

ВСТУП

Наука математика зародилась ще на світанку цивілізації. Вона постійно збагачувалась і утверджувалась як засіб пізнання закономірностей навколишнього світу. В наш час математика допомагає вченим відкривати і використовувати закони природи та є справжнім рушієм розвитку науки і техніки.

Ще в п'ятнадцятому сторіччі видатний італійський вчений, дослідник, винахідник і художник, архітектор, анатоміст і інженер, одна з найвизначніших постатей італійського Відродження Леонардо да Вінчі сказав, що ніякі людські дослідження не можна назвати справжньою наукою, якщо вони не пройшли через математичні дослідження.

Сучасний інженер повинен мати досить високий рівень математичної підготовки. Такі розділи вищої математики, як поверхневі і потрійні інтеграли, скалярне і векторне поля, елементи математичної статистики або зовсім відсутні у базовому курсі для бакалаврів напряму металургія, або викладаються в обмеженому обсязі. Ці розділи є необхідними для підготовки сучасних інженерів і присутні у програмі з вищої математики для спеціалістів і магістрів.

Даний конспект лекцій містить матеріал з наведених розділів вищої математики і може бути корисним для студентів усіх інженерно-технічних спеціальностей. Він також може бути використаний майбутніми інженерами для самостійного вивчення цього досить складного матеріалу. Для кращого засвоєння теоретичних положень у конспекті наведено розв'язання прикладів, задачі для самостійної роботи і зразки білетів залікових модулів.

У даному конспекті лекцій розділ 1 написала Т.М. Кадицьникова, розділ 2 – О.Є. Запорожченко, підрозділи 3.1, 3.3 – І.В. Щербина, вступ і підрозділ 3.2 написав А.Г. Мона, а підрозділ 3.4 належить І.В. Пасічник.

Автори сподіваються, що даний конспект лекцій допоможе студентам при вивченні викладених розділів вищої математики і підготовці до складення залікових модулів, а також буде корисним для викладачів.

Розділ 1

ПОВЕРХНЕВІ ТА ПОТРІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

1.1. Поверхневі інтеграли першого роду

Нехай в точках деякої кусково-гладкої поверхні σ визначена обмежена функція $f(N) = f(x, y, z)$. Розіб'ємо поверхню σ на n довільних частин σ_i без спільних внутрішніх точок, і нехай $\Delta\sigma_i$ - площа, а $\text{diam}(\sigma_i)$ - діаметр частин поверхні $\sigma_i, i = 1, 2, \dots, n$. У кожній частині σ_i виберемо довільну точку $N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ і складемо суму

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta\sigma_i. \quad (1.1)$$

Цю суму називають інтегральною сумою для функції $f(x, y, z)$ по поверхні σ .

Якщо при $\lambda = \max \text{diam}(\sigma_i) \rightarrow 0$ інтегральні суми (1.1) мають скінчену границю, яка не залежить ні від способу розбиття поверхні σ , ні від вибору точок N_i , цю границю називають поверхневим інтегралом першого роду від функції $f(x, y, z)$ по поверхні σ і позначають

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma.$$

Таким чином, за означенням

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta\sigma_i.$$

У цьому разі функція $f(x, y, z)$ називається інтегрованою по поверхні σ , а поверхня σ - областю інтегрування. Слід зауважити, якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна на поверхні σ , то вона інтегрована по σ , та обчислення поверхневого інтеграла першого роду зводиться до обчислення подвійного інтеграла.

Нехай гладка поверхня σ , яка задана рівнянням $z = z(x, y)$, проектується на площину Oxy в область D . Припустимо, що функція $f(x, y, z)$ неперервна на поверхні σ , а функції $z(x, y)$, $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ неперервні в області D .

Внаслідок розбиття поверхні σ на частини σ_i область D розіб'ється на частини S_i , які є відповідними проекціями частин σ_i на площину Oxy (рис.1.1). Якщо ΔS_i - площа області S_i , то $\Delta \sigma_i$ - площа поверхні σ_i , то

$$\Delta \sigma_i = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} \Delta S_i,$$

тому інтегральну суму (1.1) можна записати у вигляді:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta \sigma_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)) \cdot \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} \Delta S_i,$$

Де права частина цієї рівності є інтегральною сумою для функції:

$$f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}, (x, y) \in D,$$

тому із означення поверхневого інтегралу першого роду випливає:

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy. \quad (1.2)$$

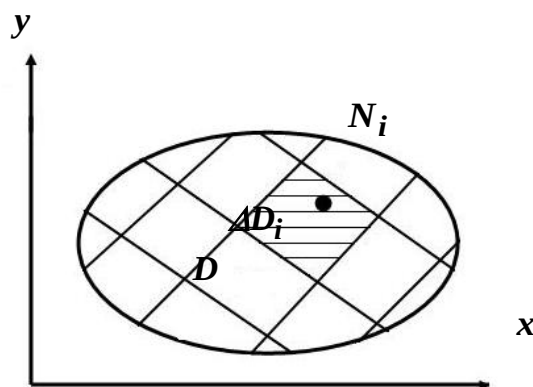


Рис. 1.1

Аналогічно можна дістати формули, що виражають інтеграл по поверхні σ через подвійні інтеграли по її проекціях на площини Oxz та Oyz . Якщо поверхня σ задається рівнянням $y = y(x, z)$ або $x = x(y, z)$, то

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2} dx dz,$$

або

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} dy dz,$$

де D_{xz} та D_{yz} - проекції поверхні σ на координатні площини Oxz та Oyz відповідно.

Якщо у формулі (1.2) покласти $f(x, y, z) = 1$ на поверхні σ , то дістанемо

$$P = \iint_{\sigma} d\sigma,$$

де P - площа поверхні σ , тобто за допомогою поверхневого інтеграла першого роду можна обчислювати площі поверхонь.

Крім того поверхневі інтеграли першого роду застосовують при обчисленні маси, координат центра маси, моменту інерції матеріальної поверхні з відомою поверхневою густиною розподілу маси. Виведення відповідних формул по суті не відрізняється від виводу аналогічних формул для матеріальної пластинки.

Якщо на кусково-гладкій поверхні σ розподілено масу з поверхневою густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)$, то:

а) маса матеріальної поверхні:

$$m = \iint_{\sigma} \gamma(x, y, z) d\sigma;$$

б) координати центра маси поверхні:

$$x_c = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} x \gamma d\sigma;$$

$$y_c = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} y \gamma d\sigma;$$

$$z_c = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} z \gamma d\sigma.$$

в) моменти інерції поверхні відносно осей координат і початку координат:

$$I_x = \iint_{\sigma} (y^2 + z^2) \gamma d\sigma;$$

$$I_y = \iint_{\sigma} (x^2 + z^2) \gamma d\sigma;$$

(1.3)

$$I_z = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2) \gamma d\sigma;$$

$$I_o = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2 + z^2) \gamma d\sigma.$$

Приклад 1. Обчислити поверхневий інтеграл

$$\iint_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma,$$

де σ – півсфера, яка описується рівнянням $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Розв'язок.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}},$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

$$d\sigma = \frac{dx dy}{\sqrt{4-x^2-y^2}},$$

$$I = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma = \iint_{\sigma} \frac{(x^2 + y^2) dx dy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}.$$

Проекція σ проєціюється на площину xOy в область D . Область D - коло $x^2 + y^2 \leq 4$.

Для обчислення подвійного інтеграла

$$\iint_D \frac{(x^2 + y^2) dx dy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

по області D перейдемо до полярних координат:

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq +\infty.$$

У полярних координатах область D визначається за такими формулами:

$$x^2 + y^2 \leq 4, \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi \leq 4, \rho \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

З огляду на симетрію кола та парність підінтегральної функції виберемо значення полярного кута $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Тоді

$$I = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma = \iint_D \frac{(x^2 + y^2) dx dy}{\sqrt{4-x^2-y^2}} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}.$$

Внутрішній інтеграл обчислюється підстановкою: $\rho = 2 \sin t$; $d\rho = 2 \cos t dt$. Встановимо границі змінної t з умови $\sqrt{4-\rho^2} = 2 \cos t$: $\rho = 0, t = 0$; $\rho = 2, t = \frac{\pi}{2}$. Тоді

$$\int_0^2 \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{4-\rho^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8(\sin t)^3 2 \cos t dt}{2 \cos t} =$$

$$= -8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) d \cos t = -8 \left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{16}{3}.$$

Відповідь: $I = \frac{32\pi}{3}$.

Приклад 2. Знайти момент інерції відносно осі Oz частини однорідної ($\gamma = 1$) поверхні $z^2 = x^2 + y^2$, яка відтинається площиною $z = \sqrt{2}$.

Розв'язок.

Тіло обертання, момент інерції якого відносно осі Oz треба знайти, зображено на рис. 1.2.

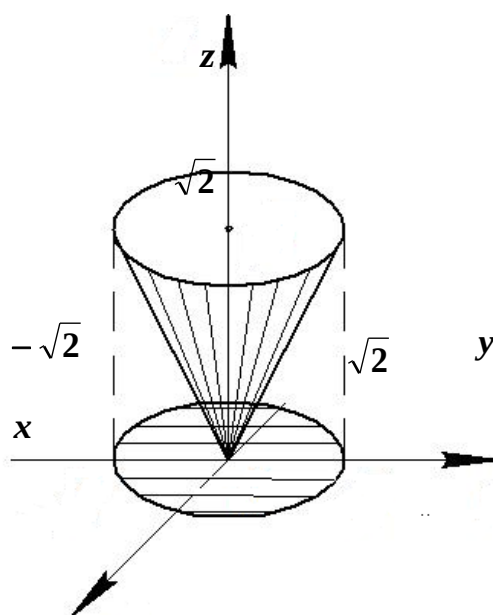


Рис. 1.2

Знайдемо частинні похідні функції $z = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Підставивши частинні похідні у формулу (1.3), одержуємо:

$$I_z = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2) \gamma d\sigma = \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy =$$

$$= \sqrt{2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy.$$

В останньому інтегралі перейдемо до полярної системи координат:

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq +\infty.$$

Тоді

$$I_z = \sqrt{2} \iint_D \rho^3 d\rho = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 d\rho.$$

Після обчислення останнього інтеграла одержуємо:

$$I_z = 2\sqrt{2} \pi.$$

$$\text{Відповідь: } I_z = 2\sqrt{2} \pi.$$

1.2. Поверхневі інтеграли другого роду

Візьмемо на гладкій поверхні σ довільну точку M , проведемо в ній нормаль $\bar{n}$ певного напрямку і розглянемо на поверхні σ довільний замкнений контур, який виходить з точки M і повертається в точку M , не перетинаючи при цьому межі поверхні σ . Переміщатимемо точку M по замкнутому контуру разом з вектором $\bar{n}$ так, щоб вектор $\bar{n}$ весь час залишався нормальним до σ . При обході заданого контуру ми можемо повернутися в точку M з тим самим або з протилежним напрямом нормалі.

Якщо у довільну точку M поверхні σ після обходу довільного замкнутого контуру, який розміщується на поверхні σ і не перетинає межу поверхні, ми повертаємось з початковим напрямом нормалі $\bar{n}$, то поверхню називають *двосторонньою*. Якщо при обході деякого контуру напрям нормалі змінюється на протилежний, то поверхню називають *односторонньою*. Двосторонню поверхню називають *орієнтовною*, а вибір певної її сторони *орієнтацією поверхні*. Односторонні поверхні неорієнтовані.

Нехай σ - орієнтовна поверхня, обмежена контуром L , який не має точок самоперетину. Вважатимемо за додатний той напрям обходу L , при якому спостерігач, розміщений так, що напрям нормалі збігається з напрямом від ніг до голови при русі, залишає поверхню зліва від себе. Протилежний напрям обходу називається від'ємним. Якщо змінити орієнтацію поверхні на протилежну, то додатний і від'ємний напрями обходу контуру L поміняються місцями.

Нехай σ - гладка поверхня, задана рівнянням $z = f(x, y)$ і $R(x, y, z)$ - обмежена функція, визначена в точках поверхні σ . Зорієнтуємо поверхню σ . Розіб'ємо її довільно на n частин. Позначимо через D_i проекцію i -ї частини поверхні σ_i на площину Oxy , а через ΔS_i - площу D_i , взяту із знаком плюс, якщо обрана зовнішня сторона поверхні σ , із знаком мінус, якщо обрана внутрішня сторона поверхні σ . Виберемо в кожній частині σ_i довільну точку $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ і складемо суму:

$$\sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i.$$

Останній вираз називається інтегральною сумою. Нехай $\lambda = \max d(\sigma_i)$ - максимальний діаметр поверхонь σ_i . Якщо при $\lambda \rightarrow 0$ інтегральні суми мають скінчену границю, яка не залежить ні від способу розбиття поверхні σ , ні від вибору точок M_i , то цю границю називають поверхневим інтегралом другого роду і позначають так:

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i \quad (1.4)$$

З означення поверхневого інтегралу другого роду випливає, що при зміні сторони поверхні на протилежну інтеграл змінює знак, бо змінює знак ΔS_i .

Поверхню σ можна також проектувати на координатні площини Oyz та Oxz . Тоді матимемо ще два поверхневі інтеграли:

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz, \quad \iint_{\sigma} Q(x, y, z) dx dz,$$

де $P(x, y, z), Q(x, y, z)$ - функції, визначені в точках поверхні σ .

Для поверхневих інтегралів другого роду мають місце наступні формули:

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz = \iint_{\sigma} P(x, y, z) \cos \alpha d\sigma,$$

$$\iint_{\sigma} Q(x, y, z) dx dz = \iint_{\sigma} Q(x, y, z) \cos \beta d\sigma,$$

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{\sigma} R(x, y, z) \cos \gamma d\sigma,$$

де α, β, γ – кути між нормаллю до поверхні σ та осями Ox, Oy, Oz відповідно.

