проєкцію шуканої точки K_1 – перетин прямої з площиною. Фронтальну проєкцію (K_2) шуканої точки визначають за вертикальною відповідністю. Видимість прямої визначаємо за допомогою конкуруючих точок.

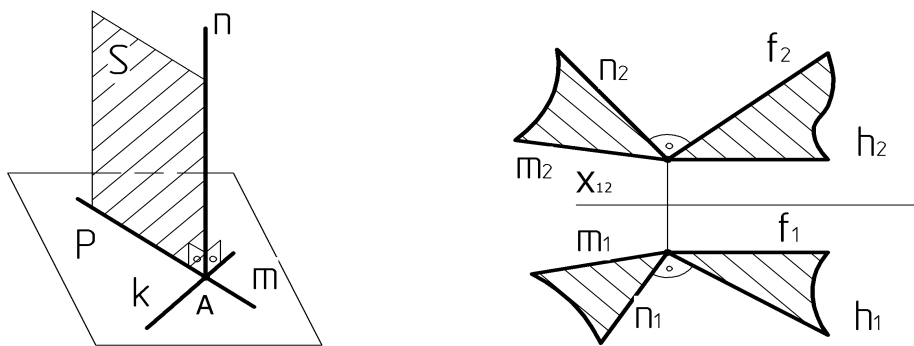
Пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна двом прямим цієї площини, що перетинаються.

ПРИКЛАД:



Дві площини перпендикулярні між собою, якщо одна з них проходить через пряму, яка перпендикулярна до другої площини.

ПРИКЛАД:



6. Способи перетворення проєкцій

Відомо, що при розміщенні фігури, паралельно будь-якій площині проєкцій, вона проєкціюється на цю площину в дійсну величину. В усіх інших випадках елементи фігури (площини) проєкціюються із спотворенням, через що визначення їх справжніх величин ускладнюється.

Для простого і зручного розв'язування задач користуються способами перетворення проєкцій.

Сутність методів перетворення

Сутність методів перетворення полягає в зміні взаємного положення Г.Ф. і площин проєкцій для того, щоб Г.Ф. займали окреме положення.

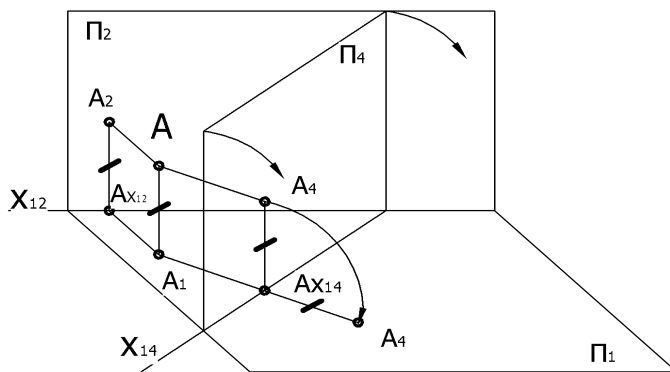
До основних методів відносяться:

1. Метод заміни площин проєкцій (об'єкт проєкціювання залишають незмінним, змінюють саму систему площин проєкцій).
2. Метод плоско-паралельного переміщення (система площин проєкцій лишається незмінною, а нові проєкції фігури утворюються внаслідок обертання її навколо вибраних осей).

Метод заміни площин проєкцій

Сутність методу заміни площин проєкцій полягає в тому, що положення точок, ліній, плоских фігур у просторі залишається незмінним, а змінюються щодо них площини проєкцій. Замість однієї з існуючих площин проєкцій вводиться нова, при цьому перпендикулярність між площинами зберігається.

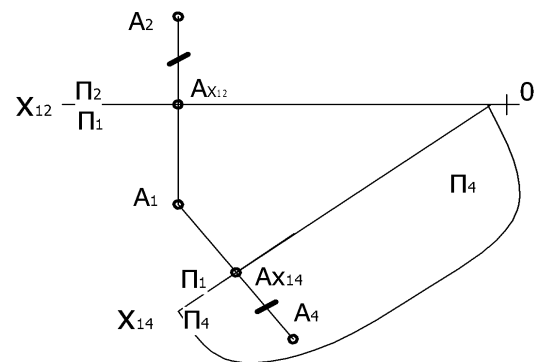
Розглянемо точку A в системі площин Π_1 та Π_2 (рис. 25). Введемо нову вертикальну площину Π_4 , слід якої на площині Π_1 є x_{14} . Цим самим від системи площин проєкцій $\frac{\Pi_2}{\Pi_1}$ перейдемо до системи $\frac{\Pi_4}{\Pi_1}$. При цьому горизонтальна проєкція точки не зміниться, а фронтальною проєкцією стане точка A_4 . Як бачимо, відстань від проєкції A_2 , що замінюється, до осі x_{12} дорівнює відстані від нової проєкції A_4 до нової осі x_{14} . Цю саму операцію показано на комплексному кресленні.



$$A_2 A_{x_{12}} = A A_1 = A_4 A_{x_{14}}$$

$$A_1 A_{x_{14}} A_4 - \text{лінія зв'язку}$$

$$A_1 A_4 \perp x_{14}$$



$$x_{12} \frac{\pi_2}{\pi_1} \rightarrow x_{14} \frac{\pi_4}{\pi_1}$$

Рис. 25

Отже при заміні фронтальної площини проєкцій незмінними залишаються координати Z точок фігури.

Висновки:

- При заміні (фронтальної) площини проєкцій (Π_2) на нову площину Π_4 одна (горизонтальна A_1) проєкція точки залишається незмінною.
- Щоб визначити нову (фронтальну A_4) проєкцію, треба з незмінної (горизонтальної A_1) проєкції провести перпендикуляр до нової осі X_{14} і відкласти на ньому відрізок, що дорівнює відстані заміненої проєкції від попередньої осі.

Заміну можна робити послідовно кілька разів до одержання бажаної проєкції.

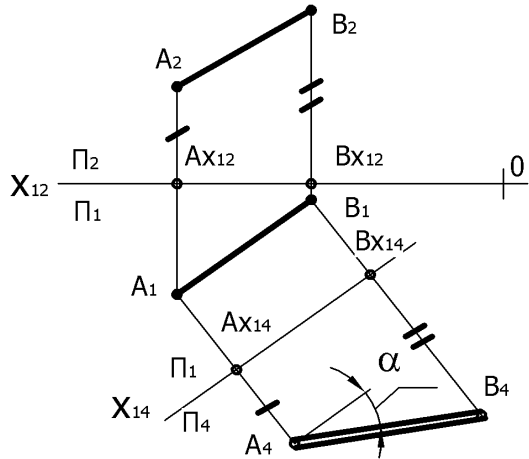
Типові задачі методу заміни площин проєкцій

Перетворення прямої загального положення в пряму рівня

Щоб знайти справжню величину відрізка прямої AB , замінюють фронтальну площину проєкцій Π_2 новою вертикальною площиною Π_4 так, щоб вона була паралельна відрізку AB і залишалась перпендикулярною до площини проєкцій Π_1 (рис. 26).

На площину Π_4 відрізок спроеціюється в натуральну величину. Проєкцію A_4B_4 на комплексному кресленні (рис. 26) будують в такій послідовності:

- на довільній відстані від A_1B_1 проводять нову вісь X_{14} , паралельну горизонтальній проєкції відрізка;
- з проєкцій A_1 і B_1 проводять лінії проєкційного зв'язку в системі площин $\frac{\Pi_1}{\Pi_4}$, перпендикулярні осі X_{14} ;
- на продовженні цих ліній від нової осі (X_{14}) відкладають відрізки, які дорівнюють координатам Z точок A і B , що виміряють на площині проєкцій Π_2 ;
- відрізок A_4B_4 є натуральною величиною відрізка AB , оскільки він паралельний новій площині проєкцій Π_4 .



$$X_{12} \frac{\pi_2}{\pi_1} \rightarrow X_{14} \frac{\pi_4}{\pi_1}; \quad \Pi_4 \parallel AB; \quad X_{14} \parallel A_1B_1.$$

У системі $X_{14} \frac{\pi_4}{\pi_1}$ АВ – фронталь

$$B_2B_{X_{12}} = B_{X_{14}}B_4 \quad A_2A_{X_{12}} = A_{X_{14}}A_4$$

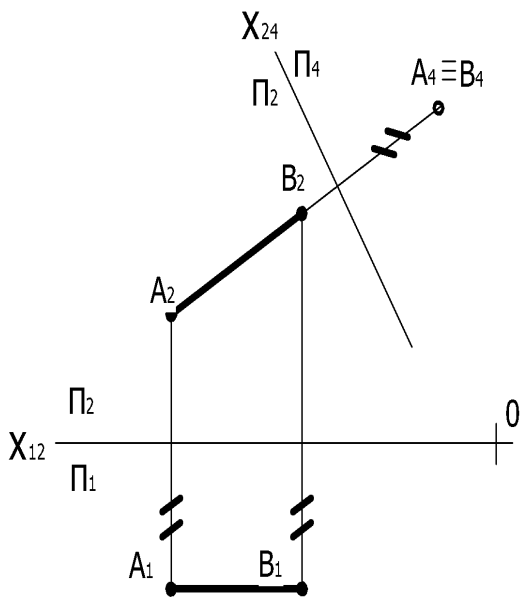
$$A_4B_4 = |AB| \quad \alpha - \text{кут нахилу прямої до } \pi_1$$

Рис. 26

Вищевикладеними побудовами визначаються:

- натуральна величина відрізка;
- кути нахилу прямої до площин проекцій.

Перетворення прямої рівня в проекціювальну



$$X_{12} \frac{\pi_2}{\pi_1} \rightarrow X_{24} \frac{\pi_2}{\pi_4}; \quad \pi_4 \perp AB; \quad X_{24} \perp A_2B_2.$$

Щоб пряма зайняла проекціювальне положення, досить перпендикулярно до прямої рівня провести нову площину Π_4 , її слідом буде X_{24} (рис. 27). Проекція прямої у вигляді точки розміститься від осі X_{24} на відстані, що дорівнює відстані від проекції A_1B_1 до осі X_{12} .

При перетворенні прямої загального положення в проекціювальну послідовно здійснюються дві заміни площин проекцій.

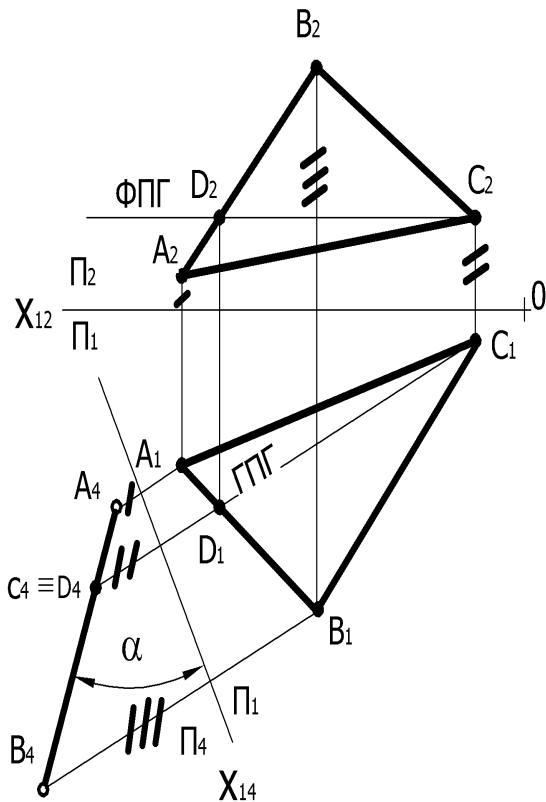
Рис. 27

Типові задачі, що розв'язуються перетворенням прямої в проекціювальну:

- визначення відстані від точки до прямої;

- визначення відстані між двома паралельними прямими;
- визначення відстані між двома мимобіжними прямими.

Перетворення площини загального положення в проекцію вальну



Щоб перевести відсік у проекціювальне положення, необхідно й достатньо, щоб будь-яка пряма, що належить йому, спроекціювалася в точку. За таку пряму доцільно взяти лінію рівня, бо для її перетворення в точку досить однієї заміни. На рис. 28 у відсіку проведено горизонталь CD, нову вертикальну площину Π_4 взято перпендикулярно до площини $\theta(\Delta ABC)$, її слід проводити перпендикулярно до горизонтальної проекції горизонталі (C_1D_1). При цьому відсік перетворився у фронтально-проекціювальну площину і спроекціювався у відрізок прямої A_4B_4 $X_{12} \frac{\pi_2}{\pi_1} \rightarrow X_{14} \frac{\pi_4}{\pi_1}$;

$$\pi_4 \perp ABC; X_{14} \perp ГПГ;$$

Рис. 28

Типові задачі:

- визначення відстані від точки до площини;
- визначення кутів нахилу площини до площин проекцій.

