МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

НАЦИОНАЛЬНАЯ МЕТАЛЛУРГИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ УКРАИНЫ

Г.Г. ШВАЧИЧ, Г.М. БАРТЕНЕВ, А.Н. ДУК,

Е.Г. ТКАЧЕНКО, В.В. ТОЛСТОЙ, Н.В. ЦЕЛУЙКО

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Часть V

Раздел ”Кривые второго порядка”

Утверждено на заседании Ученого совета академии
как конспект лекций

Днепропетровск НМетАУ 2014

УДК 517 (075.8)

Высшая математика. Часть V. Раздел «Кривые второго порядка» / Г.Г. Швачич, Г.М. Бартенев, А.Н. Дук и др.: Конспект лекций. - Днепропетровск: НМетАУ, 2014. – 21 с.

Содержит теоретический материал по указанному разделу дисциплин «Высшая математика» и «Математика для экономистов», излагаемый в соответствии с государственными образовательными профессиональными программами.

Предназначен для студентов экономических специальностей, а также для студентов с проблемами здоровья.

Ответственный за выпуск Г.Г. Швачич, д-р техн. наук, проф.

Рецензенты: Е.Г. Холод, канд. техн. наук, доц. (Государственный Университет им. А. Нобеля)
Л.Н. Савчук, канд. экон. наук, проф. (НМетАУ)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В общем случае кривая второго порядка описывается уравнением второй степени относительно переменных x и y:

$$\boldsymbol{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}, \tag{1}$$

где хотя бы один из коэффициентов A,B или C отличен от нуля.

В зависимости от значения коэффициентов A,B,C,D,E и F будем иметь одну из кривых – окружность, эллипс, гиперболу или параболу. Рассмотрим последовательно эти кривые.

1. ОКРУЖНОСТЬ

Самой простой кривой второго порядка является окружность.

Окружностью называется геометрическое место точек, равноудаленных от заданной точки, называемой ***центром окружности***.

Окружность часто обозначают одной буквой, совпадающей с обозначением ее центра.

Радиусом называют отрезок, соединяющий центр окружности с любой ее точкой.

Для того, чтобы уравнение (1) описывало окружность, необходимо выполнение следующих условий:

- коэффициенты A и C при $\boldsymbol{x^2}$ и $\boldsymbol{y^2}$ совпадали;

- коэффициент B при $\boldsymbol{xy}$ равнялся нулю, т.е. произведение переменных в уравнении кривой отсутствовало.

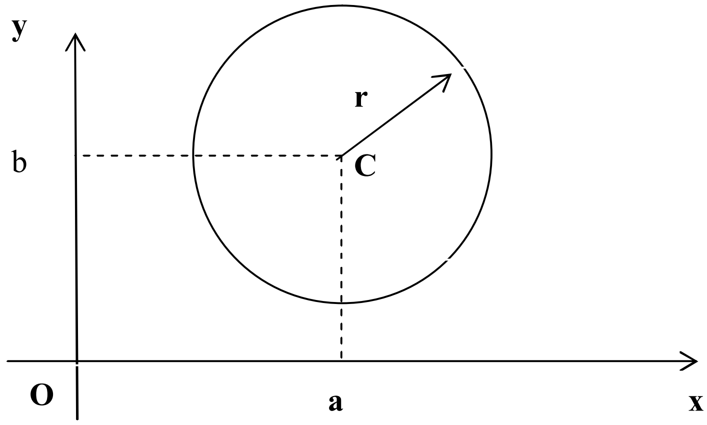

Рис. 1.1. Окружность с основными обозначениями

Каноническое (простейшее) уравнение окружности с центром в точке $C(a;b)$ и радиусом r имеет вид

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \tag{1.1}$$

В том случае, когда центр окружности совпадает с началом координат, ее уравнение выглядит наиболее просто:

$$x^2+y^2=r^2. \tag{1.2}$$

Пример 1.1. Определить радиус и координаты центра окружности, описываемой уравнением

$$x^2+y^2+4x-6y-12=0.$$

Решение.