На практиці найпоширенішими є поверхневі інтеграли, які об'єднують усі названі, тобто

$$\iint_{\sigma} P dy dz + Q dx dz + R dx dy = \iint_{\sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma \quad (1.5)$$

Формула (1.5) виражає загальний поверхневий інтеграл другого роду через поверхневий інтеграл першого роду. Поверхневі інтеграли другого роду обчислюються за допомогою подвійних інтегралів.

Нехай функція $R(x, y, z)$ неперервна в усіх точках гладкої поверхні σ , яка задана рівнянням $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$, де D_{xy} - проекція поверхні σ на площину Oxy . Виберемо верхню сторону поверхні σ , де нормаль до поверхні утворює з віссю Oz гострий кут, тоді $\Delta S > 0, i = 1, 2, \dots, n$. Оскільки $z_i = z(\xi_i, \eta_i)$, то інтегральну суму можна записати у вигляді:

$$\sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \gamma_i) \Delta S_i = \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)) \Delta S_i \quad (2.6)$$

Перейшовши в рівності (1.6) до границі при $\lambda \rightarrow 0$, дістанемо наступну формулу:

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy,$$

Яка виражає поверхневий інтеграл другого роду по змінних x, y через подвійний. Якщо вибрати нижню сторону поверхні (нормаль до поверхні утворює з віссю Oz тупий кут), то одержаний подвійний інтеграл беруть із знаком «мінус», тому

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy \quad (1.7)$$

Аналогічно

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} P(x, y, z(x, y)) dx dy \quad (1.8)$$

$$\iint_{\sigma} Q(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} Q(x, y, z(x, y)) dx dy \quad (1.9)$$

У формулі (1.8) гладку поверхню σ задано рівнянням $x = x(y, z)$, а в формулі (1.9) – рівнянням $y = y(x, z)$. Знак «плюс» у цих формулах беремо тоді, коли нормаль до поверхні утворює відповідно з віссю Ox , з віссю Oy гострий кут, а знак «мінус» - коли тупий кут; D_{yz} , D_{xz} - проекції поверхні σ на площини Oyz та Oxz відповідно.

Для обчислення загального інтеграла (1.5) використовують формули (1.7)-(1.9), проектуючи поверхню σ на всі три координатні площини. Таким чином,

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} P dy dz + Q dx dz + R dx dy = & \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy \pm \\ & \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dy dz \pm \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z) dx dz. \end{aligned}$$

Якщо поверхня σ неоднозначно проектується на яку-небудь координатну площину, то цю поверхню розбивають на частини, а інтеграл (1.5) – на суму інтегралів по одержаних частинах поверхні σ .

Приклад 1. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду

$$I = \iint_{\sigma} dy dz + y dx dz + z^2 dx dy,$$

де σ - зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, розміщена в першому октанті.

Розв'язок.

Нехай D_{xy} , D_{yz} , D_{xz} - проекції заданої поверхні σ на координатні площини. Це чверті кругів з центром у початку координат і радіусом 1. Тоді

$$\iint_{\sigma} dydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4};$$

$$\iint_{\sigma} ydx dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho^2 \sin\varphi d\rho = -\frac{1}{3} \cos\varphi \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3} \cdot (-1) = \frac{1}{3};$$

$$\iint_{\sigma} z^2 dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho(1 - \rho^2) d\rho = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

Таким чином

$$I = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{3} = \frac{3\pi}{8} + \frac{1}{3}.$$

$$\text{Відповідь: } I = \frac{3\pi}{8} + \frac{1}{3}.$$

1.3. Потрійний інтеграл

Нехай функція $u = f(x, y, z)$ визначена в обмеженій замкненій області G . Розіб'ємо область G сіткою поверхонь на n частин G_i , які не мають спільних внутрішніх точок, і об'єми яких дорівнюють $\Delta V_i, i = 1, 2, \dots, n$. У кожній частині G_i візьмемо довільну точку $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ і утворимо суму:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i,$$

яка називається інтегральною сумою для функції $f(x, y, z)$ по області G . Нехай $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(G_i)$ - найбільший з діаметрів областей G_i . Якщо інтегральна сума при $\lambda \rightarrow 0$ має скінчену границю, яка не залежить ні від способу розбиття області G на частини G_i , ні від вибору в них точок P_i , то ця границя називається потрійним інтегралом і позначається одним із таких символів:

$$\iiint_G f(x, y, z) dV, \quad \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz.$$

Таким чином, за означенням

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\zeta_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i \quad (1.10)$$

де $f(x, y, z)$ - функція інтегрована в області G ; G - область інтегрування; x, y і z - змінні інтегрування; dV (або $dx dy dz$) – елемент об'єму.

Якщо по тілу G розподілено масу з об'ємною густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)$ в точці $(x, y, z) \in G$, то маса m цього тіла знаходиться за формулою:

$$m = \iiint_G \gamma(x, y, z) dx dy dz. \quad (1.11)$$

Формула (1.11) може розглядатися як механічний зміст потрійного інтеграла, коли підінтегральна функція невід'ємна в області G . Якщо всюди в області G покласти $f(x, y, z) = 1$, то з формули (1.11) випливає формула для обчислення об'єму V тіла G :

$$V = \iiint_G dx dy dz \quad (1.12)$$

Потрійний інтеграл є безпосереднім узагальненням подвійного інтеграла на тривимірний простір. Теорія потрійного інтеграла аналогічна теорії подвійного інтеграла, тому в більшості випадків ми обмежимося лише формуваннями тверджень та короткими поясненнями.

Теорема (достатня умова інтегрованості функції). Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна в обмеженій замкненій області G , то вона в цій області інтегрована.

Властивості потрійних інтегралів.

1. Сталій множник можна винести за знак потрійного інтеграла:

$$\iiint_G C \cdot f(x, y, z) dV = C \cdot \iiint_G f(x, y, z) dV.$$

2. Потрійний інтеграл від суми кількох інтегровних функцій дорівнює сумі потрійних інтегралів від доданків:

$$\iiint_G (f(x, y, z) \pm \varphi(x, y, z)) dV = \iiint_G f(x, y, z) dV \pm \iiint_G \varphi(x, y, z) dV.$$

3. Якщо в області інтегрування $f(x, y, z) \geq 0$, то

$$\iiint_G f(x, y, z) dV \geq 0.$$

4. Якщо функції $f(x, y, z)$ та $\varphi(x, y, z)$ визначені в одній і тій самій області G і $f(x, y, z) \geq \varphi(x, y, z)$, то

$$\iiint_G f(x, y, z) dV \geq \iiint_G \varphi(x, y, z) dV.$$

5. (Адитивність потрійного інтеграла). Якщо область інтегрування G функції $f(x, y, z)$ розбити на частини G_1 і G_2 , які не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \iiint_{G_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{G_2} f(x, y, z) dV.$$

6. (Оцінка потрійного інтеграла). Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна в обмеженій замкненій області G , яка має об'єм V , то

$$mV \leq \iiint_G f(x, y, z) dV \leq MV,$$

де m і M – відповідно найменше і найбільше значення функції в області G .

7. (Середнє значення функції). Якщо функція неперервна $f(x, y, z)$ в обмеженій замкненій області G , яка має об'єм V , то в цій області існує така точка (x_0, y_0, z_0) , що

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = f(x_0, y_0, z_0) V.$$

Величина

$$f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{V} \iiint_G f(x, y, z) dV$$

називається середнім значенням функції $f(x, y, z)$ в області G .

Як і у випадку подвійних інтегралів, обчислення потрійного інтеграла зводиться до обчислення повторних, тобто до інтегрування по кожній змінній окремо.

Нехай область G обмежена знизу і зверху поверхнями $z = z_1(x, y)$ і $z = z_2(x, y)$, а з боків циліндричною поверхнею, твірна якої паралельна осі oz . Позначимо проекцію області G на площину oxy через D . Тоді для будь-якої неперервної в області G функції $f(x, y, z)$ має місце наступна формула:

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \quad (1.13)$$

Щоб обчислити потрійний інтеграл (1.13), треба спочатку обчислити інтеграл

$$\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz = I(x, y)$$

по змінній z , вважаючи x та y сталими.

Якщо область D , наприклад, обмежена кривими $y = \varphi_1(x)$ і $y = \varphi_2(x)$, де $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ – неперервні функції, тобто

$$G = \{z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\},$$

то, переходячи від подвійного інтеграла

$$\iint_D I(x, y) dx dy$$

до повторного

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz, \quad (1.14)$$

яка зводить обчислення потрійного інтеграла до послідовного обчислення трьох визначених інтегралів. Порядок інтегрування може бути й іншим, тобто

змінні x, y, z у правій частині формули (1.14) за певних умов можна міняти місцями.

Деякі застосування потрійного інтеграла

1. Обчислення об'ємів

Якщо деяке тіло є обмеженою і замкненою областю G , що має об'єм V , то згідно з формулою (1.12)

$$V = \iiint_G dx dy dz.$$

2. Застосування в механіці

Нехай G - обмежена замкнена область простору, яку займає деяке матеріальне тіло з густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)$, де $\gamma(x, y, z)$ - неперервна функція в області G , тоді:

а) маса цього тіла:

$$m = \iiint_G \gamma(x, y, z) dx dy dz.$$

б) моменти інерції тіла I_x, I_y, I_z відносно координатних осей ox, oy, oz відповідно дорівнюють:

$$I_x = \iiint_G (y^2 + z^2) \gamma dV,$$

$$I_y = \iiint_G (x^2 + z^2) \gamma dV,$$

$$I_z = \iiint_G (x^2 + y^2) \gamma dV.$$

Моменти інерції I_{xy}, I_{yz}, I_{xz} тіла відносно координатних площин oxy, oyz, oxz обчислюються за формулами:

$$I_{xy} = \iiint_G z^2 \gamma \, dV,$$

$$I_{yz} = \iiint_G x^2 \gamma \, dV,$$

$$I_{xz} = \iiint_G y^2 \gamma \, dV.$$

Момент інерції тіла відносно початку координат:

$$I_o = \iiint_G (x^2 + y^2 + z^2) \gamma \, dV.$$

в) статичні моменти M_{xy}, M_{yz}, M_{xz} тіла відносно координатних площин oxy, oyz, oxz обчислюються за формулами:

$$M_{xy} = \iiint_G z \, \gamma \, dV,$$

$$M_{yz} = \iiint_G x \, \gamma \, dV,$$

$$M_{xz} = \iiint_G y \, \gamma \, dV.$$

г) координати x_c, y_c, z_c центра маси тіла визначаються за формулами:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}; \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m}; \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Приклад 1. Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_G \frac{dx dy dz}{(1 + x + y + z)^3},$$

де область G обмежена площинами $x + y + z - 1 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$.

Розв'язок.

Область G обмежена координатними площинами $x = 0, y = 0, z = 0$ і площиною $x + y + z = 1$ (рис.1.3).

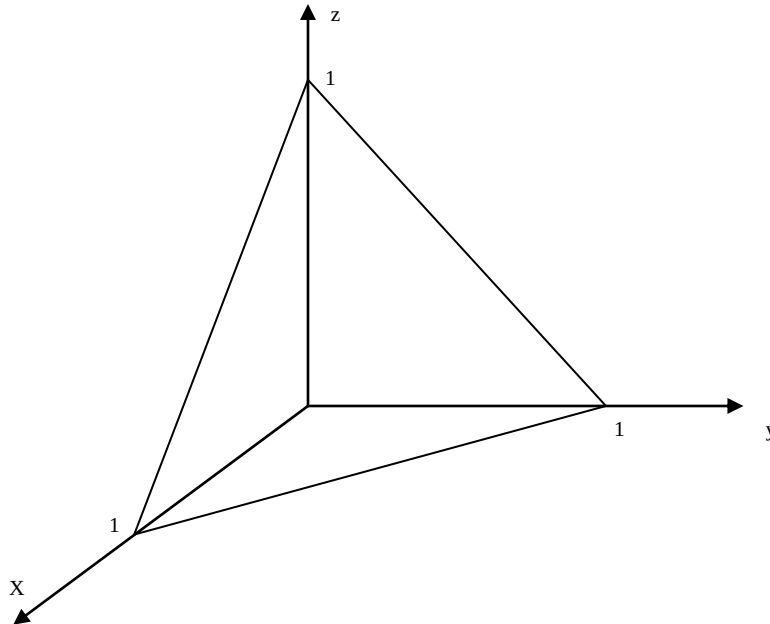


Рис.1.3.

Проекцією області G на площину oxy є область D , створена прямими $x = 0, y = 0, z = 0$. Область є правильною в напрямі осі oz , отже, потрібний інтеграл можна обчислити за формулою (3.5). Границі зміни x від 0 до 1; y від 0 до $1 - x$; z від 0 до $1 - x - y$. Тоді

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_G \frac{dx dy dz}{(1 + x + y + z)^3} = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left[\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1 + x + y + z)^3} \right] dy \right\} dx = \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1 + x + y + z)^3} = \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(\frac{1}{2(1 + x + y + z)^2} - \frac{1}{8} \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{1 + x} - \frac{3 - x}{4} \right) dx;
 \end{aligned}$$

Після обчислення визначеного інтеграла маємо:

$$I = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{4}{16} - \frac{9}{16} \approx 0,034.$$

Відповідь: $I = 0,034$.

Приклад 2. Знайти центр маси півкулі, обмеженої поверхнями $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, $z = 0$.

Розв'язок.

Координати $x_c = y_c = 0$, тому що півкуля симетрична відносно осі oz .

При $\gamma(x, y, z) = 1$ маємо:

$$z_c = \frac{M_{xy}}{m},$$

$$M_{xy} = \iiint_G z dx dy dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} = \pi \cdot \frac{R^4}{4}; \quad m = \frac{2}{3} \pi R^3.$$

$$\text{Тоді } z_c = \frac{3}{8} R.$$

Відповідь: $(0; 0; \frac{3}{8} R)$.