Перетворення проекціювальної площини у площину рівня

При заміні вісь X_{12} проводять паралельно A_2C_2 і від осі відкладають відрізки, що дорівнюють відстані від точок до горизонтальної проекції осі X_{12} .

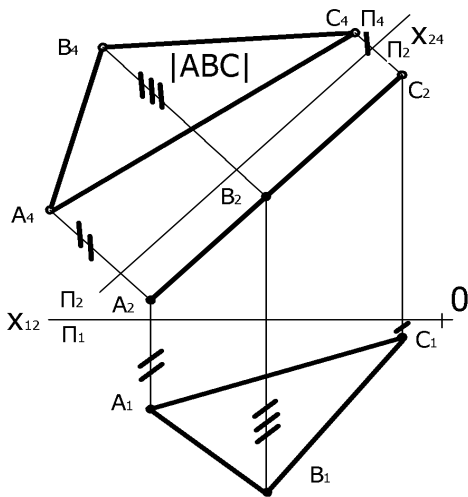


Рис. 29

$$X_{12} \frac{\pi_2}{\pi_1} \rightarrow X_{24} \frac{\pi_2}{\pi_4}; \Pi_4 \parallel \Delta ABC;$$

$$X_{24} \parallel A_2C_2 \quad A_4B_4C_4 = |ABC|.$$

Типові задачі:

- визначення натуральних величин плоских фігур;
- геометричні побудови на базі натуральної величини плоскої фігури.

При перетворенні площини загального положення в площину рівня послідовно здійснюються дві заміни площин проекцій.

Метод плоско-паралельного переміщення

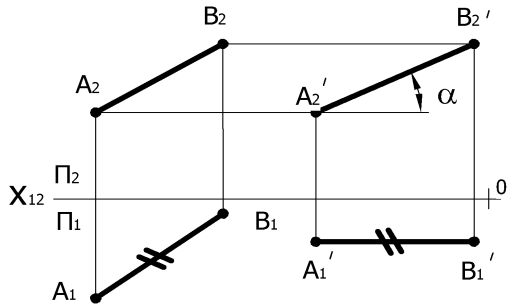
Плоско-паралельним переміщенням називається такий рух фігури в просторі, при якому всі її точки переміщуються в площинах, паралельних між собою і паралельних одній із площин проекцій до моменту, коли вона займе окреме положення щодо площин проекцій. Оскільки положення осі обертання не впливає на остаточний результат, то вибір її довільний.

Щоб встановити відрізок прямої загального положення в положення, паралельне фронтальній площині проекцій, треба повернути його навколо “невиявленої” горизонтально-проекціуювальної осі і на полі Π_2 дістанемо натуральну величину відрізка АВ (рис. 30).

Для цього горизонтальну проекцію A_1B_1 , не змінюючи її величини, розташовують на вільному полі креслення, паралельно осі проекцій X_{12} ($A_1'B_1' = A_1B_1$). З фронтальних проекцій точок A_2 і B_2 проводять прямі,

паралельні осі X_{12} , до перетину з вертикальними лініями проєкційного зв'язку, проведеними з точок A'_1 і B'_1 .

$A'_2B'_2$ – фронтальна проєкція переміщеного відрізка AB – дорівнює натуральній (дійсній) величині відрізка. Кут α є кутом нахилу прямої AB до горизонтальної площини проєкцій.



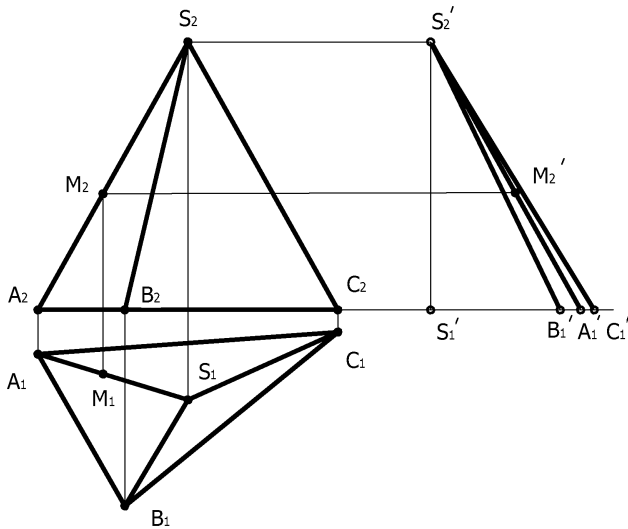
$$A'_1B'_1 = A_1B_1;$$

$$A'_1B'_1 \parallel X_{12}; A_2A'_2 \parallel X_{12}; B_2B'_2 \parallel X_{12}$$

$$AB \parallel \Pi_2; A'_2B'_2 = |AB|.$$

Рис. 30

ПРИКЛАД: Побудувати дійсну величину ребер піраміди $SABC$.



$$S'_1A'_1 = S_1A_1; S'_1B'_1 = S_1B_1;$$

$$S'_1C'_1 = S_1C_1$$

$S'_2B'_1, S'_2A'_1, S'_2C'_1$ – дійсні величини ребер.

$M \in SA, S'_2M'_2$ – дійсна величина відрізка SM .

7. Поверхні

Способи утворення поверхонь на кресленні

Поверхню зручно розглядати як сукупність послідовних положень певної лінії (твірної), що переміщується в просторі за визначеним законом. Закон переміщення твірної доцільно задавати у вигляді сімейства ліній (напрямні), по

яких переміщуються твірні (рис. 31). Описаний спосіб утворення поверхні називається кінематичним.

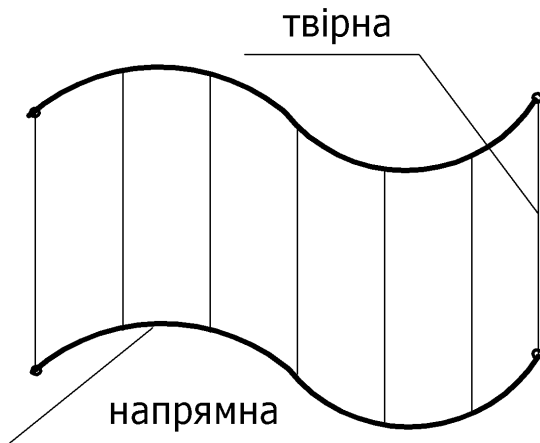


Рис. 31

При кінематичному способі утворення поверхонь їх зручно задавати визначником. Визначником поверхні називають сукупність умов, необхідних і достатніх для задання поверхні. Визначник складається з двох частин: геометричної та алгоритмічної.

Наприклад, для задання циліндра обертання потрібні геометрична (вісь циліндра i та одна твірна AB (рис. 32) і алгоритмічна (вказівка на те, що твірна обертається навколо осі) частини.

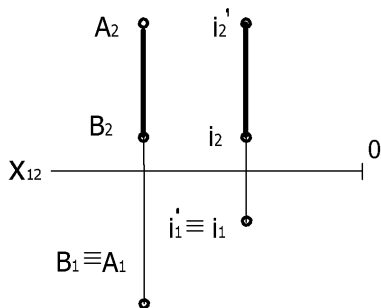


Рис. 32

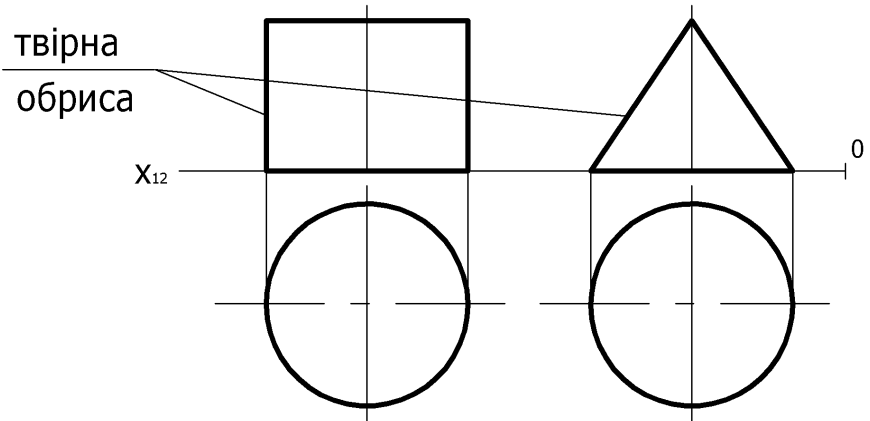


Рис. 33

Крім того, поверхня може бути задана на кресленні обрисом (рис. 33). Геометричні фігури на рис. 33 мають лише геометричну частину. Поверхню вважають заданою в тривимірному просторі, якщо відносно будь-якої точки цього простору можна сказати, належить вона цій поверхні чи ні.

За формою твірної поверхні поділяються на лінійчаті (твірна пряма лінія) та нелінійчаті (твірна крива лінія).

Лінійчаті – призматичні, пірамідальні, циліндричні, конічні, торси, гвинтові та ін.

Нелінійчаті – поверхні обертання, поверхні паралельного перенесення та інші.

У залежності від того, чи можна сумістити відсік поверхні з площиною без розривів і складок, поверхні поділяються на розгортні та нерозгортні.

Перетин багатогранної поверхні площиною

При перетинанні багатогранної поверхні проєкціювальною площиною у перерізі буде багатокутник, вершини якого знаходяться на ребрах, а сторони – лінії перетину його граней із січною площиною. Одна з проєкцій перетину буде збігатися зі слідом січної площини.

ПРИКЛАД: Побудувати проєкції лінії перетину трикутної призми фронтально-проєкціювальною площиною P (рис. 34). Побудувати натуральну величину фігури перерізу.

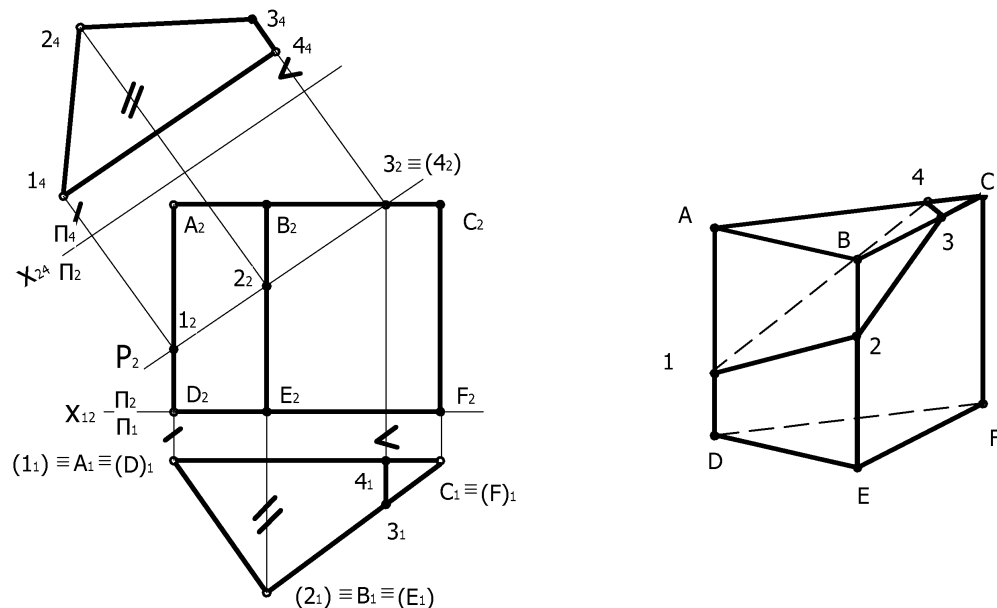


Рис. 34

У перерізі трикутної призми такою площиною буде чотирикутник, тому що січна площина перетинає верхню основу. Фронтальна проєкція фігури перерізу збігається зі слідом січної площини, вершини чотирикутника будуть знаходитися на ребрах .

$$1_2 2_2 3_2 4_2 \subset P_2; \quad 1 \in AD; \quad 2 \in BE; \quad 3 \in BC; \quad 4 \in AC.$$

Горизонтальні проекції $1_1, 2_1$ збігаються з горизонтальними проекціями відповідних ребер, а проекції 3_1 та 4_1 дістанемо, якщо проведемо вертикальні лінії зв'язку до перетину з горизонтальною проекцією верхньої основи призми.