Для того, чтобы ответить на поставленные вопросы, приведем заданное уравнение к каноническому виду путем выделения полного квадрата:

$$(x^2+4x+4)-4+(y^2-6y+9)-9-12=0;$$

$$(x+2)^2+(y-3)^2=5^2.$$

Таким образом, центр окружности находится в точке C(-2; 3), а ее радиус равен 5 единицам.

Пример 1.2. Написать уравнение окружности, проходящей через точки пересечения окружности $x^2+y^2+4x-4y=0$ с прямой $y=-x$ и через точку $A(4;4)$.

Решение.

Заданные окружность и прямая пересекаются в двух точках. Определим координаты этих точек из уравнения окружности при условии, что $y = -x$:

$$x^2 + (-x)^2 + 4x - 4(-x) = 0;$$
$$2x^2 + 8x = 0;\ x(x+4) = 0;$$
$$\begin{cases} x_1 = 0; \\ y_1 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -4; \\ y_2 = 4. \end{cases}$$

Таким образом, искомая окружность проходит через три точки: заданную по условию задачи *A(4;4)* и рассчитанные выше *B(0;0), C(-4;4).*

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Так как по условию задачи она проходит через три указанные точки, то координаты этих точек обращают уравнение кривой в тождество:

$$\begin{cases} (4-a)^2 + (4-b)^2 = r^2; \\ (0-a)^2 + (0-b)^2 = r^2; \\ (-4-a)^2 + (4-b)^2 = r^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (4-a)^2 + (4-b)^2 = r^2; \\ a^2 + b^2 = r^2; \\ (4+a)^2 + (4-b)^2 = r^2; \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения третье, получим

$$(4-a)^2 - (4+a)^2 = 0;$$

$$(4-a-4-a)(4-a+4+a) = 0;$$

$$-2a \cdot 8 = 0;\ a = 0.$$

Тогда из второго уравнения системы получаем

$$b^2 = r^2.$$

Подставляем это соотношение в первое уравнение системы и получаем:

$$4^2 + (4-b)^2 = b^2;$$
$$16 + 16 - 8b + b^2 = b^2;$$
$$8b = 32;\ b = 4 = r.$$

Следовательно, при найденных параметрах уравнение окружности будет иметь вид

$$x^2 + (y-4)^2 = 4;$$
$$x^2 + y^2 - 8y = 0.$$

2. ЭЛЛИПС

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (эта постоянная должна быть больше расстояния между фокусами).

Чтобы составить уравнение эллипса, примем за ось абсцисс прямую, соединяющую две данные точки F_1 и F_2, выбрав на ней положительное направление от F_2 к F_1, начало координат возьмем в середине отрезка, соединяющего две данные точки (рис. 2.1). Обозначим через $2c$ расстояние F_1F_2 между фокусами. Тогда координаты точек F_1 и F_2 будут соответственно $(c,\ 0)$ и $(-c,\ 0)$. Обозначая через x и y координаты произвольной точки М эллипса, выразим длины отрезков F_1M и F_2M по формуле расстояния между двумя точками:

$$F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2};$$
$$F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

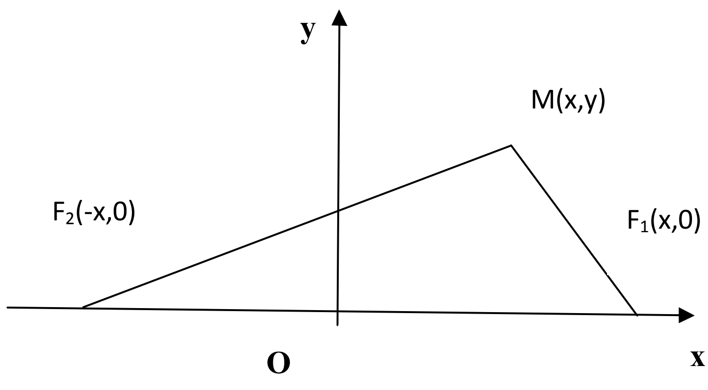

Рис. 2.1. Интерпретация определения эллипса

По определению эллипса сумма $F_1M + F_2M$ есть величина постоянная. Обозначая ее через $2a$, имеем: $F_1M + F_2M = 2a.$

Тогда $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$

Это есть уравнение эллипса в выбранной системе координат.