1.4. Формула Остроградського – Гауса

Формула Остроградського – Гауса встановлює зв'язок між поверхневим інтегралом по замкненій поверхні і потрійним інтегралом по просторовій області, обмеженій цією поверхнею. Ця формула є аналогом формули Гріна, яка, як відомо, встановлює зв'язок криволінійного інтеграла по замкнутому контуру з подвійним інтегралом по плоскій області, обмеженій цим контуром.

Нехай замкнена область G обмежена замкнутою поверхнею σ , причому знизу та зверху обмежена гладкими поверхнями σ_1 та σ_2 , рівняння яких $z = z_1(x, y)$ та $z = z_2(x, y)$. Припустимо, що проекцією області G на площину oxy є область D . Нехай в області G визначено неперервну функцію $R(x, y, z)$, яка в цій області має неперервну похідну $\frac{\partial R}{\partial z}$.

Розглянемо потрійний інтеграл:

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint_D R(x, y, z_2(x, y)) dx dy - \iint_D R(x, y, z_1(x, y)) dx dy.$$

У правій частині цієї рівності перший подвійний інтеграл запишеться за допомогою поверхневого інтеграла по зовнішній стороні поверхні σ_2 , а другий подвійний інтеграл – по зовнішній стороні поверхні σ_1 . Враховуючи кути між нормаллю $\vec{n}$ та віссю OZ , дістанемо

$$\begin{aligned} \iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{\sigma_1} R(x, y, z) dx dy + \iint_{\sigma_2} R(x, y, z) dx dy = \\ &= \iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Аналогічно, припустивши, що функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $\frac{\partial P}{\partial z}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}$ неперервні в області G , можна дістати наступні формули:

$$\iiint_G \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz, \quad (1.16)$$

$$\iiint_G \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_{\sigma} Q(x, y, z) dx dz \quad (1.17)$$

Додавши почленно рівності (1.15), (1.16) та (1.17), дістанемо наступну формулу:

$$\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\sigma} P dy dz + Q dx dz + R dx dy, \quad (1.18)$$

яку називають *формулою Остроградського – Гауса*. Ця формула справедлива і для довільної області, яку можна розбити на скінченне число областей, для яких виконуються рівності (1.15)-(1.17).

За допомогою формули Остроградського-Гауса зручно обчислювати інтеграли по замкнених поверхнях.

Приклад 1. Обчислити поверхневий інтеграл за допомогою формули Остроградського-Гауса:

$$I = \iint_{\sigma} x^2 dy dz + 3y dx dz - 2zx dx dy,$$

де σ - зовнішня сторона піраміди, обмеженої площинами:

$$x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z - 1 = 0.$$

Розв'язок.

Область G обмежена координатними площинами $x = 0, y = 0, z = 0$ і площиною $x + y + z - 1 = 0$ (рис.1.4).

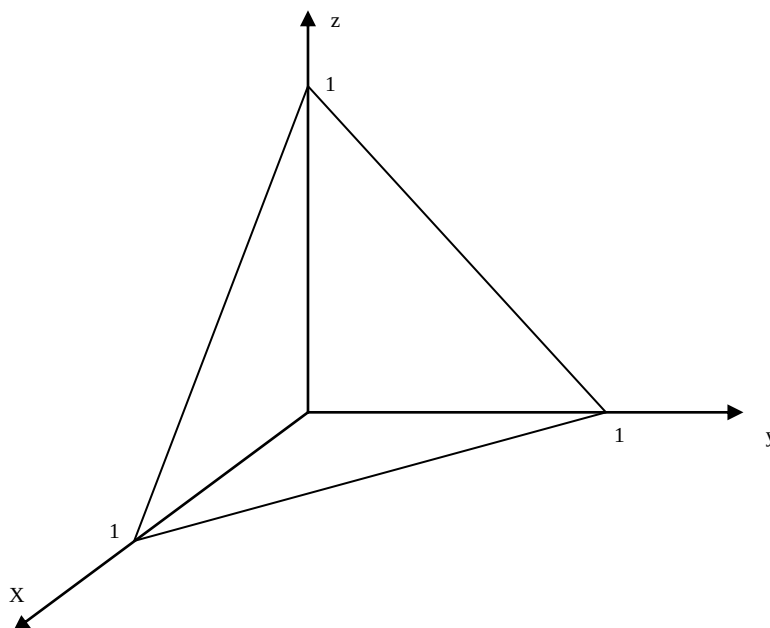


Рис.1.4.

Скористаємось формулою (1.18):

$$P = x^2, Q = 3y, R = -2xz;$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 3, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = -2x;$$

$$I = \iiint_G (2x + 3 - 2x) dx dy dz = 3 \iiint_G dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Відповідь: } I = \frac{1}{2}.$$

Розділ 2

СКАЛЯРНЕ І ВЕКТОРНЕ ПОЛЯ

2.1. Поверхні рівня

Розглянемо в деякій області D у просторі $Oxyz$ фізичну скалярну величину u , тобто таку величину, що повністю характеризується своїм числовим значенням. Наприклад, це може бути температура точок нагрітого тіла, густина розподілу електричних зарядів, потенціал електричного поля і т. ін. При цьому u називається скалярною функцією точки $P(x, y, z)$; записується це так: $u = u(p) = u(x, y, z)$.

Означення. Якщо в області D задана скалярна функція $u(P)$, то кажуть, що в цій області задано скалярне поле.

Скалярне поле називають *стаціонарним*, якщо величина $u(P)$ не залежить від часу t . Коли величина u залежить від часу t , тоді поле називають *нестационарним*.

Основним питанням дослідження скалярного поля є питання про зміну функції $u(P)$ при переході від однієї точки простору до іншої.

Означення. Поверхнею рівня скалярного поля називається геометричне місто точок, в яких функція u набуває сталого значення.

Через кожну точку P_0 області D проходить єдина поверхня рівня. Її рівняння у системі координат $Oxyz$ має вигляд $u(x, y, z) \equiv u(x_0, y_0, z_0) \equiv c$.

Якщо розподіл значень фізичної величини вивчається в якій-небудь плоскій області, тоді функція залежить від двох змінних x і y . Рівняння $u(x, y) = c$ визначає деяку криву, яку називають лінією рівня плоского скалярного поля.

2.2 Похідна за напрямом

Нехай задано скалярне поле, тобто задана функція $u = u(x, y, z)$. Візьмемо точку $P(x, y, z)$ і довільний одиничний вектор $\bar{e}\{\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma\}$. Для характеристики швидкості зміни функції у точці $P(x, y, z)$ в напрямі вектора $\bar{e}$ введемо поняття похідної за напрямом. Для цього проведемо через точку P промінь $\bar{\lambda}$ так, щоб його напрям збігався з напрямом вектора $\bar{e}$ і візьмемо на промені точку $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Позначимо величину відрізка PP_1 через ρ , тобто $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$, якщо точка P_1 розташована на промені $\bar{\lambda}$, з оберненим знаком, якщо точка P_1 розташована на промені протилежного напрямку.

Проекції вектора PP_1 на осі координат будуть з одного боку дорівнювати $\rho \cos \alpha, \rho \cos \beta, \rho \cos \gamma$, а з другого боку $(x - x_1), (y - y_1), (z - z_1)$. Тоді $x_1 = x + \rho \cos \alpha$, $y_1 = y + \rho \cos \beta$, $z_1 = z + \rho \cos \gamma$.

Розглянемо приріст, що отримає функція u при переході від точки P до точки P_1 : $\Delta u = u(P_1) - u(P) = u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - u(x, y, z) = u(x + \rho \cos \alpha, y + \rho \cos \beta, z + \rho \cos \gamma) - u(x, y, z)$, де $\Delta x = \rho \cos \alpha$, $\Delta y = \rho \cos \beta$, $\Delta z = \rho \cos \gamma$.

Якщо точка P_1 буде змінювати своє положення на промені $\bar{\lambda}$, то у виразі Δu буде змінюватися тільки величина ρ .

Складемо відношення $\frac{\Delta u}{\rho} = \frac{u(P_1) - u(P)}{\rho}$ і перейдемо до границі при $\rho \rightarrow 0$.

Означення. Границя відношення $\frac{\Delta u}{\rho}$ при $\rho \rightarrow 0$, якщо вона існує, називається похідною функції $u = f(P)$ за напрямом вектора $\bar{e}$ і позначається $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$, тобто $\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\rho}$.

Величина $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$ залежить від точки $P(x, y, z)$ та від напрямку промінню $\bar{\lambda}$, тобто від α, β, γ . З означення похідної за напрямом витікає, що якщо напрям $\bar{\lambda}$ співпадає з позитивним напрямом осі $Ox \left(\alpha = 0, \beta = \gamma = \frac{\pi}{2} \right)$, то границя буде дорівнювати частинній похідній $u(x, y, z)$ по x :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{u(x + \rho, y, z) - u(x, y, z)}{\rho} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Аналогічно, якщо напрям $\bar{\lambda}$ буде співпадати з напрямками Oy та Oz .

Оскільки $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ характеризують швидкість зміни функції u у напрямках Ox, Oy, Oz , похідна $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$ є швидкість зміни поля u у точці P за напрямом променя $\bar{\lambda}$. Абсолютна величина $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$ визначає величину швидкості, а знак похідної – характер змінювання функції u (зростання або спадання).

Для обчислення похідної за напрямом будемо користуватися наступною теоремою:

Теорема. Якщо функція $u(x, y, z)$ диференційовна в точці P , то похідна на напрямом існує та дорівнює

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \cos \gamma,$$

де $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ - напрямні косинуси променя $\bar{\lambda}$.

Д о в е д е н н я. $u(x, y, z)$ диференційовна у точці P , тому її приріст в цій точці вздовж λ можна записати у вигляді

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + \varepsilon,$$

де ε - нескінченно мала більш високого порядку, ніж

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

Оскільки $\Delta x = \rho \cos \alpha$, $\Delta y = \rho \cos \beta$, $\Delta z = \rho \cos \gamma$, маємо

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \rho \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \rho \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \rho \cos \gamma + \varepsilon.$$

$$\text{Тоді } \frac{\Delta u}{\rho} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma + \frac{\varepsilon}{\rho}.$$

Значення частинних похідних $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ у точці P , а також α, β, γ не

залежать від ρ , тому граничний перехід при $\rho \rightarrow 0$ дає

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\rho} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma.$$

З цієї формули видно, що похідна за напрямом $\bar{\lambda}'$, протилежним напрямові $\bar{\lambda}$, дорівнює похідній за напрямом $\bar{\lambda}$, взятим з оберненим знаком. Дійсно, при зміні напрямку α, β, γ змінюються на π

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda'} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\alpha + \pi) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\beta + \pi) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(\gamma + \pi) = -\frac{\partial u}{\partial \lambda}.$$

Це означає, що при зміні напрямку на протилежний абсолютна величина швидкості зміни функції u не змінюється – змінюється тільки характер її зміни. Якщо, наприклад, в напрямі $\bar{\lambda}$ функція зростає то в напрямі $\bar{\lambda}'$ вона спадає й навпаки.

2.3 Градієнт функції

Розглянемо вектор, проєкціями якого на осі координат будуть значення частинних похідних $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ у вибраній точці $P(x, y, z)$.

Означення. Градієнтом функції $u(x, y, z)$ називається вектор, проекціями якого служать значення частинних похідних цієї функції

$$\overline{\text{grad } u} = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k}.$$

Підкреслимо, що проекції градієнта залежать від вибору точки $P(x, y, z)$ і змінюються зі зміною координат цієї точки. Користуючись визначенням градієнта, формулу для похідної за напрямом можна записати таким чином:

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \overline{\text{grad } u} \cdot \bar{e}$$

Таким чином, похідна за напрямом дорівнює скалярному добутку градієнта функції на одиничний вектор цього напрямку, або ще так:

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = |\overline{\text{grad } u}| \cdot \cos \varphi,$$

де φ - кут між вектором $\overline{\text{grad } u}$ та променем $\bar{\lambda}$. Звідки випливає, що похідна за напрямом досягає найбільшого значення, коли $\cos \varphi = 1$, тобто при $\varphi = 0$. Це найбільше значення дорівнює $|\overline{\text{grad } u}|$.

Таким чином, $|\overline{\text{grad } u}|$ - найбільше можливе значення похідної $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$ у точці

P , а напрям $\overline{\text{grad } u}$ - це напрям, вздовж якого функція зростає найшвидше. У протилежному напрямі функція найшвидше спадає.

Доведемо тепер теорему, що дає зв'язок між напрямом градієнта функції та поверхнею рівня.

Теорема. Напрямок градієнта функції $u(x, y, z)$ в кожній точці співпадає з напрямом нормалі до поверхні рівня скалярного поля, що проходить через цю точку.

Д о в е д е н н я. Виберемо довільну точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$ і запишемо рівняння поверхні рівня, що через неї проходить $u(x, y, z) = u_0$, де $u_0 = u(x_0, y_0, z_0)$. Запишемо рівняння нормалі до цієї поверхні в точці P_0

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{P_0}} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{P_0}} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{P_0}}.$$

Звідси $\overline{\text{grad} u}(P_0)$ є напрямним вектором нормалі.

Таким чином, градієнт функції $u(x, y, z)$ у кожній точці напрямлений по нормалі до поверхні рівня скалярного поля, що проходить через цю точку.

Звідси випливає, що похідна $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$ по напрямку, дотичному до поверхні

рівня, дорівнює нулю, бо $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\cos \varphi = 0$, $\frac{\partial u}{\partial \lambda} = |\overline{\text{grad} u}| \cdot \cos \varphi = 0$. Вкажемо на

деякі властивості градієнта функції:

1. $\overline{\text{grad}(u_1 + u_2)} = \overline{\text{grad} u_1} + \overline{\text{grad} u_2}$;
2. $\overline{\text{grad}(c \cdot u_1)} = c \cdot \overline{\text{grad} u_1}$, де c - число;
3. $\overline{\text{grad}(u_1 \cdot u_2)} = \overline{\text{grad} u_1} \cdot u_2 + u_1 \cdot \overline{\text{grad} u_2}$;
4. $\overline{\text{grad} f(u)} = f'(u) \cdot \overline{\text{grad} u}$.