Отже, $1_1 \equiv A_1 \equiv D_1$; $2_1 \equiv B_1 \equiv E_1$; $3_1 \in B_1C_1$; $4_1 \in A_1C_1$.

Натуральна величина перерізу визначається методом заміни площин проекцій.

Проводимо нову площину Π_4 , паралельно площині P . Вісь X_{24} проводимо паралельно P_2 . З фронтальних проекцій точок $1_2, 2_2, 3_2, 4_2$ опускаємо перпендикуляр на нову вісь і відкладаємо на них відрізки, що дорівнюють відстані від точок $1_1, 2_1, 3_1, 4_1$ до осі X_{12} .

ПРИКЛАД: Побудувати проекції лінії перетину піраміди фронтально-проекціовальною площиною P . Побудувати натуральну величину фігури перерізу (рис. 35).

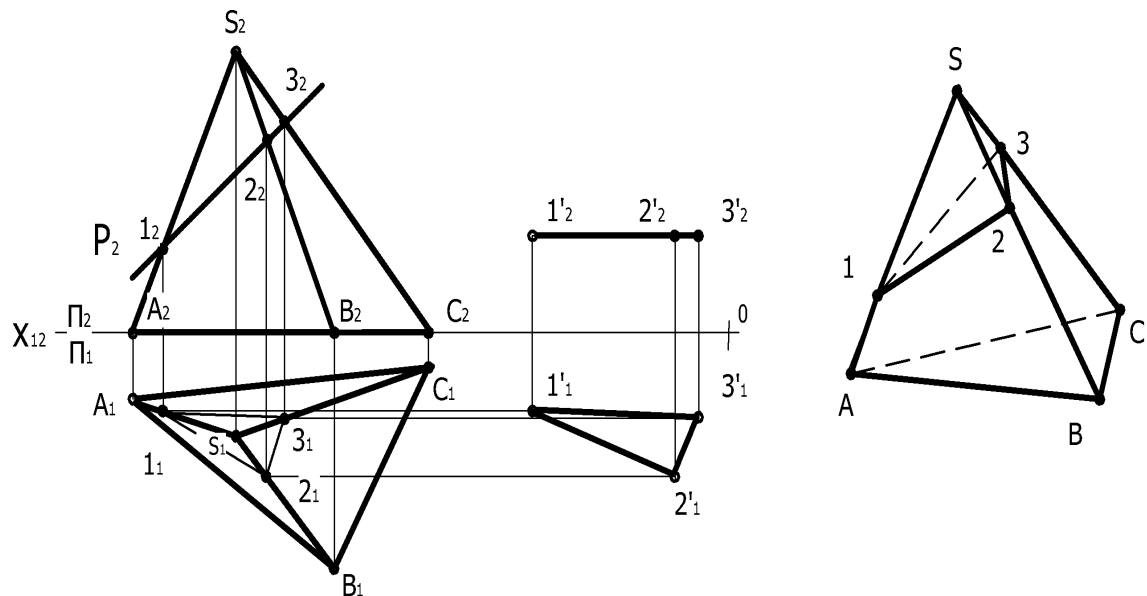


Рис. 35

У перетині трикутної піраміди такою площиною буде трикутник, фронтальна проекція якого збігається зі слідом січної площини $1_2 2_2 3_2 \subset P_2$.

Вершини трикутника будуть знаходитися на ребрах:

$$1 \in SA, \quad 2 \in SB, \quad 3 \in SC.$$

Отже $1_1 \in S_1A_1$, $2_1 \in S_1B_1$, $3_1 \in S_1C_1$.

Натуральну величину перерізу знаходимо методом плоско-паралельного переміщення. Поворотом навколо “невиявленої” фронтально-проекціовальної осі встановлюємо трикутник в горизонтальне положення $1'2'2'3'2'=1_22_23_2 \parallel X_{12}$. На площині Π_1 трикутник зобразиться в натуральну величину.

Перетин циліндричної поверхні площиною

При перетинанні прямого кругового циліндра площиною утворюються наступні лінії:

- коло – площина, перпендикулярна осі циліндра (P).
- прямокутник – січна площина, перпендикулярна основі (Ф, Т).
- еліпс – площина, що нахилена до осі циліндра (R).

Неповний еліпс буде, якщо площина перетинає основу циліндра (N, Q).

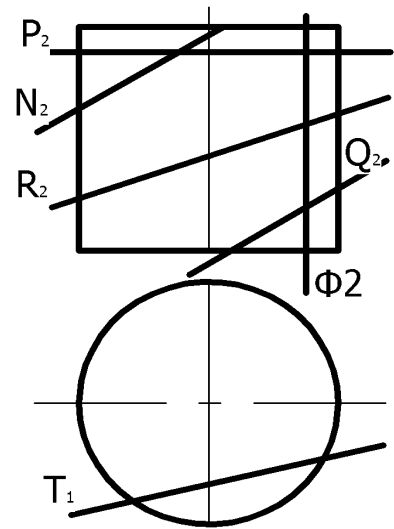


Рис. 36

ПРИКЛАД: Побудувати проекції лінії перетину циліндра проекціовальною площиною. Побудувати натуральний вид перерізу (Рис. 37).

У перетині циліндра такою площиною буде еліпс. Фронтальна проекція перетину збігається зі слідом площини.

$1_23_25_24_22_2 \subset P_2$ тому, що площина проекціовальна.

Горизонтальна проекція перерізу збігається з основою циліндра, тому що циліндр є горизонтально-проекціовальною поверхнею. Горизонтальна проекція циліндра має збиральну властивість. Натуральний вид перерізу визначимо методом заміни площин проекцій.

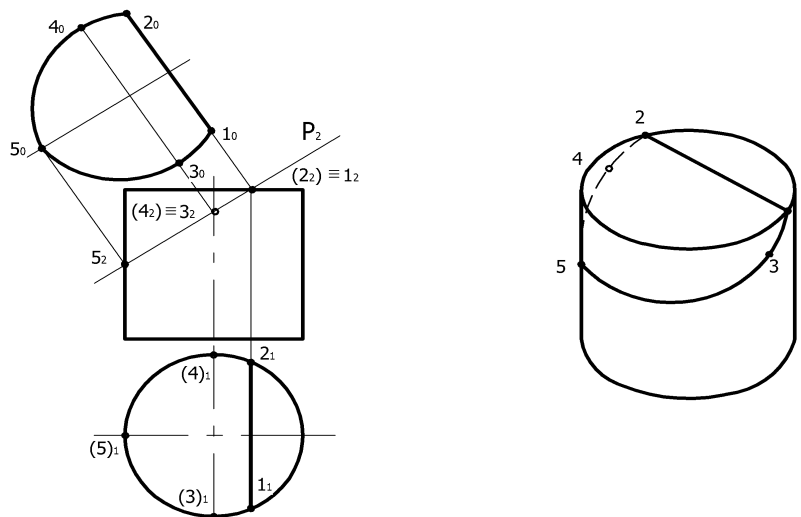


Рис. 37

Перетин конічної поверхні площиною

Конічні перерізи обмежені або кривою лінією другого порядку (коло, еліпс, гіпербола, парабола), або прямими лініями. При перетинанні прямого кругового конуса проекціювальними площинами утворюються наступні лінії (рис. 38):

- а) коло – січна площина, перпендикулярна до осі конуса (Q);
- б) трикутник – січна площина проходить через вершину конуса (P);
- в) еліпс – січна площина перетинає всі твірні конуса і нахилена до його осі (T);
- г) парабола – січна площина, паралельна одній з твірних конуса (R);
- д) гіпербола – січна площина, паралельна двом твірним (Φ).

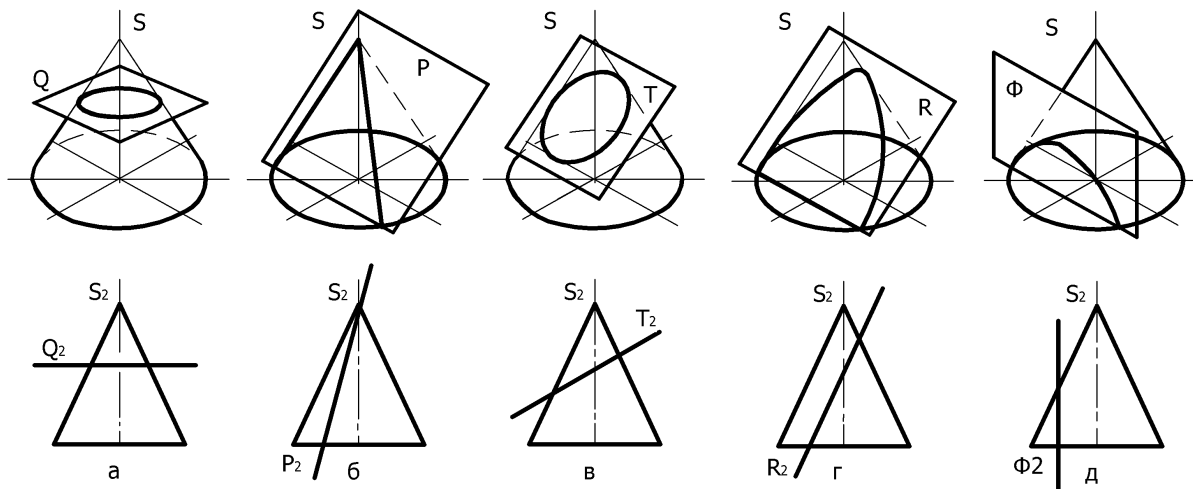


Рис. 38

ПРИКЛАД: Побудувати проєкції перерізу прямого кругового конуса проєкціювальною площиною P (рис. 39).

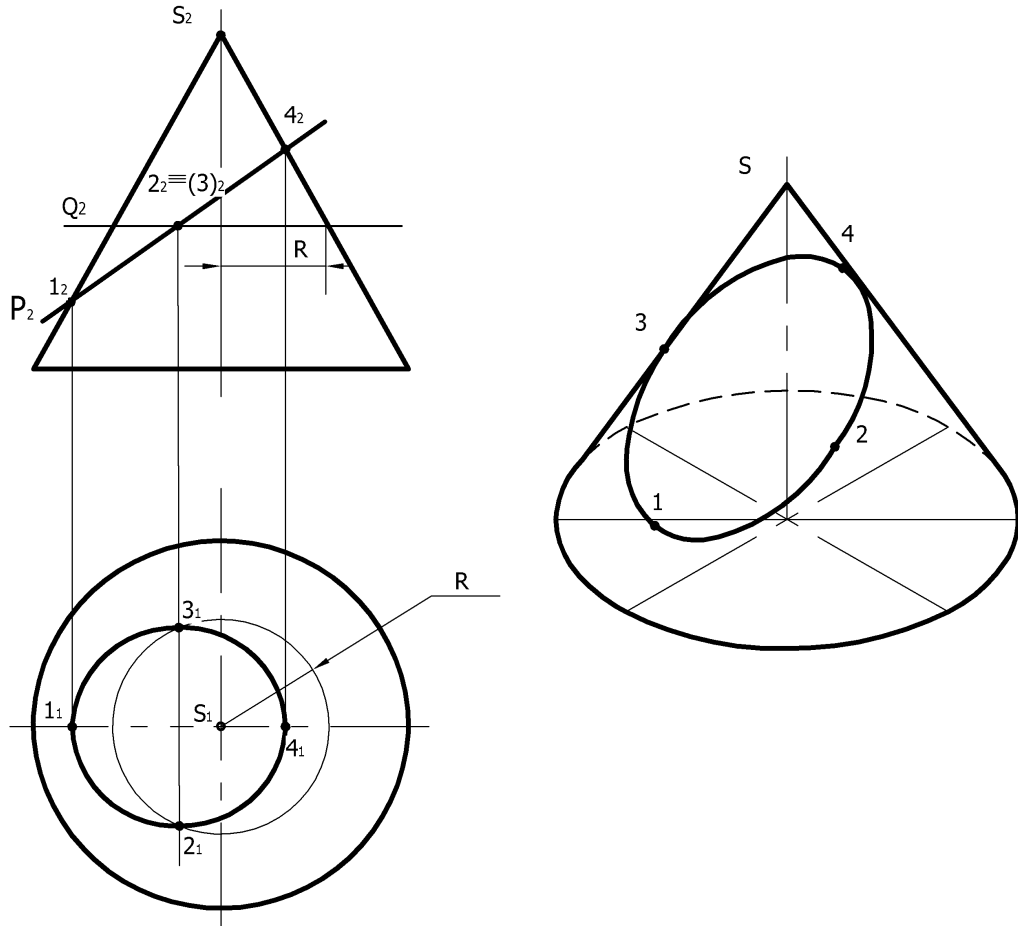


Рис. 39

Оскільки площина P нахилена до осі конуса під кутом, більшим за кут нахилу твірної, і перетинає всі його твірні, то фігурою перерізу буде повний еліпс.