Чтобы найденное уравнение эллипса приняло простейший вид, нужно в этом уравнении освободиться от радикалов. Перенося один радикал направо, получим: $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$

Возведём в квадрат обе части и упростим:

$$-4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2};$$
$$cx + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2};$$
$$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2);$$
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Разделив обе части на $a^2(a^2 - c^2)$, получим:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2)} = 1.$$

Так как по условию $c < a$, то $a^2 - c^2$ есть положительная величина, ее принято обозначать через b^2.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (2.1)$$

Уравнение (2.1) называется каноническим уравнением эллипса.

Исследование формы эллипса.

1) Симметрия эллипса. Так как уравнение (2.1) содержит только квадраты текущих координат, то если точки (x, y) находятся на эллипсе, то и точки $(\pm x, \pm y)$ находятся на эллипсе, следовательно, оси координат являются осями симметрии эллипса. Ось симметрии эллипса, на которой располагаются фокусы, называется фокальной осью.

2) Точка пересечения осей симметрии называется центром симметрии (центром эллипса). Для эллипса, заданного уравнением (2.1), фокальная ось совпадает с осью $\boldsymbol{Ox}$, а центром является начало координат.

Точки пересечения эллипса с осями симметрии называются его вершинами. Эллипс, заданный уравнением (2.1), имеет вершины в точках пересечения его с осями координат, так как последние являются осями симметрии. Полагая в уравнении (2.1) $y = 0$, найдем абсциссы точек пересечения эллипса с осью $\boldsymbol{Ox}$:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1;\ x^2 = a^2,\ x = \pm a.$$

Полагая $x = 0$, найдем ординаты точек пересечения эллипса с осью $\boldsymbol{Oy}$:

$$\frac{y^2}{b^2} = 1;\ y^2 = b^2,\ y = \pm b.$$

Следовательно, вершинами эллипса будут точки:

$$A_1(a, 0),\ A_2(-a, 0),\ B_1(0, b), B_2(0, -b).$$

Отрезки A_1A_2 и B_1B_2, соединяющие противоположные вершины эллипса, а также их длины $\boldsymbol{2a}$ и $\boldsymbol{2b}$, называют соответственно большой и малой полуосями эллипса.

3) Форма эллипса. Чтобы исследовать форму эллипса, достаточно считать в уравнении (2.1) $x \geq 0$ и $y \geq 0$, так как эллипс симметрично расположен относительно осей координат. Из уравнения (2.1) следует, что $\frac{x^2}{a^2} \leq 1,\ \text{или}\ x \leq a$. То есть x может изменяться от 0 до a. С увеличением x от 0 до a ордината y уменьшается от b до 0. Таким образом, эллипс имеет форму, указанную ниже:

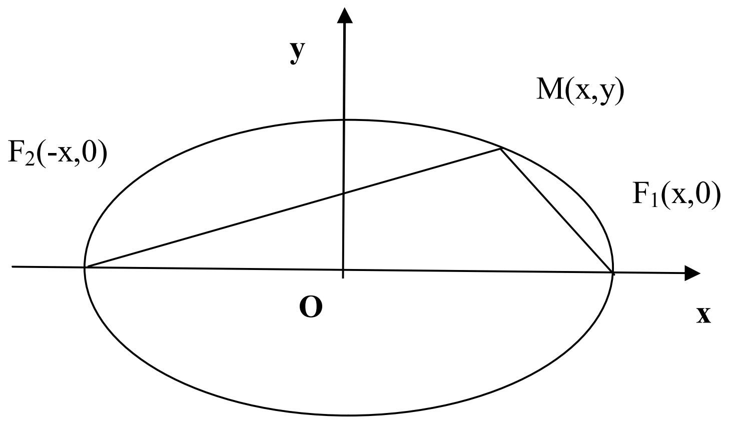

Рис. 2.2. Форма эллипса

Зная фокусы F_1 и F_2 и длину $2a$ большой оси, легко механически построить эллипс. Нужно взять нить длиной $2a$, укрепить два ее конца в точках F_1 и F_2 и, придав ей форму дуги F_1MF_2, описать точкой М эллипс (в точке М поместить острие карандаша).