Доведемо останню властивість.

$$\begin{aligned} \overline{\text{grad} f(u)} &= \frac{\partial}{\partial x}[f(u)] \cdot \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}[f(u)] \cdot \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}[f(u)] \cdot \bar{k} = f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \\ &+ f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k} = f'(u) \cdot \overline{\text{grad} u}. \end{aligned}$$

Перелічені властивості градієнта співпадають з властивостями похідної функції.

У плоскому полі $u = u(x, y)$ градієнт функції $\overline{\text{grad} u} = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j}$ лежить

у площині Oxy і перпендикулярний до лінії рівня.

Приклад. Знайти похідну скалярного поля $u = x^2 yz + \arctg z$ у точці $P(-1; -1; 1)$ у напрямі вектора $\bar{e} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$.

Розв'язок. Обчислимо частинні похідні в точці P :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(P) = (2xyz) \Big|_P = 2 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 1 = 2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(P) = (x^2 z) \Big|_P = (-1)^2 \cdot 1 = 1;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(P) = \left(x^2 y + \frac{1}{1+z^2} \right) \Big|_P = (-1)^2 \cdot (-1) + \frac{1}{1+1^2} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Одиничним вектором $\bar{e}$, який збігається з $\bar{l}(3;4;0)$ буде вектор з координатами $\bar{e}(\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$, де

$$\cos \alpha = \frac{lx}{|\bar{l}|} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}} = \frac{3}{5}; \quad \cos \beta = \frac{ly}{|\bar{l}|} = \frac{4}{5}; \quad \cos \gamma = \frac{lz}{|\bar{l}|} = 0.$$

Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \cos \gamma = 2 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{4}{5} + \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot 0 = \frac{10}{5} = 2.$$

Приклад. Знайти похідну функції $u = 4 \ln(3 + x^2) - 8xyz$ за напрямом нормалі до поверхні $S: x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1$, у точці $M(1;1;1)$, що утворює гострий кут з додатним напрямом Oz .

Розв'язок. Обчислимо частинні похідні у точці M :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M) = \left(\frac{4}{3+x^2} \cdot 2x - 8yz \right) \Big|_M = \frac{4}{3+1^2} \cdot 2 \cdot 1 - 8 \cdot 1 \cdot 1 = -6;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(M) = (-8xz) \Big|_M = -8 \cdot 1 \cdot 1 = -8;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(M) = (-8xy) \Big|_M = -8 \cdot 1 \cdot 1 = -8.$$

Запишемо рівняння поверхні S у вигляді

$$F(x, y, z) = 0: \quad x^2 - 2y^2 + 2z^2 - 1 = 0.$$

Обчислимо координати нормалі $\bar{N}$ до цієї поверхні у точці M :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(M) = 2x \Big|_M = 2 \cdot 1 = 2; \quad \frac{\partial F}{\partial y}(M) = -4y \Big|_M = -4 \cdot 1 = -4;$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(M) = 4z \Big|_M = 4 \cdot 1 = 4.$$

$$\bar{N}(2; -4; 4).$$

Перевіримо, чи буде ця нормаль утворювати гострий кут з додатним напрямом осі Oz , який співпадає з напрямом вектора $\bar{k}(0; 0; 1)$.

$$\cos \left(\bar{N}, \bar{k} \right) = \frac{\bar{N} \cdot \bar{k}}{|\bar{N}| \cdot |\bar{k}|} = \frac{2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 4 \cdot 1}{\sqrt{4 + 16 + 16} \cdot \sqrt{1^2}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} > 0.$$

Якщо косинус кута позитивний, кут гострий. Знайдемо координати одиничного вектора $\bar{e}$ нормалі N :

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{4 + 16 + 16}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; \quad \cos \beta = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3};$$

$$\cos \gamma = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді} \quad \frac{\partial u}{\partial N} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \cos \gamma = -6 \cdot \frac{1}{3} - 8 \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) - \\ &- 8 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{6}{3} = -2. \end{aligned}$$

Приклад. Знайти похідну функції $z = x^2 - xy + y^2$ у точці $M(1; 1)$ за напрямом $\bar{l}$, що утворює кут α з додатним напрямом осі Ox . Знайти напрями $\bar{l}_1$ та $\bar{l}_2$, де похідна має найбільше та найменше значення.

Розв'язок. Знаходимо частинні похідні функції z у точці M :

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M) = (2x - y) \Big|_M = 2 \cdot 1 - 1 = 1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(M) = (-x + 2y) \Big|_M = -1 + 2 \cdot 1 = 1.$$

Одиничний вектор $\bar{e}$ напрямку $\bar{l}$ на площині має вид $\bar{e}(\cos \alpha; \sin \alpha)$, де α - кут між $\bar{l}$ та додатним напрямом Ox .

$$\text{Тоді} \quad \frac{\partial u}{\partial l} = 1 \cdot \cos \alpha + 1 \cdot \sin \alpha = \cos \alpha + \sin \alpha.$$

Як відомо, найбільше значення $\frac{\partial u}{\partial l}$ набуває у напрямі

$$\bar{l}_1 = \overline{\text{grad } z} = \frac{\partial z}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \bar{j} = 1 \cdot \bar{i} + 1 \cdot \bar{j} = \bar{i} + \bar{j}.$$

Найменше значення $\frac{\partial u}{\partial l}$ набуває у напрямі $\bar{l}_2 = -\overline{\text{grad } z} = -\bar{i} - \bar{j}$.

Приклад. Знайти величину та напрям градієнта поля $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$ у точках: а) $O(0;0;0)$; б) $A(2;0;1)$. В якій точці градієнт дорівнює нулю?

Розв'язок. Знайдемо частинні похідні функції u :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y + 3; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 4y + x - 2; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 6z - 6.$$

Обчислимо ці похідні у точках O та A :

$$\text{а) } \frac{\partial u}{\partial x}(O) = 3; \quad \frac{\partial u}{\partial y}(O) = -2; \quad \frac{\partial u}{\partial z}(O) = -6;$$

$$\overline{\text{grad } u}(O) = 3\bar{i} - 2\bar{j} - 6\bar{k};$$

$$|\overline{\text{grad } u}(O)| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{49} = 7;$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{7}; \quad \cos \beta = -\frac{2}{7}; \quad \cos \gamma = -\frac{6}{7}.$$

$$\text{б) } \frac{\partial u}{\partial x}(A) = 2 \cdot 2 + 3 = 7; \quad \frac{\partial u}{\partial y}(A) = 2 - 2 = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial z}(A) = 6 - 6 = 0;$$

$$\overline{\text{grad } u}(A) = 7\bar{i}; \quad |\overline{\text{grad } u}(A)| = 7;$$

$$\cos \alpha = \frac{7}{7} = 1; \quad \cos \beta = \frac{0}{7} = 0; \quad \cos \gamma = \frac{0}{7} = 0.$$

Градієнт функції дорівнює нулю, коли його координати дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} 2x + y + 3 = 0 \\ x + 4y - 2 = 0 \\ 6z - 6 = 0 \end{cases}$$

Розв'язав систему, отримаємо $x = -2$; $y = 1$; $z = 1$. Таким чином, $\overline{\text{grad}} u = 0$ у точці $M(-2; 1; 1)$.

Приклад. Знайти кут між градієнтами скалярних полів $u = \frac{yz^2}{x^2}$;

$$V = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3 \text{ у точці } M\left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Розв'язок. Обчислимо частинні похідні функцій u і v у точці M :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M) = \left(\frac{-2yz^2}{x^3} \right)_M = \frac{-2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3}}{(\sqrt{2})^3} = -\frac{\sqrt{2}}{3 \cdot 2\sqrt{2}} = -\frac{1}{6};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(M) = \left(\frac{z^2}{x^2} \right)_M = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{2} = \frac{1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(M) = \left(\frac{2yz}{x^2} \right)_M = \frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{1}{\sqrt{6}};$$

$$\bar{a} = \overline{\text{grad}} u(M) = -\frac{1}{6} \bar{i} + \frac{1}{6} \bar{j} + \frac{1}{\sqrt{6}} \bar{k}.$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(M) = \left(\frac{3x^2}{2} \right)_M = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3; \quad \frac{\partial v}{\partial y}(M) = (18y^2)_M = 18 \cdot \frac{1}{2} = 9;$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}(M) = (9\sqrt{6}z^2)_M = 9\sqrt{6} \cdot \frac{1}{3} = 3\sqrt{6};$$

$$\bar{b} = \overline{\text{grad}} v(M) = 3 \bar{i} + 9 \bar{j} + 3\sqrt{6} \bar{k}.$$

Обчислимо

$$\begin{aligned} \cos(\bar{a}, \bar{b}) &= \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{-\frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 9 + \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot 3\sqrt{6}}{\sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{6}} \cdot \sqrt{9 + 81 + 54}} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 3}{\sqrt{\frac{8}{36}} \cdot \sqrt{144}} = \\ &= \frac{4}{\sqrt{\frac{2}{9}} \cdot 12} = \frac{3}{3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Кут між градієнтами полей дорівнює $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Завдання для самостійної роботи

Приклад. Знайти похідну функції $z = x\sqrt{x} - \sqrt{y}$ у точці $M(3;1)$ за напрямом $\vec{l}$, що утворює кут $\alpha = 30^\circ$ з додатним напрямом осі Ox .

Приклад. Знайти похідну функції $u = y \ln(1 + x^2) + \arctg z$ у точці $M(0;1;1)$ за напрямом вектора $\overrightarrow{MN}$, де $N(-1;-1;3)$.

Приклад. Знайти похідну функції $z = \ln(x + y)$ у точці $M(1;2)$ параболу $y^2 = 4x$ за напрямом цієї параболу.

Приклад. $z = x^2 + y^2$. Побудувати лінії рівня функції z . Знайти $\overrightarrow{\text{grad}} z$ у довільній точці та у точці $M(3;4)$. Побудувати $\overrightarrow{\text{grad}} z$ у точці M та знайти $|\overrightarrow{\text{grad}} z(M)|$.

Приклад. В яких точках $|\overrightarrow{\text{grad}} z| = 1$, де $z = \arctg \frac{y}{x}$.

Приклад. Знайти похідну функції $u = \frac{1}{r}$, де $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, за напрямом її градієнта.

2.4 Векторні лінії

Означення. Якщо в кожній точці $M(x, y, z)$ області D у просторі $Oxyz$ визначен вектор $\vec{A}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$, то кажуть, що в цій області визначено векторне поле.

Наприклад, поле швидкостей потоку рідини, поле електричної напруги, поле магнітної напруги.

Для наочного зображення векторних полей використовують векторні лінії.

Означення. Векторною лінією називають лінію, в кожній точці якої напрям дотичної співпадає з напрямом вектора поля.

Якщо $\vec{A}(\mathbf{M})$ - поле швидкостей потоку рідини, то його векторні лінії – це траєкторії частинок рідини, які називаються лініями току рідини.

Якщо l - який-небудь замкнений контур, який не збігається з векторною лінією, то векторні лінії, що проходять через точки цього контура, утворюють векторну поверхню (векторну трубку).

Нехай $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ - параметричне рівняння векторної лінії, тоді її радіус – вектор дорівнює $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ напрямлений по дотичній до l . З означення векторної лінії вектори $\vec{A}$ і $d\vec{r}$ колінеарні в кожній точці l . Умови колінеарності

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

визначають систему рівнянь векторних ліній поля.

2.5 Потік вектора. Дивергенція

Розглянемо векторне поле $\vec{A}(\mathbf{M}) = P(\mathbf{M})\vec{i} + Q(\mathbf{M})\vec{j} + R(\mathbf{M})\vec{k}$ і деяку поверхню S , на якій виберемо певну сторону. Позначимо через $\vec{n}$ одиничний вектор нормалі до цієї сторони поверхні. Координати нормалі, як відомо, $\vec{n}(\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$. Розглянемо інтеграл по поверхні S від скалярного добутку векторів $\vec{A}(\mathbf{M})$ і $\vec{n}$:

$$\iint_S \vec{A}(\mathbf{M}) \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_S (P \cdot \cos \alpha + Q \cdot \cos \beta + R \cdot \cos \gamma) d\sigma$$

Якщо $\vec{A}(\mathbf{M})$ - поле швидкостей рідини, то цей інтеграл дає величину потоку рідини через поверхню S .

Означення. Поток вектора через поверхню S називається інтеграл по поверхні від скалярного добутку вектора поля на одиничний вектор нормалі до поверхні:

$$K = \iint_S \vec{A}(M) \cdot \vec{n} d\sigma.$$

З векторної алгебри відомо, що $\vec{A}(M) \cdot \vec{n} = A_n(M)$, де $A_n(M)$ - проекція вектора $\vec{A}(M)$ на напрям $\vec{n}$, тому можна також писати

$$K = \iint_S A_n(M) d\sigma.$$

Звідси, якщо проекція $A_n(M)$ на деякій частині поверхні стала, тоді потік через цю частину поверхні дорівнює $A_n \cdot Q$, де Q - площа частини поверхні.

Розглянемо тепер випадок, коли поверхня S замкнена. Якщо $\vec{n}$ - зовнішня нормаль, то кажуть про потік зсередини. Він позначається так:

$$K = \oiint_S A_n(M) d\sigma.$$

Коли векторне поле є поле швидкостей рідини, величина K дає різницю між кількістю рідини, що витікає, і кількістю рідини, яка втікає в область Ω , обмежену поверхнею S .

Якщо $K = 0$, то в область Ω втікає та витікає одна й та ж кількість рідини.

Якщо $K > 0$, то витікає рідини більше ніж втікає. Це означає, що в області Ω є джерела. Навпаки, якщо $K < 0$, то в Ω є стоки – місця, де рідина виводиться з потоку.