Фронтальні проєкції $1_2, 2_2, \dots$ точок еліптичного перерізу збігаються з фронтальним слідом P_2 . Відрізок $1_2 4_2$ буде фронтальною проєкцією фігури перерізу. $1_2 4_2$ – є велика вісь еліпса. Мала вісь проєкціюється на площину Π_2 в точки $2_2 (3_2)$, яка ділить на дві рівні частини відрізок $1_2 4_2$. Щоб знайти горизонтальну проєкцію малої осі (і одночасно її натуральну величину), проводять через точки $2_2 (3_2)$ допоміжну площину Q , що перетинає бічну поверхню конуса по колу радіусом R .

Аналогічно, за допомогою ряду допоміжних площин можна знайти довільну кількість точок еліпса.

Перетин сферичної поверхні площиною

Сферичні перерізи обмежені завжди колом, що проєкціюється у вигляді:

- кола – якщо площина паралельна площині проєкцій;
- прямої – якщо площина перпендикулярна площині проєкцій;
- еліпса – якщо площина нахилена до площини проєкцій.

ПРИКЛАД: Побудувати проєкції перерізу сфери проєкціювальною площиною (рис. 40).

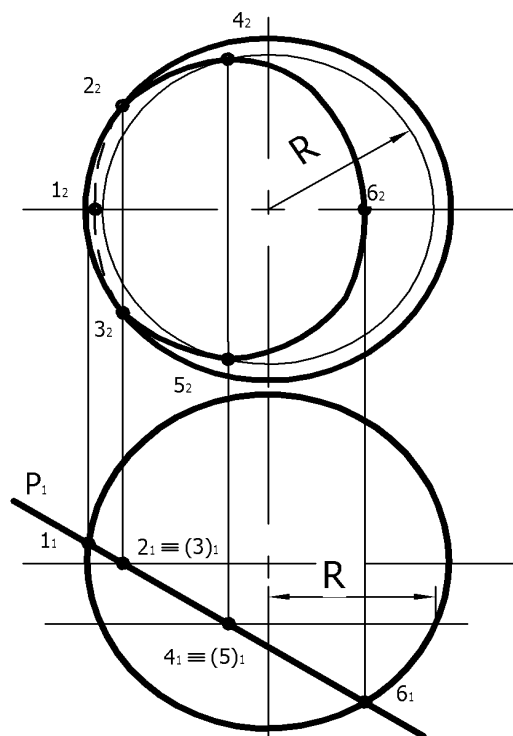


Рис. 40

У результаті перетину утворюється коло, яке проєкціюється на фронтальну площину проєкцій як еліпс.

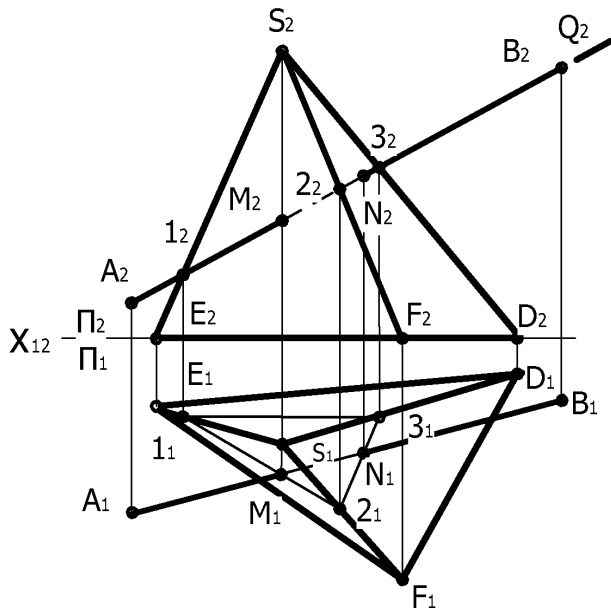
Точки 1 і 6 належать екватору сфери, тому визначаються за вертикальною відповідністю. Точки на фронтальному меридіані 2 і 3 є точками, що відділяють на полі Π_2 видиму частину еліпса від невидимої. Кінці великої осі еліпса (4, 5) лежать на вертикальній прямій, що проходить через середину малої осі $1_2 6_2$. За допомогою фронталі знаходять проєкції $4_2, 5_2$.

Перетин прямої з поверхнею

Для побудови точок перетину необхідно виконати наступні дії:

- через пряму провести допоміжну площину;
- знайти лінію перетину поверхні з допоміжною площиною;
- визначити точки перетину заданої прямої з побудованою лінією.

ПРИКЛАД: Знайти точки перетину трикутної піраміди з прямою АВ.



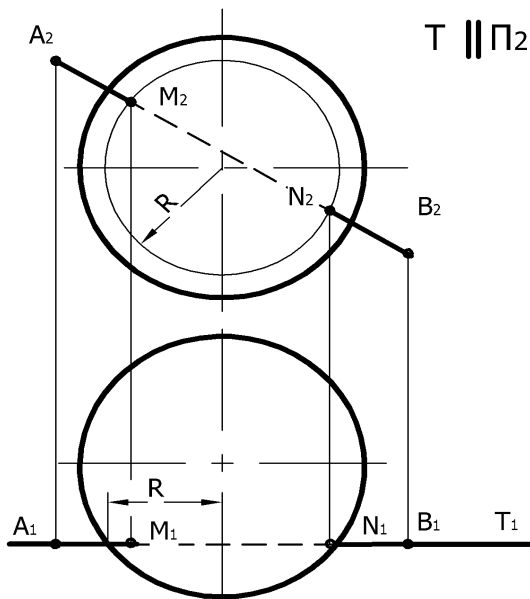
Через пряму проводимо фронтально-проекціовальну площину Q.

Будуємо проєкції лінії перетину піраміди з площиною Q (123).

Горизонтальна проєкція перерізу (1₁2₁3₁) перетинає горизонтальну проєкцію прямої (A₁B₁) в т. M₁ і N₁. Фронтальні проєкції цих точок визначають за допомогою відповідності M ∈ AB; N ∈ AB.

Видимість прямої визначається за допомогою конкуруючих точок.

ПРИКЛАД: Знайти точки перетину прямої АВ зі сферою.



Через пряму АВ проводимо фронтальну площину. У результаті перетину площини зі сферою утворюється коло радіуса R, яке проєціюється на фронтальну площину проєкцій в натуральну величину.

Фронтальні проєкції шуканих точок M₂ та N₂ будуть на перетині кола і фронтальної проєкції A₂B₂ прямої. Горизонтальні проєкції точок сполучають за вертикальною відповідністю.

Спосіб допоміжних січних поверхонь

При конструюванні складних форм машинобудівних деталей або інженерних конструкцій виникає необхідність у побудові ліній перетину простих геометричних фігур, що утворюють ці складні форми.

Лінію, спільну для двох поверхонь, що перетинаються, називають лінією перетину (переходу). Характер лінії перетину залежить від того, які геометричні тіла або поверхні перетинаються. У залежності від положення поверхонь ліній взаємного перетину може бути дві (наскрізне проникнення), чи одна (врізання).

Щоб визначити проекції цієї лінії треба знайти проекції точок, спільних для поверхонь, що розглядаються.

Алгоритм побудови спільних точок поверхонь (рис. 41):

- задані Г.Ф. перетинають третьою допоміжною поверхнею, яку називають посередником;
- будуються лінії перетину допоміжної поверхні з кожною із заданих поверхонь;
- визначають точки (точку) перетину побудованих ліній, які є спільними точками заданих поверхонь.

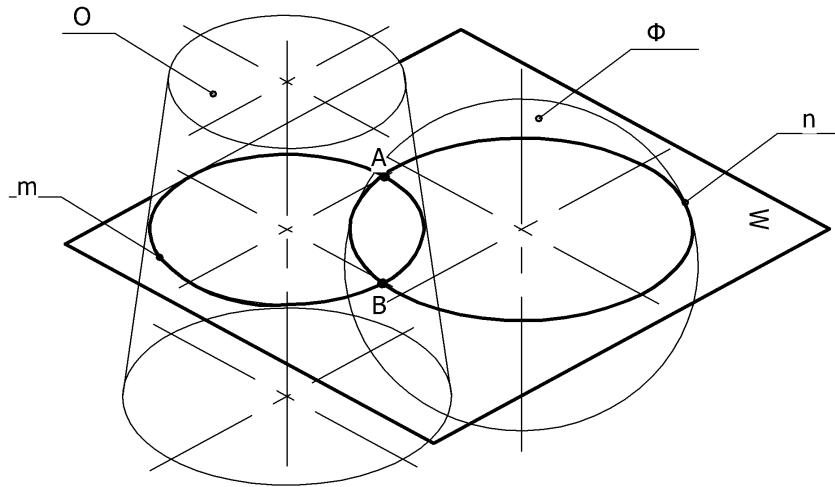
Виконавши таку операцію кілька разів, дістають потрібну кількість точок для проведення лінії взаємного перетину.

Під допоміжною січною поверхнею мають на увазі будь-яку поверхню, у тому числі і площину. Січну допоміжну поверхню вибирають таку, котра перетинала б задані Г.Ф. по зручних для побудови лініях (пряма, коло).

Це можуть бути:

- площини (рівня, проекціювальні, загального положення);
- поверхні (сферичні, циліндричні, конічні).

Побудову проекцій лінії перетину починають з визначення опорних точок, до яких відносяться точки видимості, точки дотику проекцій лінії перетину до обрисів проекцій поверхонь і екстремальні точки (ближня, дальня, ліва, права, вища, нижча). Потім будують проміжні точки.



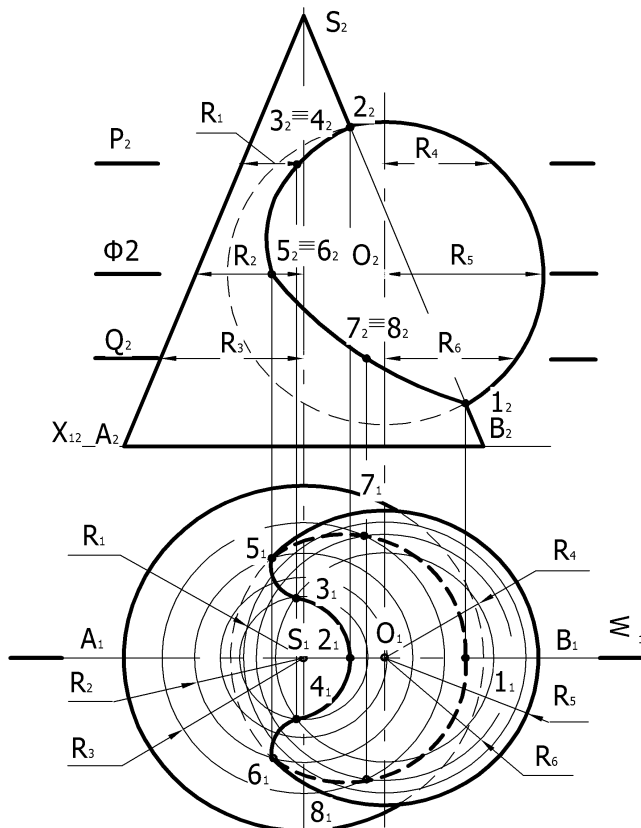
$W \cap \theta = m$; $W \cap \Phi = n$; $m \cap n = A, B$ – спільні точки

Рис. 41

Побудова ліній перетину поверхонь за допомогою січних площин

Застосовується у випадках взаємного перетину багатогранників, лінійчатих поверхонь з багатогранниками і поверхонь обертання, що мають паралельні осі.

ПРИКЛАД: Побудувати лінію перетину конуса обертання та сфери.



Алгоритм рішення:

1. Точки лінії перетину знаходимо за допомогою горизонтальних допоміжних січних площин, що перетинають конус і сферу по колах.
2. Найвищу 2 і найнижчу 1 точки визначаємо за допомогою фронтальної площини Σ , яка проходить через вершину конуса S . Площина Σ перетне конус по трикутнику (ABS), а сферу по фронтальному меридіану. На перетині цих ліній на полі Π_2 знаходимо 2_2 і 1_2 . Горизонтальні проекції точок 1_1 , 2_1 знаходимо за відповідністю точок поверхні конуса.
3. Точки обмеження видимості (5, 6) лінії перетину на Π_1 визначають за допомогою горизонтальної січної площини Φ . Ця площина перетне конус по колу радіусом R_2 , сферу по екватору (R_5). На перетині цих ліній на площині Π_1 знаходимо горизонтальні проекції точок 5_1 , 6_1 . Фронтальні проекції точок 5_2 , 6_2 знаходять на Φ_2 .
4. Проміжні точки (3,4,7,8) знаходимо за допомогою ще кількох горизонтальних січних площин (P , Q).
5. Сполучаючи знайдені точки, проводять криву з урахуванням видимості. Ділянка кривої буде видимою лише при перетині обох видимих ділянок поверхонь.