При a=b (с=0) уравнение (2.1) принимает вид $x^2 + y^2 = a^2$ и определяет окружность. Поэтому окружность можно рассматривать как эллипс с равными полуосями.

Эксцентриситет и директрисы эллипса.

Обозначая через $r_1 = F_1M$ и $r_2 = F_2M$ расстояния любой точки М эллипса соответственно до его правого и левого фокусов F_1 и F_2. Согласно определению эллипса:

$$r_1 + r_2 = 2a \tag{2.2}$$

С другой стороны, применяя формулы расстояния между двумя точками, мы получим:

$$r_2 = F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\ ;$$

$$r_1 = F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\ ,$$

где x, y обозначают координаты точки М эллипса, а c – половину фокусного расстояния. Возводя два последних равенства в квадрат и вычитая, находим:

$$r_2^2 - r_1^2 = (x+c)^2 + y^2 - (x-c)^2 - y^2\ .$$

Раскрывая скобки и делая приведение подобных членов, получаем:

$$r_2^2 - r_1^2 = 4cx \tag{2.3}$$

Из уравнений (2.2) и (2.3), считая в них искомыми величинами r_1 и r_2, мы определяем последние. С этой целью перепишем уравнение (2.3) в виде:

$$(r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 4cx\,.$$

Воспользуемся уравнением (2.2), что нам даст:

$$r_2 - r_1 = 2\frac{c}{a}x\,.$$

Решая полученное уравнение совместно с уравнением (2.2), найдем r_1 и r_2: $r_1 = a - \frac{c}{a}x;\ r_2 = a + \frac{c}{a}x.$

Величина $\frac{c}{a}$, входящая в последние формулы, называется эксцентриситетом эллипса; мы будем обозначать ее через ε. Очевидно, $\varepsilon = \frac{c}{a}$ есть отношение фокусного расстояния $2c$ к длине большой оси $2a$. Таким образом, мы имеем следующие формулы для фокальных радиусов r_1 и r_2:

$$r_1 = a - \varepsilon x;\ r_2 = a + \varepsilon x \tag{2.4}$$

Рассмотрим прямую $x=l$ $(l>a)$, параллельную оси Oy, и найдем, во-первых, расстояние до произвольной точки M(x,y) эллипса от его правого фокуса и, во-вторых, – расстояние до этой точки M от прямой $x=l$. Вычислим отношение этих расстояний:

$$d_1 = l - x;\ \frac{r_1}{d_1} = \frac{a - \varepsilon x}{l - x} = \varepsilon\frac{\frac{a}{\varepsilon} - x}{l - x}.$$

Если $l = \frac{a}{\varepsilon}$, то написанное отношение $\frac{r_1}{d_1}$ будет сохранять постоянное значение, равное ε.

В силу симметрии то же заключение можно сделать относительно левого фокуса F_2 и прямой с уравнением $x = -\frac{a}{\varepsilon}.$

Эти две прямые, перпендикулярные к фокальной оси эллипса и отстоящие на расстояние $\frac{a}{\varepsilon}$ от его центра, называются директрисами эллипса. Они обладают следующим свойством: отношение расстояний любой точки эллипса до фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная ε.

Пример 2.1. Найти эксцентриситет и директрисы эллипса $x^2 + 2y^2 = 2.$

Написав уравнение эллипса в виде:

$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1,$ заключаем, что $a^2 = 2;\ b^2 = 1.$ Следовательно, $c^2 = a^2 - b^2 = 2 - 1 = 1.$

Откуда: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Директрисы проходят на расстоянии $\frac{a^2}{c}$ от центра эллипса (начала координат), т. е. на расстоянии, равном $\frac{2}{1} = 2.$ Уравнения директрис:

$x=+2,\ x=-2.$

Пример 2.2. Доказать, что линия $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$ задает эллипс. Найти его полуоси и координаты фокусов.

Запишем уравнение в виде:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Заключаем, что данная линия определяет эллипс. При этом большая полуось равна 3, а малая – 2. Фокусы находятся на оси Oy. Из равенства $b^2 = a^2 - c^2$ получаем $c^2 = a^2 - b^2;\ c^2 = 9 - 4 = 5.$

Т. е. координатами фокусов есть точки $F_1(0;-\sqrt{5}), F_2(0;\sqrt{5})$.