Розглянемо тепер деяку точку M векторного поля $\vec{A}(M)$ і замкнену поверхню S (точка M розташована всередині поверхні). Обчислимо відношення потоку вектора через цю поверхню до об'єму області Ω обмеженої поверхнею

$$\oiint_S A_n(M) d\sigma / V$$

В полі швидкостей рідини це відношення визначає кількість рідини, що утворюється в одиницю часу в області Ω , віднесена к одиниці об'єму, тобто середню об'ємну потужність джерела або стоку.

Якщо розглянути границю цього відношення, коли область Ω стягується в точку M , то дістанемо поняття дивергенції векторного поля.

Означення. Дивергенцією або розбіжністю векторного поля $\bar{A}(M)$ в точці M називається границя відношення $\text{div} \bar{A}(M) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\iint_S A_n(M) d\sigma}{V}$, де границя обчислюється за умовою, що поверхня S стягується до точки M .

В загальному векторному полі $\text{div} \bar{A}(M)$ характеризує потужність джерела або стоку поля в точці M . При $\text{div} \bar{A}(M) > 0$ це буде потужність джерела, а при $\text{div} \bar{A}(M) < 0$ - потужність стоку в точці M .

Теорема. Якщо функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, а також їх частинні похідні неперервні то дивергенція векторного поля $\bar{A}(M) = P(M)\bar{i} + Q(M)\bar{j} + R(M)\bar{k}$ обчислюється за формулою

$$\text{div} \bar{A}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

де значення частинних похідних беруться у точці M .

З теореми випливає, що формулу Остроградського-Гаусса можна зформулювати у векторній формі:

$$\iint_S A_n(M) d\sigma = \iiint_{\Omega} \text{div} \bar{A}(M) dV.$$

Потік векторного поля $\bar{A}(M)$ через замкнену поверхню S , яка лежить в цьому полі, в напрямі зовнішньої нормалі, дорівнює потрійному інтегралу по області Ω обмеженій цією поверхнею, від дивергенції цього векторного поля.

Розглянемо властивості дивергенції. Нехай $\bar{A}(M)$, $\bar{B}(M)$ - векторні функції точки, $\varphi(M)$ - скалярна функція точки. Тоді:

$$1. \text{div}(\bar{A} + \bar{B}) = \text{div} \bar{A} + \text{div} \bar{B};$$

$$2. \operatorname{div}(\varphi \cdot \bar{A}) = \varphi \cdot \operatorname{div} \bar{A} + \operatorname{grad} \varphi \cdot \bar{A}.$$

2.6. Циркуляція і ротор векторного поля

Розглянемо у векторному полі $\bar{A}(M)$ деяку лінію L та виберемо на L певний напрям. Позначимо через $d\bar{S}$ вектор, який має напрям дотичної до лінії, довжина якого дорівнює диференціалу довжини дуги

$$d\bar{S} = dx \cdot \bar{i} + dy \cdot \bar{j} + dz \cdot \bar{k}.$$

Розглянемо криволінійний інтеграл вздовж лінії L від скалярного добутку векторів $\bar{A}(M)$ і $d\bar{S}$.

Означення. Циркуляцією вектора $\bar{A}(M)$ вздовж замкненого контура L називається криволінійний інтеграл по цьому контуру від скалярного добутку вектора $\bar{A}(M)$ на вектор $d\bar{S}$ дотичної до контура

$$\mathcal{C} = \oint_L \bar{A}(M) \cdot d\bar{S} = \oint_L P(x, y, z) \cdot dx + Q(x, y, z) \cdot dy + R(x, y, z) \cdot dz.$$

У загальному векторному полі циркуляція є число, залежне від контура L . Якщо у полі є замкнені векторні лінії, то розглянемо одну з них у якості контура інтегрування. Тоді

$$\bar{A}(M) \cdot d\bar{S} = A_{\bar{S}}(M) = |\bar{A}(M)| > 0$$

і циркуляція буде позитивною. Якщо напрям інтегрування змінити на протилежний то циркуляція буде від'ємною.

Якщо L не є векторною лінією, то циркуляція буде тим більш, ніж ближче напрям вектора $\bar{A}(M)$ до напрямку відповідних дотичних.

Встановимо фізичний зміст циркуляції у полі швидкостей руху рідини. Нехай L - коло, що належить деякій площині. Будемо розглядувати це коло як периферію колеса з радіальними лопатками, що може обертатися навколо осі, перпендикулярної до його площини. Якщо $\mathcal{C} = 0$, то колесо не рухається. Якщо $\mathcal{C} \neq 0$, то колесо буде обертатися і тим швидше, чим більше циркуляція.

Щоб дати характеристику обертальної властивості поля $\bar{A}(M)$ у точці M , розглянемо границю відношення циркуляції вздовж плоского контура L (M знаходиться всередині L) до площі σ області, яка обмежена контуром. Границя розглядується за умовою, що контур L стягується у точку M

$$\lim_{L \rightarrow \sigma} \frac{\oint_L A_S(M) dS}{\sigma}.$$

Щоб обчислити цю границю, перетворимо вираз для циркуляції за формулою Стокса:

$$\oint_L A_S(M) dS = \oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_D \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cdot \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cdot \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot \cos \gamma \right] d\sigma,$$

де $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ - напрямні косинуси нормалі $\bar{n}$, яка проведена до області D , обмеженої контуром L . Останній інтеграл за теоремою про середнє дорівнює добутку значення підінтегральної функції у деякій точці P_1 області D на величину σ площі цієї області.

Коли контур L стягується в точку P , точка P_1 стягується в точку P .

Звідси
$$\lim_{L \rightarrow \sigma} \frac{\oint_L A_S dS}{\sigma} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cdot \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cdot \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot \cos \gamma,$$

де значення частинних похідних обчислюються у точці P . Права частина рівняння є скалярним добутком двох векторів, один з яких $\bar{n}(\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$ - нормаль до області D , а другий називається ротором поля $\bar{A}(M)$.

Означення. Ротором векторного поля $\bar{A}(M)$ називається вектор

$$\text{rot } \bar{A}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \bar{k} \quad \text{або} \quad \text{символічною}$$

формулою

$$\operatorname{rot} \bar{A}(M) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

За допомогою поняття ротора формулу Стокса можна зформулювати у векторній формі:

$$\iint_S \operatorname{rot} \bar{A} \cdot \bar{n} d\sigma = \oint_L \bar{A} \cdot d\bar{S}.$$

Потік ротора поля через поверхню S , обмежену контуром L , дорівнює циркуляції цього поля по цьому контуру. Перелічимо властивості ротора поля:

1. $\operatorname{rot}[C_1 \bar{A}_1 + C_2 \bar{A}_2] = C_1 \cdot \operatorname{rot} \bar{A}_1 + C_2 \cdot \operatorname{rot} \bar{A}_2$;
2. якщо $u(M)$ - скалярна функція, то $\operatorname{rot} u \cdot \bar{A} = u \cdot \operatorname{rot} \bar{A} + (\overline{\operatorname{grad} u} \cdot \bar{A})$.

2.7 Види векторних полів

Простішими векторними полями є такі, для яких або $\operatorname{div} \bar{A}(M) = 0$, або $\operatorname{rot} \bar{A}(M) = 0$, або одночасно дорівнюють нулю і дивергенція, і ротор.

2.7.1 Трубочасте (соленоїдне) векторне поле

Векторне поле називається *трубочастим* в області Ω , якщо в цій області немає джерел і стоків, тобто виконана умова $\operatorname{div} \bar{A}(M) = 0$.

Пояснимо зміст цієї назви. Розглянемо у полі векторну трубку між двома довільними перерізами S_1 і S_2 . Бічну поверхню трубки позначимо через S .

Згідно з формулою Остроградського запишемо

$$\iint_{S_1} A_n(M) d\sigma + \iint_{S_2} A_n(M) d\sigma + \iint_S A_n(M) d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \bar{A}(M) dV = 0, \text{ де } \bar{n} - \text{зовнішня}$$

нормаль.

Інтеграл $\iint_S A_n(M) d\sigma = 0$, оскільки вектори $\bar{A}$ і $\bar{n}$ ортогональні. Якщо в

інтегралі по поверхні S_2 змінити напрям нормалі, то отримаємо

$$\iint_{S_1} A_n(M) d\sigma = \iint_{S_2} A_n(M) d\sigma.$$

Потік соленоїдного через поперечний переріз векторної трубки сталий.

2.7.2. Потенціальне (безвихрове) векторне поле

Векторне поле називається *потенціальним* в області Ω , якщо у всіх точках $\text{rot } \bar{A}(M) = 0$.

Оскільки $\text{rot } \bar{A}(M) = 0$, то всі його координати дорівнюють нулю, тому

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Ці рівняння є умовою того, що вираз $P dx + Q dy + R dz$ буде повним диференціалом деякої функції $u(x, y, z)$. При цьому $P = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$, $R = \frac{\partial u}{\partial z}$,

$$\bar{A}(M) = \overline{\text{grad } u(M)}.$$

Функцію $u(M)$ називають потенціалом векторного поля.

Розглянемо властивості потенціального поля:

1. Циркуляція вектора $\bar{A}(M)$ вздовж будь-якого замкненого контура, який належить Ω , дорівнює нулю. З точки зору течії рідини це означає, що потік не має водоворотів.

2. Якщо крива L сполучає точки B, C , то $\int_{BC} \bar{A}(M) \cdot d\bar{S}$ не залежить від

шляху інтегрування й дорівнює різниці значень потенціалу поля в кінці і

початку інтегрування. $\int_{BC} \bar{A}(M) \cdot d\bar{S} = \int_B^C du = u(C) - u(B)$.

3. у потенціальному полі $\bar{A}(M)$ потенціал поля $\bar{A}(M)$ у довільній точці M можна обчислити за формулою

$$u(M) = \int_B^M \bar{A} \cdot d\bar{S} + D,$$

причому $D = u(B)$.

Для обчислення інтеграла можна вибрати будь-який шлях – це може бути ламана, паралельна осям координат, яка сполучає точки B і M . За точку B простіше вибрати початок координат.

2.7.3 Гармонічне (лапласово) векторне поле

Поле називається *гармонічним*, якщо воно соленоїдне і потенціальне, тобто $\operatorname{div} \bar{A}(M) = 0$ і $\operatorname{rot} \bar{A}(M) = 0$.

Звідси $\bar{A}(M) = \overline{\operatorname{grad} u(M)}$, причому потенціал поля $u(M)$ задовольняє рівнянню Лапласа $\operatorname{div} \overline{\operatorname{grad} u} = 0$.

Електростатичне поле зосередженого джерела – гармонічне.

Приклад. Обчислити потік векторного поля $\bar{A}(x, y, z) = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ крізь частину сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, розміщеної у першому октанті в напрямі зовнішньої нормалі.

Розв'язок. Оскільки потік векторного поля крізь задану поверхню S виражається поверхневим інтегралом $K = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy$, де $P = x$, $Q = y$, $R = z$, то потрібно обчислити інтеграл $K = \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$.

Розглянемо його як суму трьох інтегралів $K = I_1 + I_2 + I_3$.

Для обчислення I_1 спроекуємо поверхню на площину Oyz . Дістанемо чверть круга $D_{yz} : y^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$.

Рівняння сфери розв'яжемо відносно змінної x : $x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$. Тоді

$$I_1 = \iiint_{\rho} x \, dy \, dz = \iiint_{Dyz} \sqrt{1 - y^2 - z^2} \, dy \, dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2} \, \rho \, d\rho = \frac{\pi}{6}.$$

Приклад. Користуючись формулою Остроградського-Гаусса, обчислити потік векторного поля $\bar{A}(M) = x^2 \bar{i} + y^2 \bar{j} + z^2 \bar{k}$ крізь повну поверхню конуса $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0$.

Розв'язок. Знайдемо дивергенцію векторного поля

$$\operatorname{div} \bar{A}(M) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) = 2x + 2y + 2z.$$

$$\text{Тоді за формулою } K = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \bar{A} \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\Omega} 2(x + y + z) \, dx \, dy \, dz =$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^{1-\rho} (\rho \cos \varphi + \rho \sin \varphi + 1) \, dz = \frac{\pi}{3}.$$

Приклад. Обчислити дивергенцію і потік вектора напруги електростатичного поля, утвореного зосередженим джерелом.

Розв'язок. Нехай джерело знаходиться на початку координат. Тоді

$$\bar{E} = \frac{q}{r^3} \cdot \bar{r}, \quad \text{де } \bar{r} = x \bar{i} + y \bar{j} + z \bar{k}. \text{ Похідні проекцій вектора } \bar{E} \text{ відповідно}$$

$$\text{дорівнюватиме: } \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{qx}{r^3} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{qx}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \right) =$$

$$= q \frac{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3} - x \cdot \frac{3}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = q \frac{r^3 - 3x^2 r}{r^6} = q \frac{r^2 - 3x^2}{r^5};$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{qy}{r^3} \right) = q \frac{r^2 - 3y^2}{r^5};$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{qz}{r^3} \right) = q \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}.$$

$$\text{Звідси } \operatorname{div} \bar{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{q}{r^5} [3r^3 - 3(x^2 + y^2 + z^2)] = 0.$$

Доведено, що дивергенція електростатичного поля зосередженого джерела дорівнює нулю.

Обчислимо потік вектора напруги через замкнену поверхню S у бік її зовнішньої нормалі.

Якщо поверхня S не містить всередині себе джерела, тоді за формулою Остроградського-Гаусса дістанемо $\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma = 0$.

Нехай S -сфера з центром на початку координат. Тоді

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma = \oint_S \frac{q}{r^3} \cdot \vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} d\sigma = q \oint_S \frac{r^2}{r^4} d\sigma = \frac{q}{r^2} \oint_S d\sigma = \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi q.$$

Приклад. Обчислити циркуляцію вектора $\vec{A} = -y\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}$ вздовж кола $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ в додатному напрямі.