Спосіб сферичних посередників

При перетині поверхонь обертання, які мають загальну площину симетрії, для побудови лінії перетину доцільно застосовувати сімейство концентричних сфер. Якщо перетинаються сферичні поверхні з іншою поверхнею обертання, вісь якої проходить через центр сфери і паралельна до однієї з площин проекцій, то проекція лінії перетину на одній площині проекцій – пряма, а на іншій – коло чи еліпс. На рис. 42 зображено перетин тіл обертання, що мають спільну вісь: сфери і циліндра (рис. 42 а), сфери і конуса (рис. 42 б). У двох випадках лінія перетину є коло, яке на площину, паралельну осі обертання,

проекціюється у вигляді прямої, перпендикулярної до осі. Ця властивість і лежить в основі способу допоміжних сфер.

Умови застосування сферичних посередників:

- обидві задані поверхні повинні бути поверхнями обертання;
- осі поверхонь повинні перетинатися між собою;
- осі поверхонь повинні бути паралельні одній з площин проєкцій.

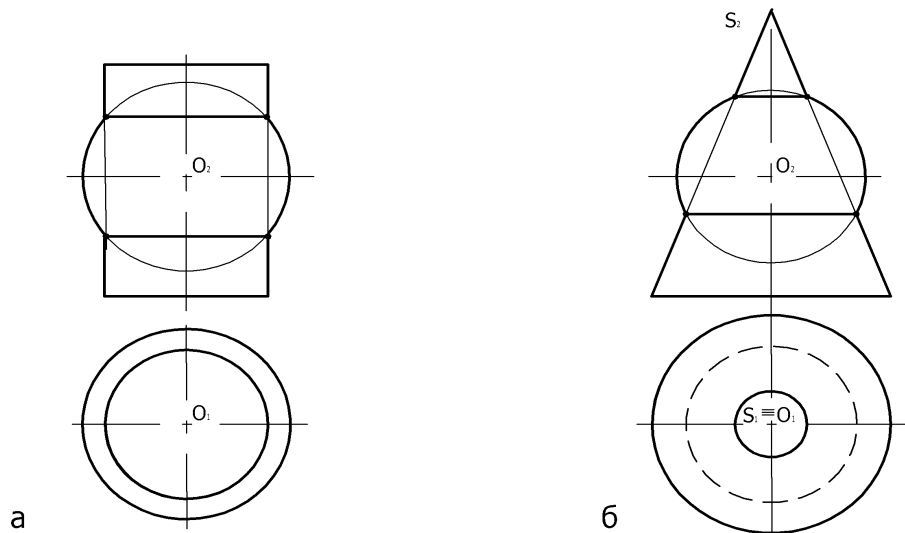


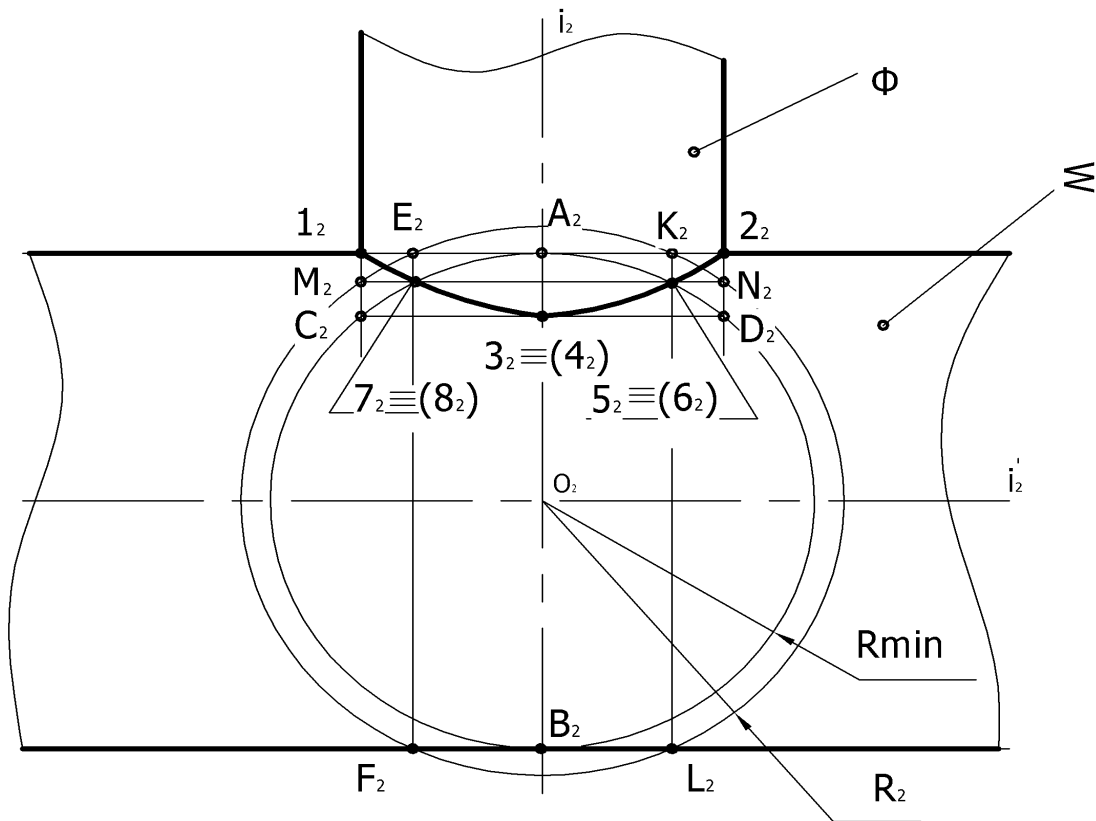
Рис. 42

Алгоритм побудови лінії перетину за допомогою концентричних сфер:

- з точки перетину осей заданих поверхонь як із центра проводять допоміжні сфери;
- знаходять кола, по яких допоміжні сфери перетинаються окремо з кожною із заданих поверхонь;
- знаходять спільні точки перетину утворених кіл.

ПРИКЛАД. Побудувати лінію перетину двох циліндрів.

У даному випадку всі умови виконуються. Обидві поверхні обертання. Осі поверхонь перетинаються та паралельні фронтальній площині проєкцій.



- Дві точки (1 і 2) знаходять без побудови, бо вони лежать на перетині твірної горизонтального циліндра з обрисними твірними вертикального циліндра.
- Точку O_2 перетину осей беруть за центр і будують допоміжну сферу R_{min} дотичну до циліндра більшого діаметра (Σ). Ця сфера перетинає циліндр по колу, фронтальна проекція якого є відрізок A_2B_2 , поверхню меншого циліндра (Φ) – по колу, що проєкціюється у відрізок C_2D_2 . Перетин проєкцій A_2B_2 і C_2D_2 ліній дає проєкції найнижчих точок $3_2, 4_2$ лінії перетину.
- Щоб знайти проміжні точки, будують сферу з центра O_2 довільним радіусом, але не більше, ніж (O_21_2) і не менше, ніж R_{min} . Ця сфера перетинає циліндр Φ по колу, проєкція якого є відрізок M_2N_2 , а циліндр Σ – по двох колах, що спроекціюються у відрізки E_2F_2 і K_2L_2 . Перетин цих ліній дає точки $(5_2 \equiv 6_2)$ і $(7_2 \equiv 8_2)$. Точки сполучають плавною кривою.

Розгортка поверхонь

У різних галузях техніки при виготовленні виробів з листового матеріалу часто мають справу з розгортками поверхонь.

Розгорткою поверхні називається плоска фігура, утворена сполученням усіх точок і ліній поверхні з площиною без розривів і складок.

Усі поверхні поділяються на розгортні і нерозгортні. Всі багатогранні поверхні розгортні. Кривими поверхнями, що розгортаються, можуть бути тільки лінійчаті, у яких суміжні твірні паралельні чи перетинаються (циліндричні, конічні, торсові).

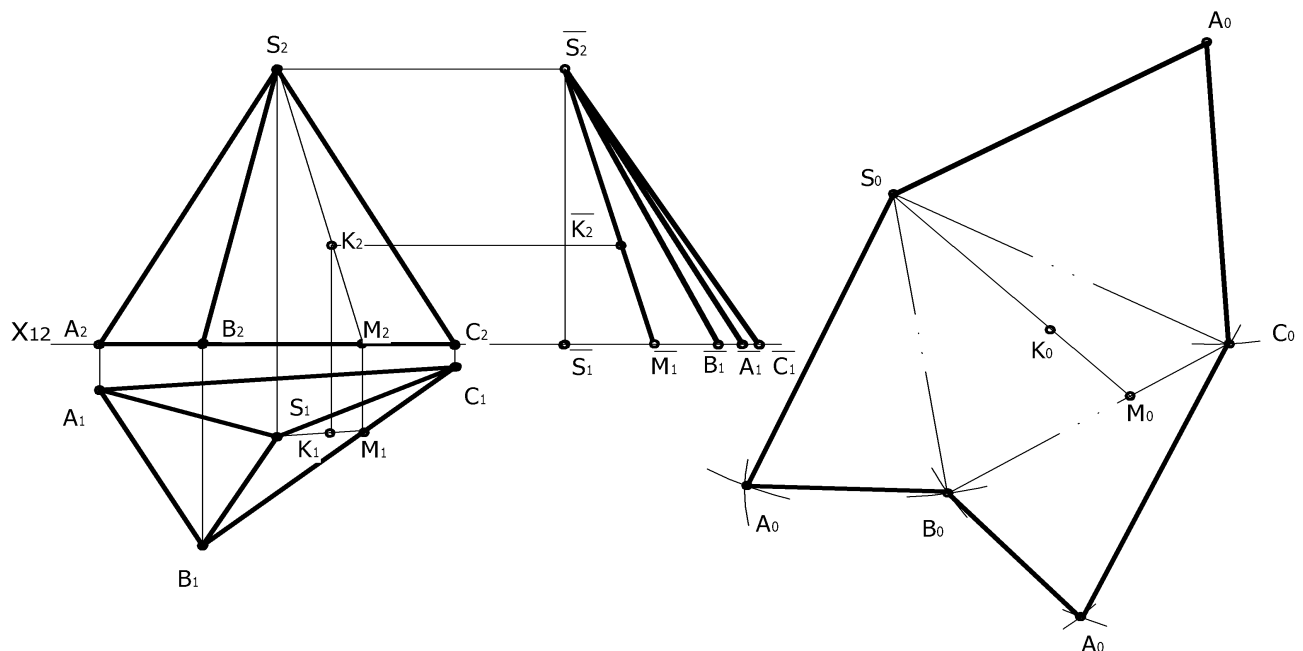
Всі інші поверхні розгортаються приблизно. Поверхня, що не розгортається, апроксимується (замінюється) багатогранною поверхнею.

Розгортки будують як сукупність натуральних величин усіх її граней. Найбільш розповсюджені методи побудови розгортки: суміщення, трикутників, розкочування, триангуляції.

Розгортка поверхні піраміди

ПРИКЛАД: Побудувати розгортку поверхні піраміди з нанесенням на неї точки K , що належить грані піраміди.

Будуємо розгортку неправильної трикутної піраміди, основа якої лежить на горизонтальній площині проєкцій. Розгортку виконуємо розрізанням поверхні піраміди вздовж бічного ребра та суміщенням трьох бічних граней піраміди з площиною її основи.



Розгортка трикутної піраміди складається з трьох трикутників бічних граней і трикутника основи.

Трикутники будують за натуральними величинами ребер піраміди.