3. ПАРАБОЛА

Парабола есть геометрическое место точек, равноотстоящих от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой (предполагается, что данная точка лежит не на прямой).

Чтобы составить уравнение параболы, примем за ось $\boldsymbol{Ox}$ прямую, проходящую через фокус $\boldsymbol{F}$ перпендикулярно к директрисе, и будем считать ее направленной от директрисы к фокусу; за начало координат возьмем середину О отрезка от точки $\boldsymbol{F}$ до данной прямой, длину которого обозначим через $\boldsymbol{p}$ (рис. 3.1). Величину $\boldsymbol{p}$ называют параметром параболы.

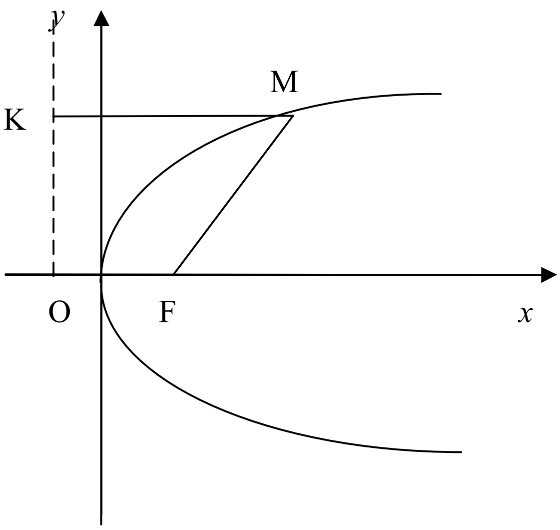

Рис. 3.1. Парабола

Координаты фокуса $\boldsymbol{F}$ будут $\left(-\frac{p}{2}, y\right)$. Обозначим через $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ координаты произвольной точки М параболы.

Тогда координаты точки K – основания перпендикуляра, опущенного из М на директрису, будут $\left(-\frac{p}{2}, y\right)$. Так как по определению $\boldsymbol{FM=MK}$, то, применяя формулу расстояния между двумя точками, получим уравнение параболы в выбранной системе координат:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}.$$

Чтобы придать ему простейший вид, возведем обе части в квадрат.

Будем иметь:

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2,\ x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4},$$

откуда:

$$y^2=2px \tag{3.1}$$

Полученное уравнение называется каноническим уравнением параболы.

Чтобы исследовать форму параболы по ее уравнению (3.1), заметим, что x не может принимать отрицательные значения, т.е. все точки параболы лежат справа от оси Oy. Каждому значению x соответствует два значения y, равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку, т.е. кривая расположена симметрично оси Ox. С увеличением x абсолютная величина ординаты y увеличивается, причем когда x неограниченно растет, то $|y|$ тоже неограниченно растет. Кривая имеет вид, приведенный на рис. 3.1.

Парабола имеет одну ось симметрии; ось симметрии параболы называют ее осью.

Точка пересечения параболы с осью симметрии называется ее вершиной. Для параболы, заданной уравнением (3.1), вершиной является начало координат.

Заметим, что рассмотренная линия – парабола, в декартовой системе координат представлена уравнением второй степени.

Замечание. Если система координат выбрана так, что ось совпадает с осью симметрии параболы, начало координат с вершиною, но парабола лежит в левой полуплоскости, то ее уравнение имеет вид

$$y^2=-2px.$$

Если же парабола симметрична относительно оси Oy, а вершина находится в начале координат, то ее уравнение имеет вид $x^2=2py,$ если она лежит в верхней полуплоскости, и $x^2=-2py,$ если в нижней.

Эксцентриситет и директриса параболы.

Мы определили параболу как геометрическое место точек, равноотстоящих от данной точки – фокуса и данной прямой – директрисы. Таким образом, обозначая через r расстояние любой точки М параболы до фокуса, А через d ее расстояние до директрисы, мы имеем $r=d$, или $\frac{r}{d}=1$ (рис. 3.1). Поэтому эксцентриситет параболы принимают равным единице.