Розв'язок. Параметричне рівняння кола L має вигляд $x = \cos t, y = \sin t, z = 0, 0 \leq t \leq 2\pi$. Оскільки $P = -y = -\sin t, Q = x = \cos t, R = 1, dx = -\sin t dt, dy = \cos t dt, dz = 0$, то за означенням циркуляції дістаємо

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \oint_L (-y)dx + xdy + dz = \int_0^{2\pi} ((-\sin t)(-\sin t) + \cos t \cdot \cos t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Приклад. Знайти ротор поля $\vec{A} \times \vec{B}$, де $\vec{A}(M) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} - z^2\vec{k}$ і $\vec{B}(M) = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

Розв'язок. Згідно з визначенням векторного добутку, маємо:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x^2 & y^2 & -z^2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (2y^2 - x^2)\vec{i} - (2x^2 + z^2)\vec{j} - (x^2 + y^2)\vec{k}.$$

$$\text{Тоді } \operatorname{rot} \bar{C} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y^2 - x^2 & -3x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} = -2y \bar{i} + 2x \bar{j} - 2(3x + 2y) \bar{k}.$$

Приклад. Обчислити циркуляцію векторного поля $\bar{A} = xz \bar{i} + yx \bar{j} + zy \bar{k}$ вздовж лінії перетину площини $x + y + z = 3$ з координатними площинами за формулою Стокса.

Розв'язок. Розглянемо верхню сторону площини S та відповідний цій стороні додатний напрям $ABCA$, де $A(3;0;0), B(0;3;0), C(0;0;3)$. Маємо

$$P = xz, \quad Q = yx, \quad R = xy, \quad \operatorname{rot} \bar{A} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & yx & zy \end{vmatrix} = z \bar{i} + x \bar{j} + y \bar{k}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } \Pi &= \oint_{ABCA} \bar{A} \cdot d\bar{S} = \iint_S \operatorname{rot} \bar{A} \cdot \bar{n} d\sigma = \iint_S (z \cdot \cos \alpha + x \cdot \cos \beta + y \cdot \cos \gamma) d\sigma = \\ &= \iint_S z \cdot dy dz + x dx dz + y dx dy. \end{aligned}$$

Виразимо поверхневий інтеграл через подвійний інтеграл по областях, які є проекціями $\bar{S}$ на координатній площині:

$$\Pi = \iint_{\Delta BCO} z dy dz + \iint_{\Delta AOC} x dx dz + \iint_{\Delta ABO} y dx dy.$$

$$\text{Маємо } \iint_{\Delta ABO} y dx dy = \int_0^3 y dy \int_0^{3-y} dx = 4,5.$$

$$\text{Аналогічно } \iint_{\Delta BCO} x dy dz = \iint_{\Delta AOC} x dx dz = 4,5.$$

$$\text{Отже } \Pi = 3 \cdot 4,5 = 13,5.$$

Приклад. Показати, що поле $\bar{A}(M) = yz(2x + y + z) \bar{i} + xz(x + 2y + z) \bar{j} + xy(x + y + 2z) \bar{k}$ - потенціальне і знайти його потенціал.

Розв'язок. Обчислимо частинні похідні:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = x^2 + 2xy + 2xz;$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = y^2 + 2xy + 2yz;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = z^2 + 2xz + 2xy.$$

Поле потенціальне.

За шлях інтегрування виберемо ламану $OABM$, де $O(0;0;0)$, $A(X;0;0)$, $B(X;Y;0)$, $M(X;Y;Z)$. Знаходимо:

$$u(x; y; z) = \int_{OABM} \bar{A} \cdot d\bar{S} + C = \int_O^A \bar{A} \cdot d\bar{S} + \int_A^B \bar{A} \cdot d\bar{S} + \int_B^M \bar{A} \cdot d\bar{S} + C;$$

$$\bar{A} \cdot d\bar{S} = yz(2x + y + z)dx + xz(x + 2y + z)dy + xy(x + y + 2z)dz.$$

Тоді на OA маємо: $x = X$, $dx = 0$, $Z = 0$, $dz = 0$, $0 \leq y \leq Y$;

$$\int_A^B \bar{A} \cdot d\bar{S} = 0.$$

На BM маємо: $x = X$, $y = Y$, $dx = dy = 0$, $0 \leq z \leq Z$;

$$\int_B^M \bar{A} \cdot d\bar{S} = \int_0^Z XY(X + Y + 2Z)dz = XY(XZ + YZ + Z^2) = XYZ(X + Y + Z).$$

Повертаючись до змінних x, y, z , дістанемо $u(M) = xyz(x + y + z) + C$.

Задачі для самостійної роботи

Приклад. Довести, що потік радіуса-вектора $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ через довільну гладку замкнену поверхню дорівнює потроєному об'єму тіла, обмеженого цією поверхнею.

Приклад. Знайти потік векторного поля $\bar{A}(M) = x\bar{i} + y\bar{j} + (z - 2)\bar{k}$ через замкнену поверхню, що утворюється частиною поверхні $S : x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0)$ і частиною площини $P : z = 1$ (нормаль зовнішня).

Приклад. Обчислити циркуляцію вектора $\vec{A} = z\vec{i} - y\vec{k}$ вздовж контура $L: \{x^2 + y^2 = 4, \quad x + 2z = 5\}$ двома способами: безпосередньо і за формулою Стокса.

Зразок білета залікового модуля

1. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду:

$$\iint_{\sigma} z d\sigma,$$

де σ – півсфера $x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad z \geq 0$.

2. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду:

$$I = \iint_{\sigma} x dy dz + y dx dz + z^2 dx dy,$$

де σ - зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, розміщена у другому октанті.

3. Обчислити потрійний інтеграл:

$$\iiint_{\sigma} z dx dy dz,$$

якщо область G обмежена площинами $x + y + z + 1 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$.

4. Знайти швидкість змінювання скалярного поля $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$ у точці $M(1; -3; 4)$ за напрямом вектора $\vec{l} = -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

5. Обчислити похідну скалярного поля $u = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$ у точці $M(0; -3; 4)$ за напрямом нормалі до поверхні $S: 2x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0$, яка створює гострий кут із позитивним напрямом осі Oz .

6. Знайти кут між градієнтами скалярних полів $u = \frac{x}{yz^2}$, $V = x^2 - y^2 - 3z^2$ у

точці $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

7. Обчислити потік векторного поля

$\vec{A}(M) = (2y - 5x)\vec{i} + (x - 1)\vec{j} + (2\sqrt{xy} + 2z)\vec{k}$ крізь замкнену поверхню

$S: 2x + 2y - z = 4, x = 0, y = 0, z = 0$ (нормаль зовнішня) за формулою Остроградського.

8. Знайти модуль циркуляції векторного поля $\vec{A}(M) = xz\vec{i} - \vec{j} + y\vec{k}$ вдовж контура $L: x^2 + y^2 + z^2 = 4, z = 1$.

Розділ 3

ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

3.1. Основні поняття та означення

3.1.1. Задачі математичної статистики

Математична статистика – розділ вищої математики, який присвячений розробленню методів систематизації, опрацювання та аналізу емпіричних числових даних, вивченню закономірностей масових явищ та їх взаємозв'язків. Основна мета математичної статистики полягає в тому, щоб на основі результатів обмеженого числа спостережень за масовим явищем виявити закономірності його поведінки, які дають можливість подальшого прогнозування.

Перша задача математичної статистики – вказати способи збору та групування статистичних відомостей, які отримано в результаті спостережень або експериментів.

Друга задача математичної статистики – розробити методи аналізу статистичних даних у залежності від цілей дослідження:

- а) оцінка невідомої ймовірності події, оцінка невідомої функції розподілу, оцінка параметрів відомого розподілу тощо;
- б) перевірка статистичних гіпотез щодо типу невідомого розподілу або величини параметрів відомого розподілу.

3.1.2. Генеральна і вибіркова сукупності

Означення. Під *генеральною сукупністю* розуміють множину всіх реально існуючих або навіть тільки уявно можливих однорідних об'єктів, які вивчають під кутом зору їх розподілу за деякою ознакою.

Оскільки практично будь-яка ознака генеральної сукупності допускає кількісну оцінку, то замість того щоб говорити про розподіл одиниць сукупності за ознакою, можна говорити про розподіл деякої випадкової величини X ; експеримент, з яким пов'язана випадкова величина X , полягає у виборі навмання одного представника даної сукупності, а значення x , яке приймає X , є значенням ознаки для цього представника.

Зрозуміло, що повний опис закону розподілу випадкової величини X можна отримати, з'ясувавши значення ознаки для всіх без винятку представників даної сукупності. В окремих випадках так і роблять, наприклад, дані про поділ жителів країни щодо статі, віку, тощо отримують у результаті загальних переписів населення, які проводяться раз на кілька десятиліть.

У багатьох випадках повне дослідження всієї сукупності пов'язано з низкою труднощів. Насамперед, це великий обсяг сукупності. У деяких випадках ми можемо мати сукупність, яка не існує в готовому вигляді. Наприклад, якщо нас цікавить розподіл похибки, яку допускає вимірювальний прилад, то сукупність становитиме перелік усіх можливих вимірювань, які можна здійснити за допомогою даного приладу. Зрозуміло, що обстежити всі елементи такої сукупності неможливо. В цьому випадку говорять, що сукупність є нескінченною.

Щоб подолати такі труднощі, обстеження всієї сукупності замінюють обстеженням невеликої (до того ж вибраної навмання) її частини. Таку частину генеральної сукупності називають **вибірковою сукупністю** або **вибіркою**

Означення. *Обсягом* сукупності (генеральної чи вибіркової) називають число всіх об'єктів цієї сукупності.

Нехай з генеральної сукупності витягнуто вибірку, причому, x_1 спостерігалось n_1 разів, x_2 - n_2 разів, ..., x_k - n_k разів. Величини x_i називають варіантами вибірки, n_i - частотами, $\sum n_i = n$ - обсяг вибірки. Послідовність варіантів, що записана у порядку зростання називають варіаційним рядом. Відношення частот до обсягу вибірки, тобто, $W_i = \frac{n_i}{n}$ називають відносними частотами. Для кожної вибірки виконується рівність

$$\sum_{i=1}^k W_i = 1.$$

Означення. *Статистичним розподілом вибірки* називають перелік варіантів і відповідних ним частот. Статистичний розподіл можна задати також у вигляді послідовності інтервалів та частот, які ним відповідають, (у якості частоти, що відповідає даному інтервалу, приймають суму частот, які потрапили у цей інтервал). У табличній формі дискретний статистичний розподіл має такий вигляд:

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_m
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_m

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_m
w_i	w_1	w_2	$\dots$	w_m

Інтервальний статистичний розподіл має вигляд

$(x_{i-1}; x_i]$	$(x_0; x_1]$	$(x_1; x_2]$	$\dots$	$(x_{m-1}; x_m]$
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_m

Якщо треба від інтервального статистичного розподілу перейти до дискретного, досить частинні проміжки $(x_{i-1}; x_i]$ замінити числами - серединами цих проміжків, тобто прийняти $y_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$, а відповідні їм значення частот (відносних частот) залишити без змін.

3.1.3. Полігон і гістограма частот

Статистичний розподіл вибірки можна задати графічно полігоном або гістограмою частот (відносних частот).

Полігон розподілу вибірки використовується для зображення як дискретних, так і інтервальних варіаційних рядів, а гістограма тільки для інтервальних варіаційних рядів.

Означення. *Полігоном частот* називають ламану, відрізки якої послідовно з'єднують точки (x_1, n_1) , (x_2, n_2) , ..., (x_m, n_m) координатної площини.

Означення. *Полігоном відносних частот* називають ламану, відрізки якої послідовно з'єднують точки (x_1, w_1) , (x_2, w_2) , ..., (x_m, w_m) прямокутної системи координат xOw .

Означення. *Гістограмою частот* називається східчаста фігура, яка складена з прямокутників, основами яких є частинні проміжки $(x_{i-1}; x_i]$, а їх

висоти $h_i = \frac{n_i}{x_i - x_{i-1}}$. Площа кожного з прямокутників дорівнює n_i .

Означення. *Гістограмою відносних частот* називається східчаста фігура, яка складена з прямокутників, основами яких є частинні проміжки $(x_{i-1}; x_i]$, а їх висоти $h_i = \frac{w_i}{x_i - x_{i-1}}$. Площа кожного з прямокутників дорівнює w_i .

3.1.4. Емпірична функція розподілу

Означення. Функція аргументу x , що визначає відносну частоту події $X < x$, тобто

$$F^*(x) = W(X < x) = \frac{n_x}{n}, \quad (3.1)$$

називається *емпіричною функцією*.

Тут n – обсяг вибірки, n_x – кількість варіант статистичного розподілу вибірки, значення яких менше за фіксовану варіанту x ; $F^*(x)$ – називають ще *функцією розподілу відносних частот*.

За означенням $F^*(x)$ – розривна східчаста функція, неперервна зліва, дорівнює нулю лівіше найменшого і одиниці – правіше найбільшого значення випадкової величини X . Отже, коли вихідні статистичні дані сгруповані в дискретний варіаційний ряд, то емпірична функція розподілу:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1; \\ \frac{n_1}{n}, & x_1 \leq x \leq x_2; \\ \frac{n_1 + n_2}{n}, & x_2 \leq x \leq x_3; \\ \dots\dots\dots; \\ \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_{m-1}}{n}, & x_{m-1} \leq x \leq x_m; \\ 1, & x > x_m. \end{cases}$$

Властивості $F^*(x)$:

- 1) $0 \leq F^*(x) \leq 1$;
- 2) $F^*(x_{\min}) = 0$, де $x_{\min}$ є найменшою варіантою варіаційного ряду;
- 3) $F^*(x) \Big|_{x > x_{\max}} = 1$, де $x_{\max}$ є найбільшою варіантою варіаційного ряду;

4) $F^*(x)$ є неспадною функцією аргументу x , а саме: $F(x_2) \geq F(x_1)$ при $x_2 \geq x_1$.

Графік функції $F^*(x)$ зображено на рис. 3.1.