План розв'язання

1. Методом плоско-паралельного переміщення визначаємо натуральні величини ребер SA, SB, SC

$$S_1A_1 = S_1A_1; S_2A_1 = |SA|; S_2B_1 = |SB|; S_2C_1 = |SC|; S_2M_1 = |SM|.$$

2. Будуємо натуральні величини граней $S_0A_0B_0$; $S_0B_0C_0$; $S_0A_0C_0$ і основи $A_0B_0C_0$ за трьома відомими сторонами.
3. Наносимо точку K на розгортку (виходячи з її приналежності відповідній прямій).

$$B_0M_0 = B_1M_1; S_0K_0 = S_2K_2.$$

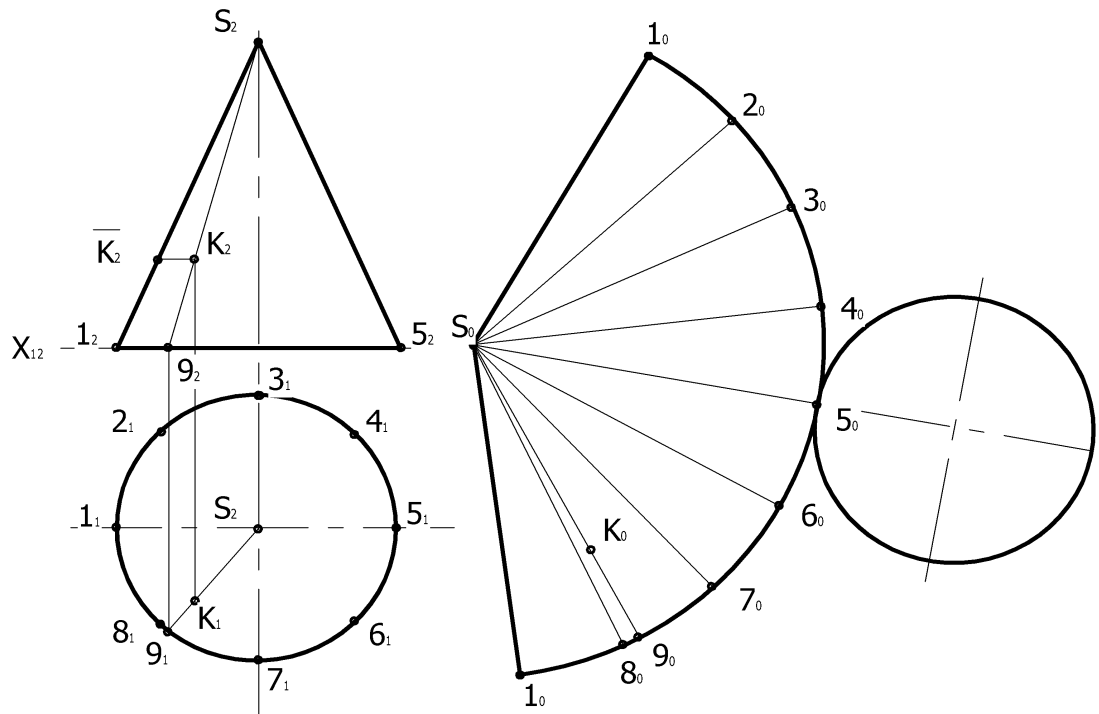
Розгортка поверхні прямого кругового конуса

ПРИКЛАД: Побудувати розгортку поверхні прямого кругового конуса з нанесенням на неї точки K, що належить бічній поверхні конуса.

Для побудови розгортки конічної поверхні коло її основи розбивають на 8 рівних частин, тобто в конус вписують восьмигранну піраміду.

Розгортку бокової поверхні конуса будують як сукупність трикутних граней піраміди. Всі твірні конуса рівні між собою. Твірні S_1 і S_5 – фронталі, тому $S_2I_2 = S_25_2$ – натуральна величина твірних.

Щоб знайти на розгортці точку K, треба спочатку перемістити її фронтальну проекцію (K_2) паралельно осі X_{12} до положення K_2 . Це відповідає обертанню твірних до положення, паралельного фронтальній площині проєкцій навколо осі, що проходить через вершину конуса, перпендикулярно до площини Π_1 . Утворений після обертання натуральний відрізок твірною відкладають на розгортці, тобто $S_0K_0 = S_2K_2$.



8. КОНТРОЛЬНА РОБОТА

Контрольна робота складається з трьох завдань.

Завдання 1.

Побудувати три проекції та наочне зображення (фронтальну діаметрію) похилої фігури за заданими координатами (таблиця 1). Визначити видимість ребер на всіх проекціях. На всіх зображеннях накреслити горизонтальну та фронтальну прямі, які належать одній із граней фігури. Визначити натуральну величину одного з ребер фігури методом заміни площин проекцій.

Завдання 2.

Побудувати три проекції заданих поверхонь та лінію їх взаємного перетину згідно з варіантом.

Завдання 3.

Побудувати розгортку однієї фігури згідно з варіантом.

Таблиця 1

№ Варіанту	A			B			C			D			E			S вершина			Фігура	Позначення
	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z		
1	95	85	70	68	70	30	40	54	50							125	10	45	Піраміда	S ABC
2	38	90	50	54	90	64	32	90	94	12	90	54	88	10	14				Призма	ABCD EFKN
3	130	36	30	106	74	56	85	16	78							33	60	5	Піраміда	S ABC
4	38	0	10	60	0	30	32	0	46	18	0	28	132	76	80				Призма	ABCD EFKN
5	125	15	45	111	40	14	100	60	75							44	6	25	Піраміда	S ABC
6	45	16	0	30	7	0	10	40	0				93	93	93				Призма	ABC EFK
7	80	20	0	30	32	0	46	74	0	95	60	0				125	90	80	Піраміда	S ABCD
8	85	0	5	105	0	35	120	0	15				10	52	55				Призма	ABC EFK
9	65	50	0	50	20	0	30	30	0	5	70	0				115	90	70	Піраміда	S ABCD
10	40	0	90	5	0	80	20	0	56				120	70	40				Призма	ABC EFK
11	120	50	10	90	25	10	70	20	10	100	70	10				20	70	80	Піраміда	S ABCD
12	18	24	0	35	52	0	58	15	0				125	54	75				Призма	ABC EFK
13	130	0	25	100	0	60	75	0	50							32	74	5	Піраміда	S ABC
14	100	26	0	62	17	0	85	60	0				5	45	87				Призма	ABC EFK
15	60	80	60	15	44	50	35	60	25							110	15	10	Піраміда	S ABC
16	95	14	0	78	60	0	53	30	0				47	53	80				Призма	ABC EFK
17	10	40	0	40	20	0	60	58	0	30	78	0				110	8	85	Піраміда	S ABCD
18	48	5	0	32	28	0	12	18	0				96	82	85				Призма	ABC EFK

Зразок виконання завдання 1.

Дано: координати т. $A(32;10;15)$, $B(47;10;33)$, $C(28;10;65)$, $D(11;10;28)$, $E(102;72;55)$. Побудувати три проекції та наочне зображення похилої призми $ABCD EFKN$. На всіх зображеннях накреслити горизонтальну та фронтальну прямі, які належать одній із граней фігури. Визначити натуральну величину одного з ребер фігури методом заміни площин проекцій.

Алгоритм виконання:

1. Побудувати за координатами задані точки A, B, C, D, E .
2. Накреслити проекції основи $ABCD$, а також ребра AE .
3. Враховуючи, що бокові ребра призми паралельні, накреслити проекції відрізків BF, CK, DN паралельно проекціям AE (довжина проекцій ребер дорівнює довжині відповідних проекцій AE).
4. Побудувати вісі фронтальної діаметрії. Коефіцієнти спотворення по осям $X, Z - 1$, по $Y - 0.5$. За координатами накреслити наочне зображення призми.
5. На грані $BFKC$ будуємо фронталь 12 ($t.1 \in BF, t.2 \in CK, 1_1 2_1 \parallel X_{12}$), фронтальну та профільну проекції будуємо по належності точок відповідним ребрам. Аналогічно будуємо горизонталь 23 ($t.2 \in CK, t.3 \in KF, 2_2 3_2 \parallel X_{12}$).
6. Побудувати натуральну величину ребра DN методом заміни площин проекцій (див. рис. 26).

Зразки виконання завдань 2,3.

Завдання 2.

Побудувати три проекції прямого кругового конуса та тригранної призми та лінію їх взаємного перетину.

Алгоритм виконання:

Лінію перетину будемо за допомогою методу січних площин.

Вибрати характерні точки $1_2, 2_2 \dots 12_2$.

1. Через вибрані точки провести горизонтальні січні площини Р, N, М.
2. Побудувати перерізи кожної із поверхонь січними площинами Р, N, М. В перерізі конуса будуть кола, радіуси яких вимірюються на фронтальній проекції. Перерізи призми площинами N, М-прямокутники, а площиною Р – ребро.
3. Знаходимо точки перетину побудованих перерізів.
4. Будемо лінію перетину, враховуючи видимість.

Завдання 3.

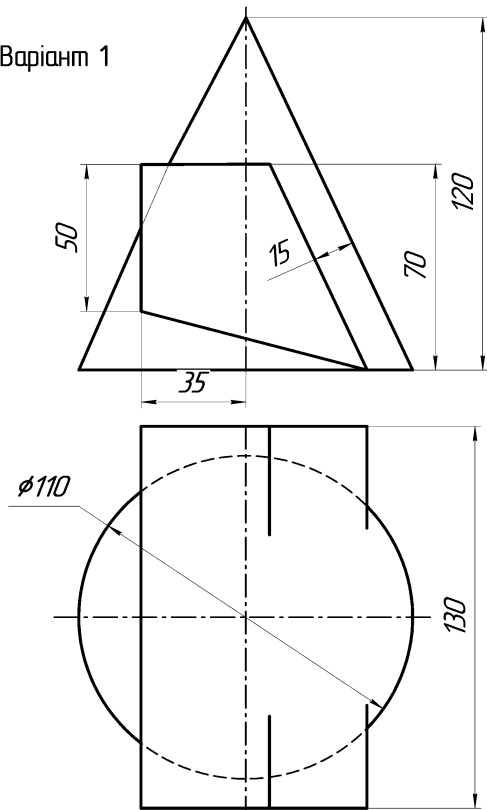
Побудувати розгортку поверхні конуса з нанесенням лінії перетину.

Алгоритм виконання:

Розгортку будемо згідно з розділом «Розгортка поверхонь». Для більш точного креслення основу конуса ділимо на 12 рівних частин. Лінію перетину на розгортці побудувати за зразком т.К.

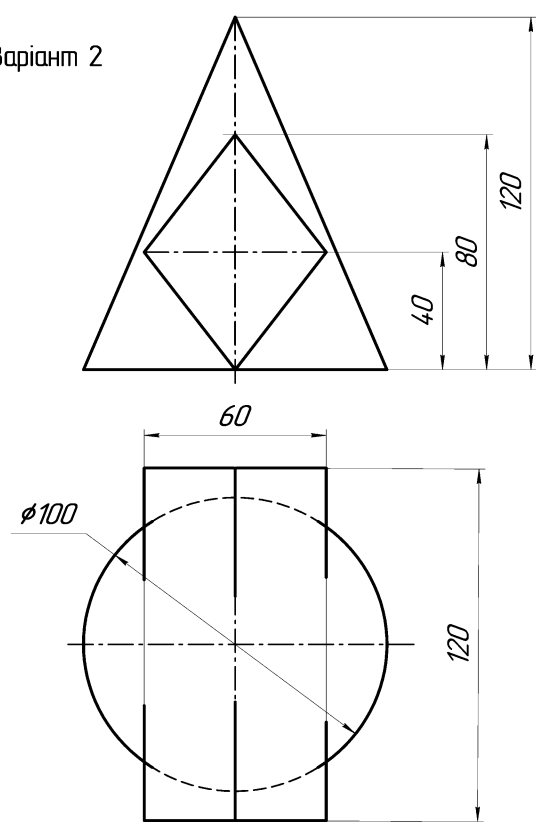
Варіанти другого та третього завдань контрольної роботи