Уравнение директрисы параболы будет:

$x=-\frac{p}{2}$, если оси координат выбраны так, как это было сделано ранее.

Пример 3.1. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Ox, если длина некоторой хорды этой параболы, перпендикулярной к оси Ox , равна 16, а расстояние этой хорды от вершины равно 6.

Решение. Поскольку известны длина хорды и расстояние ее от вершины, то, следовательно, известны координаты конца этой хорды, лежащей на параболе. Уравнение параболы имеет вид $y^2=2px$. Используя формулу для определения расстояния между двумя точками, получим $x=6$, $y=8$. Находим параметр p: $8^2=2p\cdot 6$, откуда $2p=\frac{32}{3}$.

Таким образом, уравнение искомой параболы $y^2=\frac{32}{3}x$.

Пример 3.2. Задано уравнение $2x^2+2y-4x+5=0$. Привести его к каноническому виду и определить вид кривой.

Решение. Преобразуя это уравнение, получим:

$$2(x^2-2x)+2y+5=2\left[(x-1)^2-1\right]+2y+5=2(x-1)^2-2+2y+5=$$
$$=2(x-1)^2+2y+3=0;$$
$$(x-1)^2=-\frac{1}{2}(2y+3);\ (x-1)^2=-\left(y+\frac{3}{2}\right).$$

Это уравнение параболы с вершиной в точке $(1;-\frac{3}{2})$ и ветвями, направленными вниз.

4. ГИПЕРБОЛА

Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Эта постоянная должна быть положительной и меньше расстояния между фокусами. Обозначим её через $2a$ и выберем оси координат так же, как и при выводе уравнения эллипса. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка гиперболы.

По определению гиперболы: $F_2M - F_1M = \pm 2a$.

В правой части равенства нужно выбрать знак плюс, если $F_2M > F_1M$ и знак минус, если $F_2M < F_1M$.

Так как $F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ и $F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, то последнее равенство можно записать в виде:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Это и есть уравнение гиперболы в выбранной системе координат. Для приведения его к простейшему виду первый радикал перенесем в правую часть и возведем обе части равенства в квадрат. Получим соотношение:

$$\pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx.$$

Возводя еще раз обе части равенства в квадрат, сделав приведение подобных членов разделив на свободный член, получим:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Так как c > a, то величина $c^2 - a^2$ положительна. Обозначив ее через b^2, то есть полагая $b^2 = c^2 - a^2$, получим каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (4.1)$$

Исследуем форму гиперболы.

1. Симметрия гиперболы. Так как последнее уравнение содержит только квадраты текущих координат, то оси координат являются осями симметрии гиперболы. Ось симметрии, на которой располагаются фокусы, называется фокальной осью. Точка пересечения осей симметрии – центр симметрии – называется центром гиперболы. Для гиперболы, заданной уравнением (4.1), фокальная ось совпадает с осью Ox, а центром является начало координат.

2. Точки пересечения с осями симметрии. Эти точки называются вершинами гиперболы. Положим в каноническом уравнении (4.1) $y=0$ и найдем абсциссы пересечения гиперболы с осью Ox:

$\frac{x^2}{a^2}=1$, откуда $x^2=a^2$ и $x=\pm a$.

Следовательно, точки $A_1(a;0)$ и $A_2(-a;0)$ являются вершинами гиперболы (рис. 4.1). Расстояние между этими точками равно $2a$. Чтобы найти точки пересечения с осью Oy, положим в уравнении (4.1) $x=0$. Получим для определения ординат этих точек уравнение

$-\frac{y^2}{b^2}=1,$ или $y^2=-b^2,$

откуда получаем мнимые значения $y=\pm bi$. Это означает, что ось Oy не пересекает гиперболы. Поэтому ось Oy называется мнимой осью симметрии. Ось Ox (фокальная) также еще называется действительной осью гиперболы.

Для гиперболы, заданной уравнением (4.1), действительной осью симметрии является ось абсцисс, а мнимой – ось ординат. Отрезок A_1A_2, который соединяет вершины гиперболы, а также его длина $2a$ называются действительной осью гиперболы. Если на мнимой оси симметрии гиперболы отложить в обе стороны от ее центра О отрезки OB_1 и OB_2 длиной b, то отрезок B_1B_2, а также его длина $2b$ называются мнимой осью гиперболы.