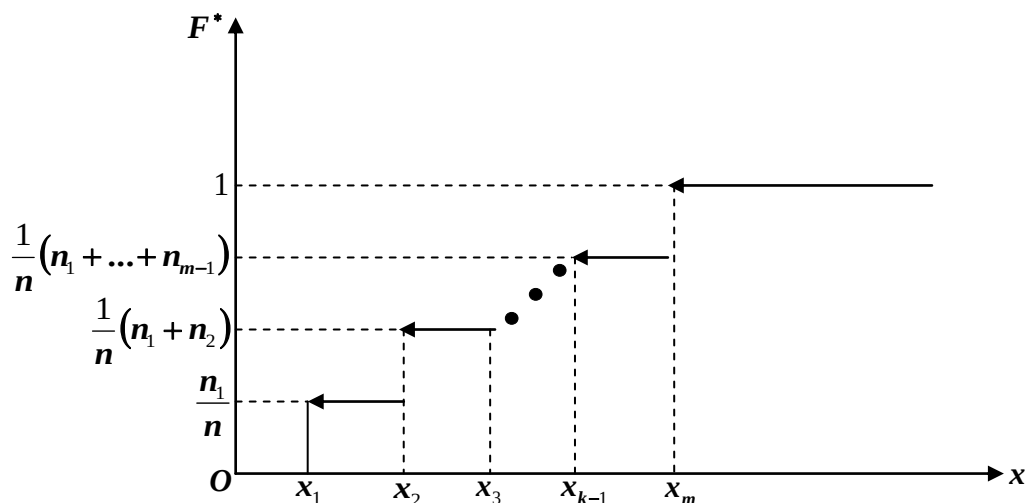


Рис. 3.1

Аналітично емпірична функція розподілу інтервального статистичного ряду вибірки записується так:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_0; \\ F_1^*(x), & x_0 \leq x \leq x_1; \\ F_2^*(x), & x_1 \leq x \leq x_2; \\ \dots\dots\dots; \\ F_m^*(x), & x_{m-1} \leq x \leq x_m; \\ 1, & x > x_m. \end{cases}$$

$$\text{де } F_i^*(x) = \frac{w_i}{x_i - x_{i-1}} (x - x_{i-1}) + \omega_{i-1}, \quad (3.2)$$

$\omega_0 = 0$, $\omega_i = w_1 + w_2 + \dots + w_i$. Графік емпіричної функції для інтервального варіаційного ряду зображено на рис. 3.2.

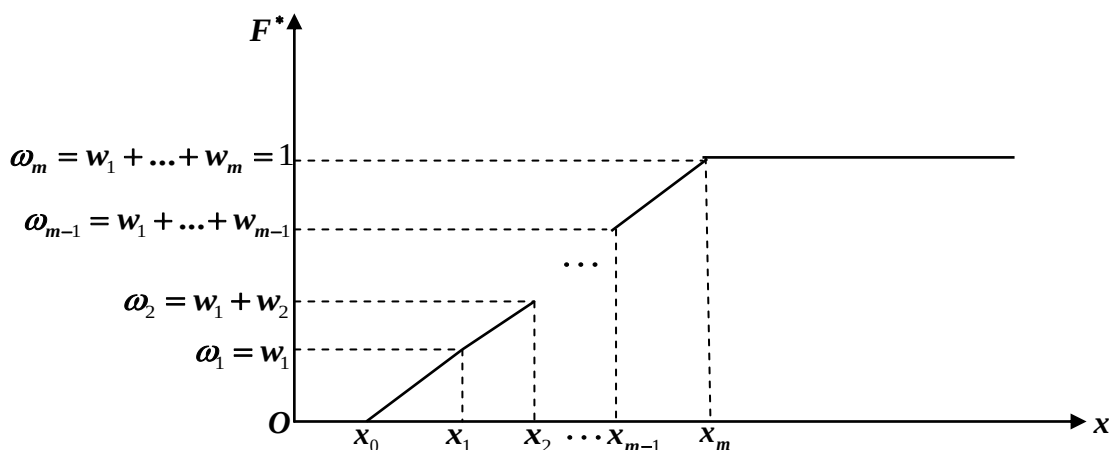


Рис. 3.2.

Приклад 1. Для вивчення прибутків генеральної сукупності підприємств регіону утворено вибірку, яка характеризується такими даними: 5, 4, 3, 6, 7, 6, 8, 5, 6, 7, 5, 6, 3, 6, 5, 7, 4, 7, 9, 4. Виконати такі завдання:

- 1) Записати дискретний статистичний розподіл вибірки, побудувати полігони частот і відносних частот та емпіричну функцію розподілу;
- 2) Записати інтервальну таблицю частот і відносних частот, поділивши проміжок на чотири рівні частини, і побудувати гістограму та емпіричну функцію розподілу.

Розв'язання. Записуємо варіаційний ряд варіант, визначаємо частоти та відносні частоти варіант і результати заносимо в таблицю:

x_i	3	4	5	6	7	8	9
n_i	2	3	4	5	4	1	1
w_i	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$

Будуємо полігон частот як ламану, відрізки якої з'єднують точки (x_i, n_i) , і полігон відносних частот – ламану, відрізки якої з'єднують точки (x_i, w_i) рис. 3.3 і 3.4 відповідно.

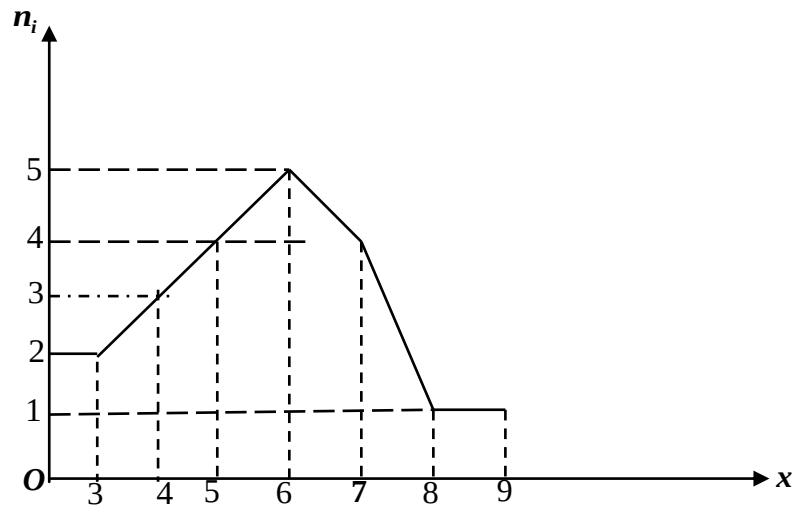


Рис. 3.3.

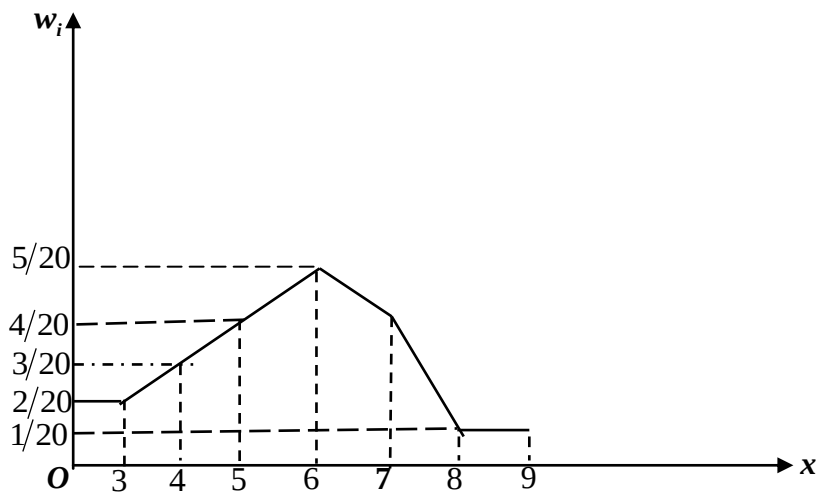


Рис. 3.4.

Емпірична функція розподілу має такий вигляд:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3; \\ \frac{2}{20}, & 3 < x \leq 4; \\ \frac{5}{20}, & 4 < x \leq 5; \\ \frac{9}{20}, & 5 < x \leq 6; \\ \frac{14}{20}, & 6 < x \leq 7; \\ \frac{18}{20}, & 7 < x \leq 8; \\ \frac{19}{20}, & 8 \leq x \leq 9; \\ 1, & x > 9. \end{cases}$$

Дістанемо графічне зображення емпіричної функції розподілу (рис. 3.5):

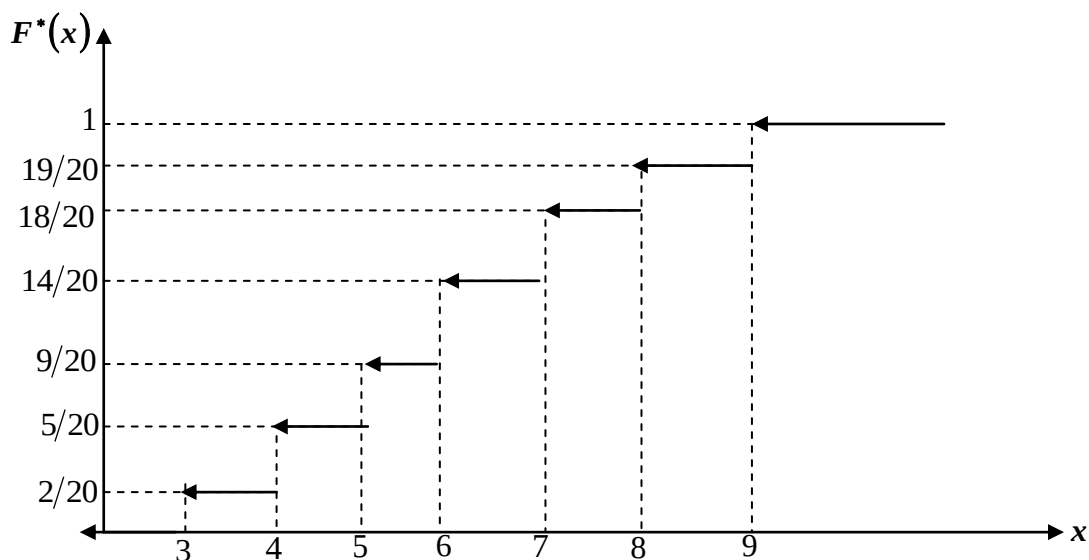


Рис. 3.5.

Будуємо інтервальний варіаційний ряд, поділивши проміжок $[3;9]$ на 4 рівних частини довжиною **1,5**, і одержуємо інтервальну таблицю частот і відносних частот:

$[x_{i-1}, x_i)$	$[3; 4,5)$	$[4,5; 6)$	$[6; 7,5)$	$[7,5; 9]$
n_i	5	4	9	2
w_i	$\frac{5}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{2}{20}$

Гістограмою є східчаста фігура, яка складається з прямокутників з основами $[x_{i-1}, x_i)$ і висотами $h_1 = \frac{5}{1,5} = 3,3$, $h_2 = \frac{4}{1,5} = 2,7$, $h_3 = \frac{9}{1,5} = 6$, $h_4 = \frac{2}{1,5} = 1,3$,
рис. 3.6.

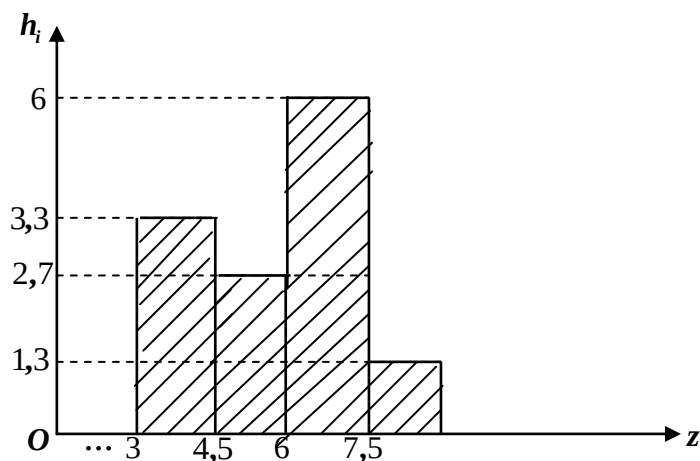


Рис. 3.6.

Емпірична функція розподілу, яка визначена на підставі інтервальної таблиці частот, відповідно до формули (3.2) записується так

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3; \\ \frac{5}{20 \cdot 1,5}(x-3), & 3 < x \leq 4,5; \\ \frac{4}{20 \cdot 1,5}(x-4,5) + \frac{5}{20}, & 4,5 < x \leq 6; \\ \frac{9}{20 \cdot 1,5}(x-6) + \frac{9}{20}, & 6 < x \leq 7,5; \\ \frac{2}{20 \cdot 1,5}(x-7,5) + \frac{18}{20}, & 7,5 < x \leq 9; \\ 1, & x > 9. \end{cases}$$

Графік цієї функції побудовано на рис. 3.7.

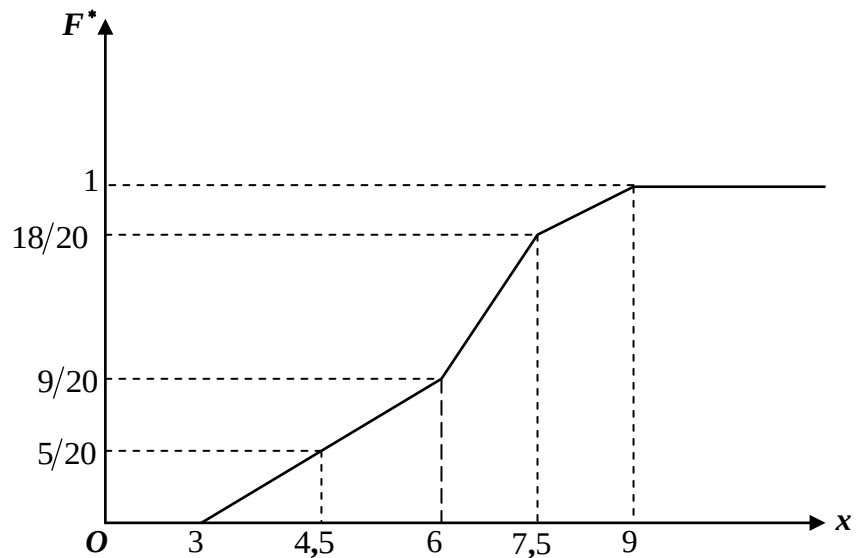


Рис. 3.7.