Варіант 1



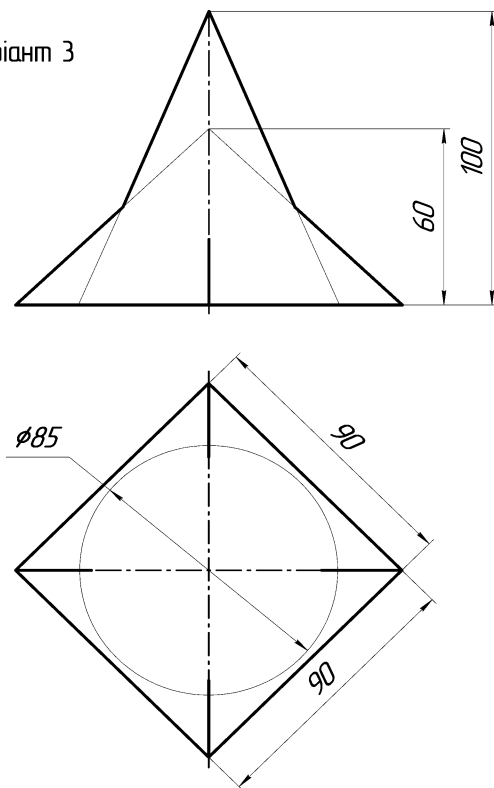
Розгортка поверхні конуса

Варіант 2



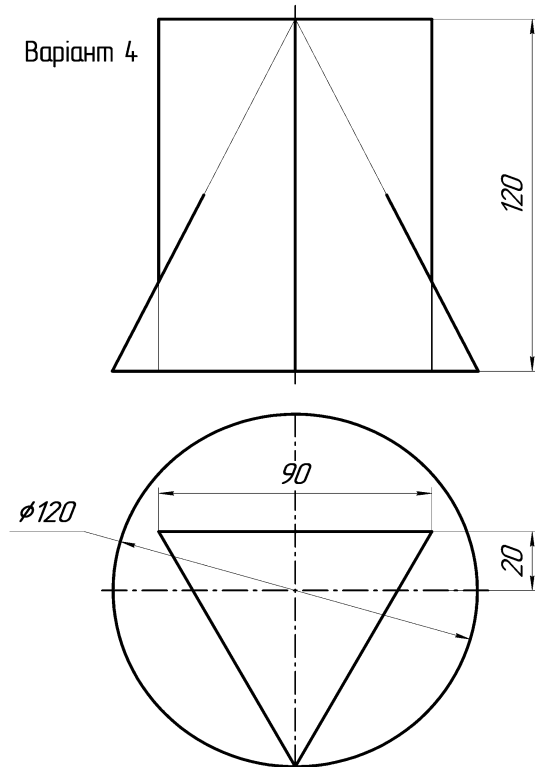
Розгортка поверхні конуса

Варіант 3



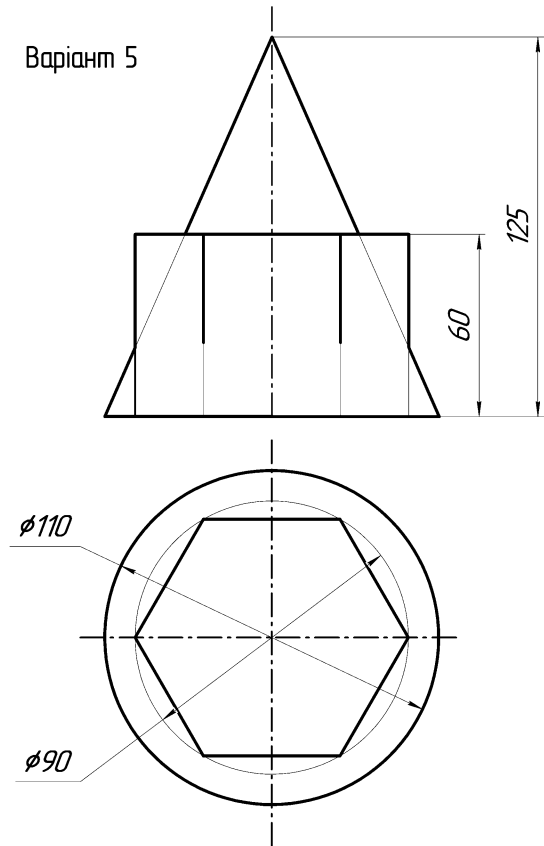
Розгортка поверхні піраміди

Варіант 4



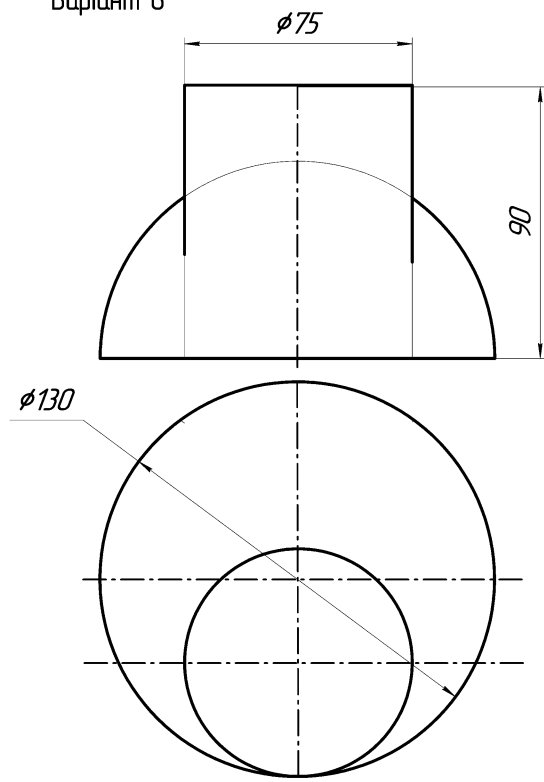
Розгортка поверхні призми

Варіант 5



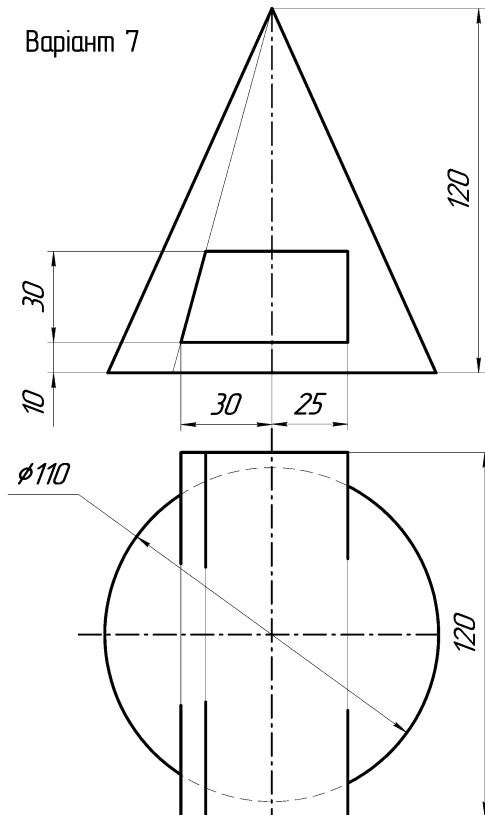
Розгортка поверхні конуса

Варіант 6



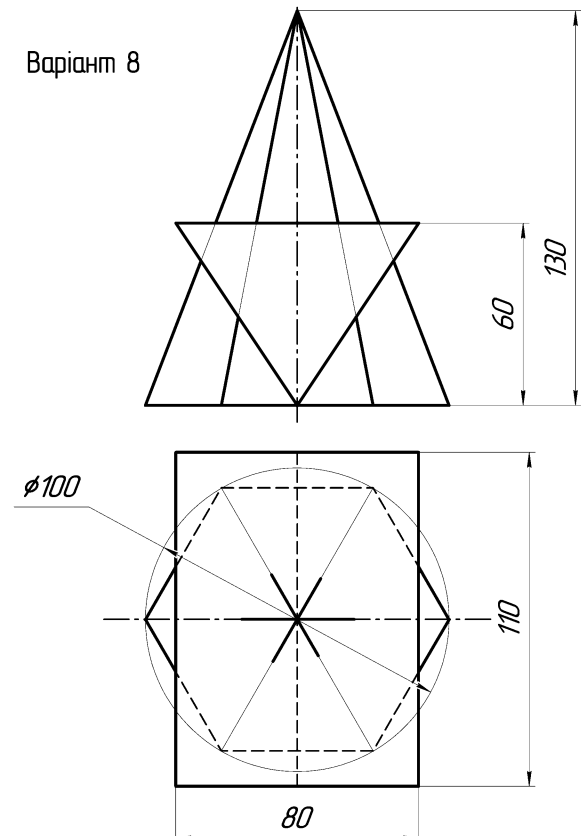
Розгортка поверхні циліндра

Варіант 7



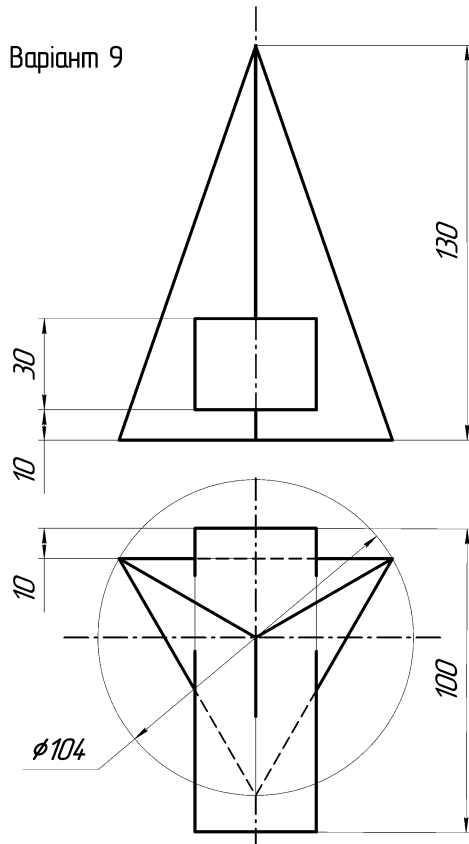
Розгортка поверхні конуса

Варіант 8



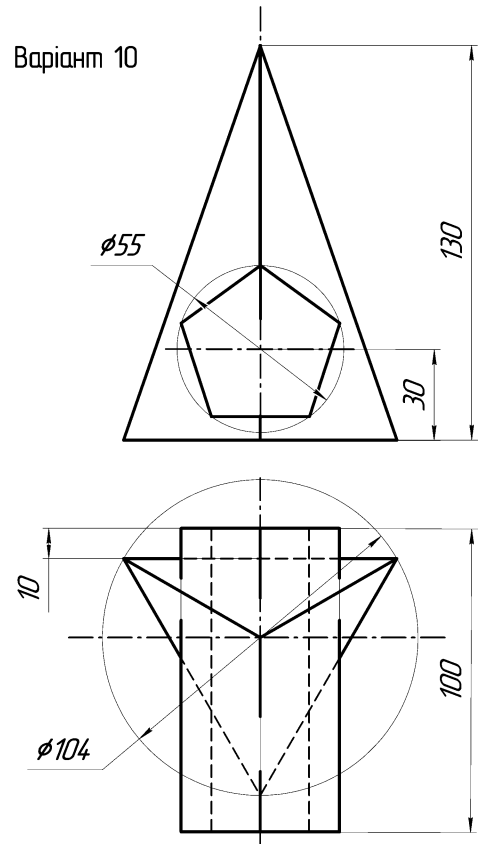
Розгортка поверхні піраміди

Варіант 9



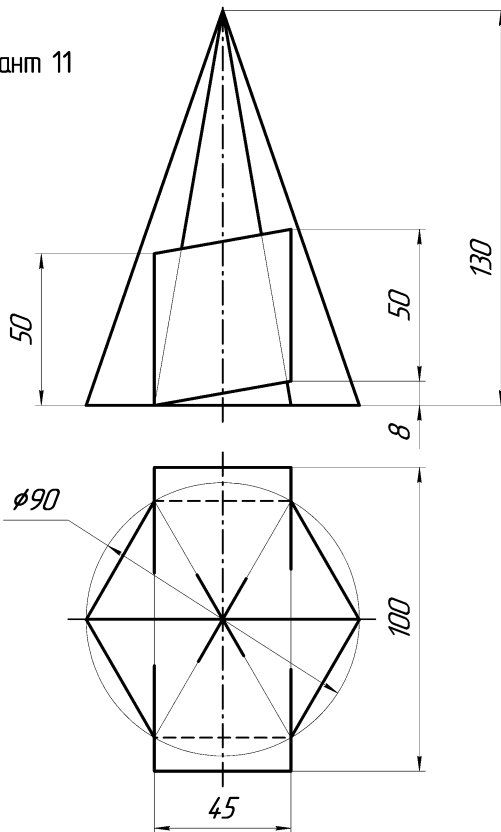
Розгортка поверхні піраміди

Варіант 10



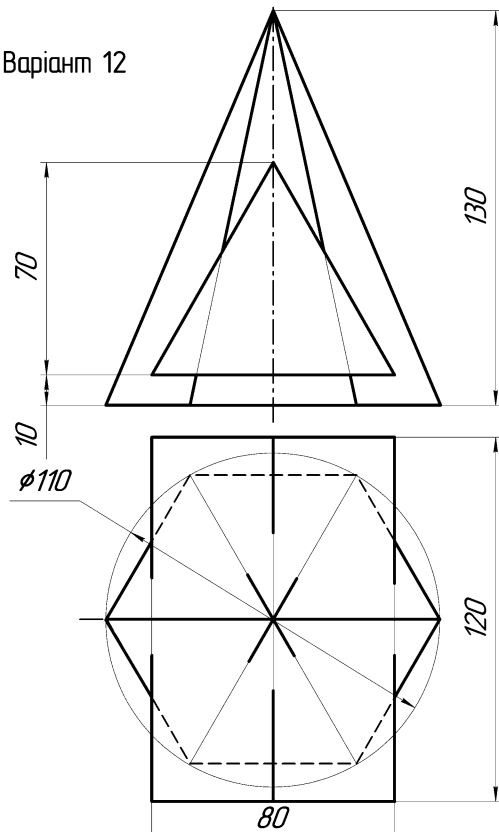
Розгортка поверхні піраміди

Варіант 11



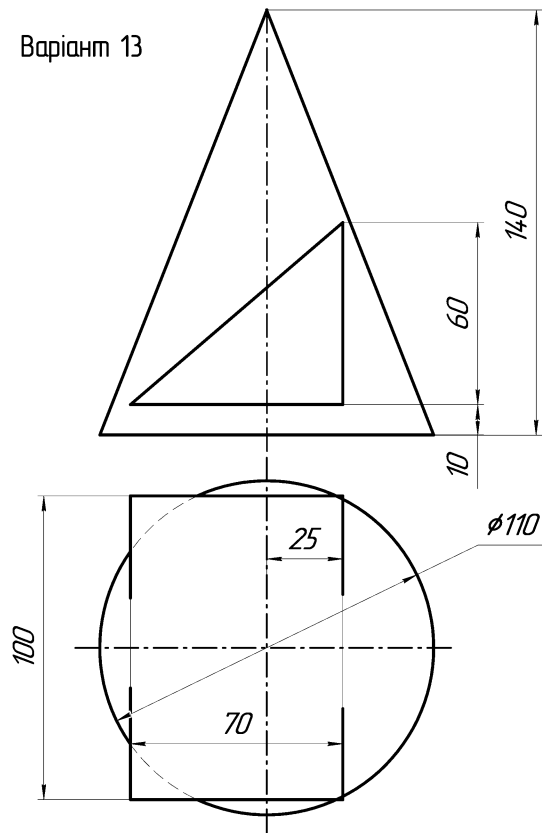
Розгортка поверхні піраміди

Варіант 12



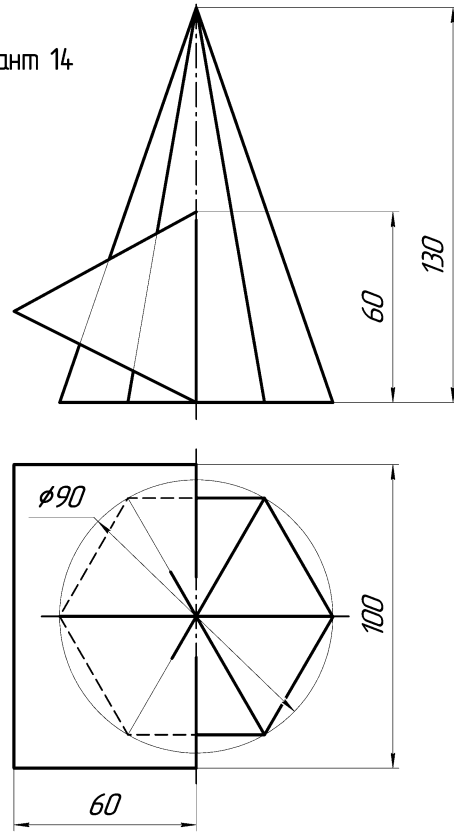
Розгортка поверхні піраміди

Варіант 13



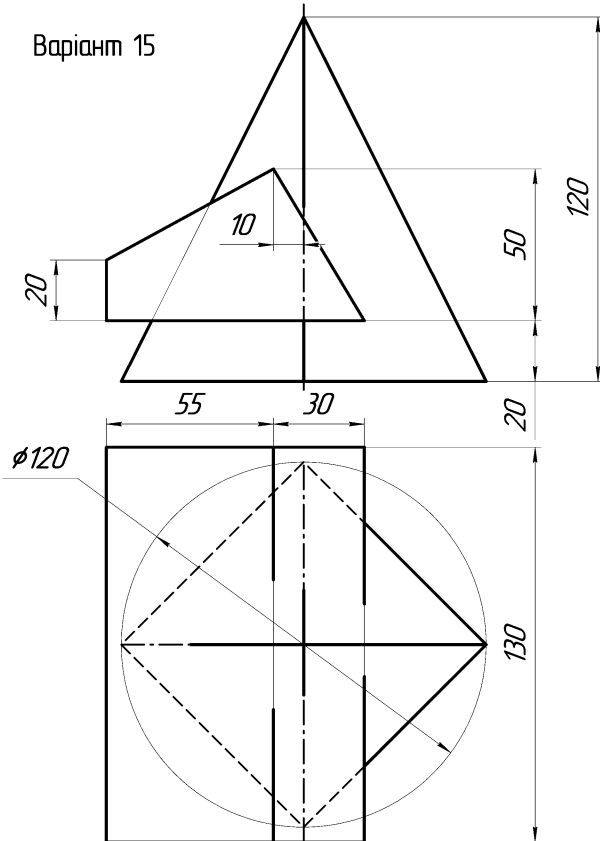
Розгортка поверхні конуса

Варіант 14



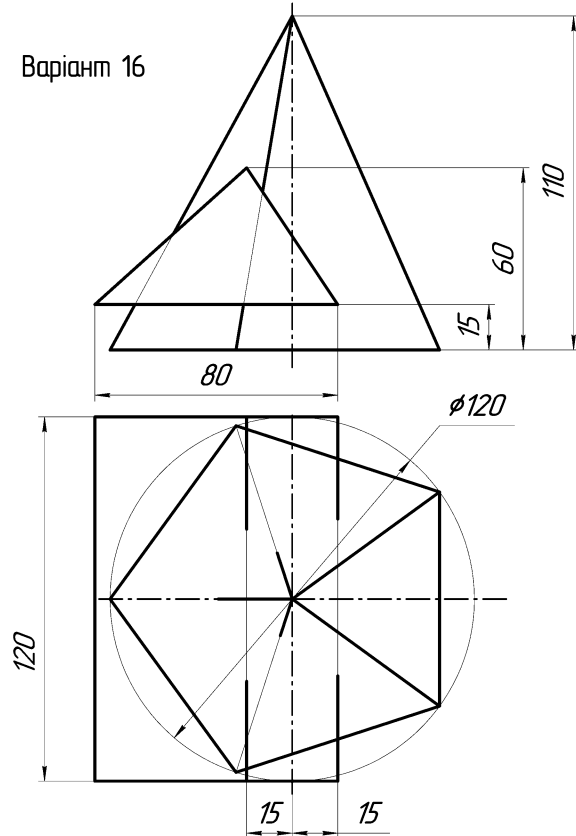
Розгортка поверхні призми

Варіант 15

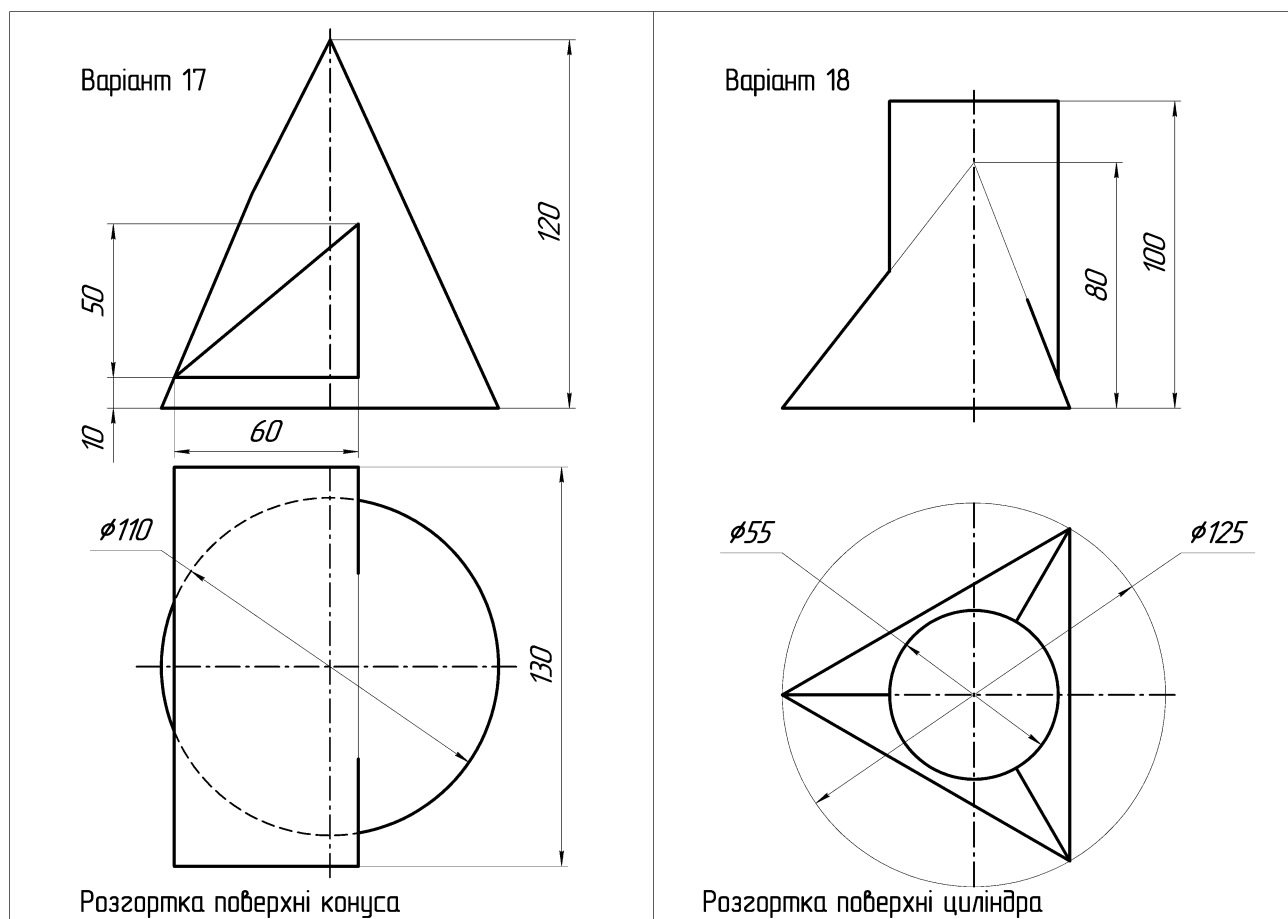


Розгортка поверхні призми

Варіант 16



Розгортка поверхні призми



ЛІТЕРАТУРА