Величины a и b называются соответственно действительной и мнимой полуосями гиперболы.

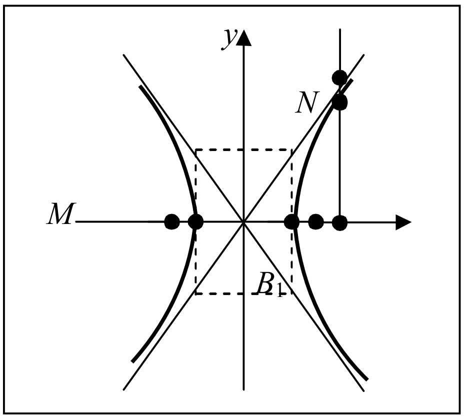

Рис. 4.1. Гипербола

3. Форма гиперболы. При исследовании формы гиперболы достаточно рассмотреть лишь положительные значения x и y, потому что кривая симметрична относительно осей координат. Так из уравнения (4.1) следует, что $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$, то x может изменяться в интервале $[a, +\infty)$. Когда x увеличивается от a до $+\infty$, то y тоже увеличивается от 0 до $+\infty$. Кривая имеет форму, изображенную на рис. 4.1, она располагается вне полосы, ограниченной прямыми $x=\pm a$, и состоит из двух отдельных ветвей. Для любой точки M одной из этих ветвей $F_2M > F_1M$ и $F_2M - F_1M = 2a$ (правая ветвь), для любой точки M другой ветви $F_1M > F_2M$ и $F_1M - F_2M = 2a$ (левая ветвь).

4. Асимптоты гиперболы. Рассмотрим две прямые линии, тесно связанные с гиперболой, называемые ее асимптотами. Это прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$. На рисунке 4.1 точка $N(x, Y)$ принадлежит асимптоте, а точка $M(x, y)$ – гиперболе. Очевидно, что $Y>y$, а их разность равна расстоянию между ними, т.е. $MN=Y-y$. Покажем, что при неограниченном возрастании x расстояние MN стремится к нулю.

Из уравнения (4.1) выразим y. Получим:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Откуда $MN = Y - y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}\frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2})}$.

После упрощений получаем $MN = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$. При неограниченном возрастании x (т.е. при $x \to \infty$) величина отрезка MN неограниченно убывает (т.е. $MN \to 0$). Отсюда следует, что когда точка M движется по гиперболе в первом квадранте, удаляясь в бесконечность, ее расстояние до прямой $y = \frac{b}{a}x$ стремится к нулю. Аналогичное обстоятельство будет иметь место и при движении M по гиперболе в третьем квадранте. Наконец, вследствие симметрии гиперболы относительно оси Oy получим вторую прямую $y = -\frac{b}{a}x$, расположенную симметрично с прямой $y = +\frac{b}{a}x$. К этой прямой точка M также будет неограниченно приближаться при движении по гиперболе и удалении в бесконечность во втором и четвертом квадрантах.

Эти две прямые носят название асимптот гиперболы и имеют уравнения

$$y = +\frac{b}{a}x \text{ и } y = -\frac{b}{a}x.$$

Как видно из рисунка 4.1, асимптоты гиперболы располагаются по диагоналям прямоугольника, одна сторона параллельна оси Ox и равна $2a$, другая параллельна оси Oy и равна $2b$. Центр гиперболы лежит в начале координат.

В случае, когда $a=b$, гипербола называется равносторонней. Ее уравнение имеет вид: $x^2 - y^2 = a^2$. Асимптоты определяются уравнениями $y=-x$ и $y=x$. Они будут перпендикулярны друг другу и делят пополам углы между ее осями симметрии.

Эксцентриситет и директрисы гиперболы.

Обозначим через $r_1 = F_1M$ и $r_2 = F_2M$ расстояния любой точки гиперболы M до ее правого и левого фокусов F_1 и F_2 согласно определению гиперболы, получаем $r_1 - r_2 = \pm 2a$, где знак плюс относится к правой ветви гиперболы, а минус к левой. Применим те же рассуждения, которые применялись при выводе уравнений директрис эллипса. Получим $r_2 - r_1 = \pm 2\frac{c}{a}x$. Решая совместно последние два уравнения, имеем выражения для фокальных радиусов r_1 и r_2:

$r_1 = -a + \frac{c}{a}x;\ \ r_2 = a + \frac{c}{a}x$ (правая ветвь гиперболы);

$r_1 = a - \frac{c}{a}x;\ \ r_2 = -a - \frac{c}{a}x$ (левая ветвь гиперболы).

Величина $\frac{c}{a}$, входящая в последние формулы, называется эксцентриситетом гиперболы и обозначается символом ε. Очевидно, что $\varepsilon = \frac{c}{a}$ есть отношение фокусного расстояния $2c$ к длине действительной оси $2a$, причем для гиперболы $\varepsilon > 1$, так как $c > a$. Таким образом, имеем формулы для фокальных радиусов r_1 и r_2 гиперболы:

$r_1 = -a + \varepsilon x;\ \ r_2 = a + \varepsilon x$ (правая ветвь); $r_1 = a - \varepsilon x;\ \ r_2 = -a - \varepsilon x$ (левая ветвь).

Рассмотрим прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$, перпендикулярные фокальной оси гиперболы и расположенные на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от ее центра. Эти прямые называются директрисами гиперболы, соответствующими правому (знак плюс) и левому (знак минус) фокусам гиперболы. Так как для гиперболы $\varepsilon > 1$, то $\frac{a}{\varepsilon} < a$ и, следовательно, директрисы располагаются между вершинами.

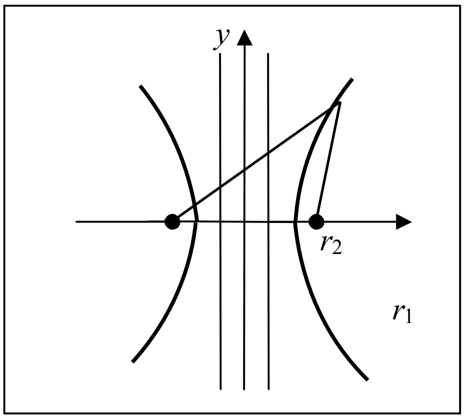

Рис. 4.2. Асимптоты гиперболы

ЛИТЕРАТУРА

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: учеб. для вузов. – М.: Наука, 1988. – 224 с.
2. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Физмат-гиз, 1963. – 272 с.
3. Зимина О.В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учеб. комплекс: Учеб. пособие / Под ред. А.И. Кириллова. – М.: Изд-во МЭИ, 2000. – 328 с.
4. Идельсон А.В., Блюмкина И.А. Аналитическая геометрия. Линейная алгебра: учеб. пособие / под ред. Л.П. Гаштольда, В.Г. Дмитриева, А.Ф Тарасюка. – М.: ИНФРА-М, 2000. – 200 с.
5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1971. – 232 с.
6. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – СПб.: Профессия, 2002. – 256 с.
7. Мусхелишвили Н.И. Курс аналитической геометрии. – СПб.: Лань, 2002. – 656 с.
8. Томашевский И.Л., Юфряков А.В., Мотовилов А.К. Аналитическая геометрия: Метод, указания к самостоят, работе по курсу «Высшая математика». – Архангельск: РИО АЛТИ, 1989. – 24 с.

Учебное издание

Швачич Геннадий Григорьевич

Бартенев Георгий Михайлович

Дук Александр Николаевич

Ткаченко Елена Георгиевна

Толстой Виктор Владимирович

Целуйко Наталья Васильевна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Часть V

Раздел ”Кривые второго порядка”

Конспект лекций

Тем. план 2014, поз. 273

Подписано к печати 05.06.2014. Формат 60x84 1/16. Бумага типогр. Печать плоская. Уч.-изд. л. 1,29. Усл. печ. л. 1,27. Тираж 100 экз. Заказ №

Национальная металлургическая академия Украины

49600, г. Днепропетровск- 5, пр. Гагарина, 4

Редакционно-издательский отдел НМетАУ