1. Михайленко В.Е. Инженерная графика / В.Е. Михайленко, А.М. Пономарев-К.: Вища школа, 1980. -279 с.
2. Михайленко В.Е. Інженерна та комп'ютерна графіка / В.Е. Михайленко, В.М. Найдиш, А.М. Підкоритов.- К.: Вища школа, 2001. -349 с.
- 3.Морозенко О.П. Інженерна графіка/ О.П. Морозенко, С.Е. Кукель, І.П. Карпенко, І.В.Вишневський: Конспект лекцій.- Дніпропетровськ: НМетАУ, 2011. – 52 с.
4. Хмеленко О.С. Нарисна геометрія.-К.: Кондор, 2008.-438 с.

ЗМІСТ

Вступ.....	3
1. Метод проєкцій. Проєкції геометричних гур.....	4
2. Метод Гаспара Монжа. Проєкції точки в системі трьох площин проєкцій Π_1 , Π_2 та Π_3	5
3. Проєкції прямої. Положення прямої відносно площин проєкцій.....	7
4. Проєкції площин. Класифікація площин.....	10
5. Властивості проєкцій пар геометричних фігур.....	14
6. Способи перетворення проєкцій.....	20
7. Поверхні.....	26
8. Контрольна робота.....	42

Навчальне видання

Морозенко Олена Петрівна

Вишневський Ігор Володимирович

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ

Тим. план 2013, поз. 155

Підписано до друку 23.09.2013. Формат 60x84 $\frac{1}{16}$. Папір друк. Друк плоский. Облік.-вид. арк. 3,29. Умов. друк. арк. 3,25. Тираж 100 пр. Замовлення №

Національна металургійна академія України
49600, Дніпропетровськ-5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