3.2. Статистичні оцінки параметрів розподілу

Статистичною оцінкою θ^* невідомого параметра θ теоретичного розподілу називають функцію $f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ від спостережуваних випадкових величин $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, що дає наближене значення оцінюваного параметра.

Точковою називають статистичну оцінку, що визначається одним числом $\theta^* = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, де $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ – результати n спостережень над кількісною ознакою X , тобто вибірка.

Інтервальною називається оцінка, що визначається двома числами – кінцями інтервалу, що покриває оцінюваний параметр. Інтервальні оцінки дозволяють визначити точність і надійність оцінок.

Для того щоб статистичні оцінки давали «хороші», наближення оцінюваних параметрів, вони повинні задовольняти певним вимогам.

Щоб уникнути систематичних помилок, математичне сподівання оцінки θ^* повинне дорівнювати оцінюваному параметру θ . Незміщеною називається точкова оцінка θ^* , математичне сподівання якої дорівнює оцінюваному параметру θ при будь-якому об'ємі вибірки, тобто $M(\theta^*) = \theta$. Зміщеною

називається оцінка, математичне сподівання якої не дорівнює оцінюваному параметру.

Для виключення можливості допущення великої помилки, необхідно, щоб дисперсія статистичної оцінки θ^* була малою. *Ефективною* називається статистична оцінка, що (при заданому об'ємі вибірки n) має найменшу можливу дисперсію.

Якщо об'єм вибірки великий (n велике), то статистична оцінка повинна бути обґрунтованою. *Обґрунтованою* називається статистична оцінка, що при $n \rightarrow \infty$ прямує до оцінюваного параметра.

3.2.1. Точкові оцінки.

Генеральна середня

Генеральною середньою $\overline{x}_T$ кількісної ознаки X дискретної генеральної сукупності називається середнє арифметичне значення цієї ознаки.

Якщо всі значення $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ ознаки генеральної сукупності об'єму N різні, то

$$\overline{x}_T = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}.$$

Якщо значення ознаки $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ мають відповідно частоти $N_1, N_2, N_3, \dots, N_k$, причому $N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_k = N$, то

$$\overline{x}_T = \frac{N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + \dots + N_k x_k}{N} = \frac{\sum_{i=1}^k N_i x_i}{N}.$$

Таким чином, генеральна середня є середньою зваженою значень ознаки генеральної сукупності з вагами, рівними відповідним частотам.

Якщо задано інтервальний статистичний розподіл, то при визначенні $\overline{x}_T$ замість x_i необхідно підставляти середину i -го інтервалу.

Помітимо, що якщо розглядати досліджувану ознаку X генеральної сукупності (з дискретним або неперервним розподілом цієї ознаки) як випадкову величину, то її математичне сподівання дорівнює генеральній середній, тобто

$$M(X) = \overline{x_T}.$$

Вибіркова середня

Вибірковою середньою $\overline{x_B}$ кількісної ознаки X називається середнє арифметичне значення цієї ознаки вибіркової сукупності.

Якщо всі значення ознаки $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ вибірки об'єму n різні, то

$$\overline{x_B} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

Якщо значення ознаки (варіанти вибірки) $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ мають відповідно частоти $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$, причому $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$, то

$$\overline{x_B} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + \dots + n_k x_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i}{n}.$$

Таким чином, вибіркова середня є середньою зваженою значень ознаки вибірки з вагами, рівними відповідним частотам.

Вибіркова середня є незміщеною і обґрунтованою оцінкою генеральної середньої (математичного сподівання). Якщо по декількох вибірках досить великого об'єму з однієї й тієї ж генеральної сукупності знайти вибіркові середні, то вони будуть приблизно рівні між собою. Ця властивість називається властивістю сталості вибірових середніх.

Якщо задано інтервальний статистичний розподіл, то при визначенні $\overline{x_B}$ замість x_i необхідно підставляти середину i -го інтервалу.

Помітимо, що якщо із двох однаково розподілених генеральних сукупностей, дисперсії яких рівні між собою, взяті вибірки, то вибіркова середня ближче до генеральній середнього у тієї вибірки, в якій об'єм більше, а не у тієї, в якій більше відношення об'єму вибірки до об'єму генеральної сукупності.

Генеральна дисперсія

Розсіювання значень кількісної ознаки X генеральної сукупності навколо свого середнього значення характеризується дисперсією і середнім квадратичним відхиленням, які є зведеними характеристиками.

Генеральною дисперсією D_{Γ} називається середнє арифметичне квадратів відхилень значень ознаки генеральної сукупності від їх середнього значення $\overline{x_{\Gamma}}$.

Якщо всі значення $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ ознаки генеральної сукупності об'єму N різні, то

$$D_{\Gamma} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \overline{x_{\Gamma}})^2}{N}.$$

Якщо значення ознаки $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ мають відповідно частоти $N_1, N_2, N_3, \dots, N_k$, причому $N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_k = N$, то

$$D_{\Gamma} = \frac{\sum_{i=1}^k N_i (x_i - \overline{x_{\Gamma}})^2}{N}.$$

Таким чином, генеральна дисперсія є середньою зваженою квадратів відхилень значень ознаки генеральної сукупності з вагами, рівними відповідним частотам.

Генеральним середнім квадратичним відхиленням (стандартом) називається квадратний корінь із генеральної дисперсії, тобто

$$\sigma_{\Gamma} = \sqrt{D_{\Gamma}}.$$

Вибіркова дисперсія

Вибірковою дисперсією $D_{\text{В}}$ називається середнє арифметичне квадратів відхилень спостережуваних значень ознаки від їх середнього значення $\overline{x_{\text{В}}}$.

Якщо всі значення $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ознаки вибірки об'єму n різні, то

$$D_{\text{В}} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x_{\text{В}}})^2}{n}.$$

Якщо значення ознаки $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ мають відповідно частоти $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$, причому $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$, то

$$D_{\text{В}} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \overline{x_{\text{В}}})^2}{n}.$$

Таким чином, вибіркова дисперсія є середньою зваженою квадратів відхилень значень ознаки вибірки з вагами, рівними відповідним частотам.

Вибірковим середнім квадратичним відхиленням (стандартом) називається квадратний корінь із вибіркової дисперсії, тобто

$$\sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}}.$$

Дисперсію (і генеральну і вибірку) можна обчислювати простіше, скориставшись тим, що дисперсія дорівнює різниці середнього квадратів значень ознаки і квадрата загальної середньої, тобто

$$D_{\text{Г}} = \overline{x_{\text{Г}}^2} - (\overline{x_{\text{Г}}})^2, \quad D_{\text{в}} = \overline{x_{\text{в}}^2} - (\overline{x_{\text{в}}})^2,$$

де $\overline{x_{\text{Г}}^2} = \frac{\sum_{i=1}^k N_i x_i^2}{N}$, $\overline{x_{\text{Г}}} = \frac{\sum_{i=1}^k N_i x_i}{N}$, $\sum_{i=1}^k N_i = N$, $\overline{x_{\text{в}}^2} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i^2}{n}$, $\overline{x_{\text{в}}} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i}{n}$,
 $\sum_{i=1}^k n_i = n$.

Доведемо це на прикладі вибіркової дисперсії

$$\begin{aligned} D_{\text{в}} &= \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \overline{x_{\text{в}}})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i \left(x_i^2 - 2x_i \overline{x_{\text{в}}} + (\overline{x_{\text{в}}})^2 \right)}{n} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i^2}{n} - 2\overline{x_{\text{в}}} \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i}{n} + (\overline{x_{\text{в}}})^2 \frac{\sum_{i=1}^k n_i}{n} = \overline{x_{\text{в}}^2} - 2\overline{x_{\text{в}}} \cdot \overline{x_{\text{в}}} + (\overline{x_{\text{в}}})^2 = \overline{x_{\text{в}}^2} - (\overline{x_{\text{в}}})^2, \end{aligned}$$

що й було потрібно довести.

Якщо за оцінку генеральної дисперсії прийняти вибірку дисперсію, то ця оцінка приведе до систематичних помилок і дасть занижене значення генеральної дисперсії. Вибіркова дисперсія є *зміщеною оцінкою генеральної дисперсії*, тому що (це можна довести)

$$M(D_{\text{в}}) = \frac{n-1}{n} D_{\text{Г}}.$$

Виправлена дисперсія утворюється множенням $D_{\text{в}}$ на дріб $\frac{n}{n-1}$ і

звичайно позначається символом s^2 , тобто

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{n}{n-1} \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n-1}.$$

або

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \left[\overline{x_B^2} - (\bar{x}_B)^2 \right] = \frac{n}{n-1} \left[\frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i}{n} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^k n_i x_i \right)^2}{n}}{n-1}.$$

Виправлена дисперсія є незміщеною оцінкою генеральної дисперсії. Дійсно,

$$M(s^2) = M\left(\frac{n}{n-1} D_B\right) = \frac{n}{n-1} M(D_B) = \frac{n}{n-1} \frac{n-1}{n} D_T = D_T.$$

Для оцінки середнього квадратичного відхилення генеральної сукупності використовується “виправлене” середнє квадратичне відхилення

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n-1}}.$$

Підкреслимо, що s не є незміщеною оцінкою. Тому слово «виправлене» береться в лапки.

Помітимо, що при досить великих значеннях n об’єму вибірки вибіркова D_B і виправлена s^2 дисперсії відрізняються незначно. Тому на практиці виправленою дисперсією користуються звичайно при $n < 30$.

Приклад. З генеральної сукупності взята вибірка об’ємом n . Потрібно знайти незміщену оцінку генеральної середньої, вибіркору і виправлену дисперсії

x_i	0,04	0,05	0,07	0,09	0,11	0,13	0,15	0,17
n_i	5	9	4	11	8	4	12	7

Розв'язок. Об'єм вибірки

$$n = \sum_{i=1}^k n_i = 5 + 9 + 4 + 11 + 8 + 4 + 12 + 7 = 60.$$

Знайдемо вибірккову середню (це незміщена оцінка генеральної середньої).

$$\begin{aligned} \overline{x_B} &= \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i}{n} = \frac{5 \cdot 0,04 + 9 \cdot 0,05 + 4 \cdot 0,07 + 11 \cdot 0,09 + 8 \cdot 0,11 + 4 \cdot 0,13}{60} + \\ &+ \frac{12 \cdot 0,15 + 7 \cdot 0,17}{60} = \frac{6,31}{60} \approx 0,11. \end{aligned}$$

Знайдемо вибірккову дисперсію (це зміщена оцінка генеральної дисперсії)

$$\begin{aligned} D_B &= \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \overline{x_B})^2}{n} = \frac{5 \cdot (0,04 - 0,11)^2 + 9 \cdot (0,05 - 0,11)^2}{60} + \\ &+ \frac{4 \cdot (0,07 - 0,11)^2 + 11 \cdot (0,09 - 0,11)^2 + 8 \cdot (0,11 - 0,11)^2 + 4 \cdot (0,13 - 0,11)^2}{60} + \\ &+ \frac{12 \cdot (0,15 - 0,11)^2 + 7 \cdot (0,17 - 0,11)^2}{60} = \frac{0,1137}{60} = 0,001895. \end{aligned}$$

Знайдемо виправлену дисперсію (це незміщена оцінка генеральної дисперсії)

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{60}{59} \cdot 0,001895 = 0,00192712.$$

3.2.2. Інтервальні оцінки

При вибірці малого об'єму точкова оцінка може значно відрізнятись від оцінюваного параметра і приводити до грубих помилок. Тому при невеликому об'ємі вибірки користуються інтервальними оцінками.

Нехай знайдена за даними вибірки статистична характеристика θ^* є оцінкою невідомого параметра θ . Точність оцінки визначається з нерівності

$$|\theta - \theta^*| < \delta \quad (3.3)$$

і характеризується числом $\delta > 0$. Чим менше δ , тим точніше оцінка. Однак статистичні методи дозволяють говорити лише про ймовірність γ , з якої нерівність (3.3) виконується.

Довірчою ймовірністю (надійністю) оцінки параметра θ по θ^ називається ймовірність γ , з якої здійснюється нерівність (3.3).* Звичайно надійність оцінки задається наперед. Найчастіше задають надійність, рівну **0,95; 0,99 і 0,999**.

Нехай ймовірність того, що нерівність (3.3) виконується, дорівнює γ , тобто

$$P(|\theta - \theta^*| < \delta) = \gamma.$$

Тоді

$$P(-\delta < \theta - \theta^* < \delta) = \gamma \quad \text{або} \quad P(\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta) = \gamma.$$

Останнє співвідношення позначає наступне: ймовірність того, що інтервал $(\theta^* - \delta; \theta^* + \delta)$ покриває невідомий параметр θ , дорівнює γ .

Інтервал $(\theta^* - \delta; \theta^* + \delta)$, що із заданою надійністю γ покриває невідомий параметр θ , називається *довірчим інтервалом*.

Довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання нормального розподілу при відомому σ

Нормальним називається розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини, що описується щільністю

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2},$$

де a — математичне сподівання нормального розподілу; σ — середнє квадратичне відхилення нормального розподілу.

Нехай середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої кількісної ознаки X генеральної сукупності відомо. Потрібно оцінити невідоме математичне сподівання a по вибірковій середній $\overline{x}_n$. Знайдемо довірчий інтервал, що покриває параметр a з надійністю γ .

Будемо розглядати вибіркoву середню $\overline{x}_B$ як випадкову величину ($\overline{x}_B$ у загальному випадку змінюється від вибірки до вибірки), а вибіркoві значення ознаки $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ як однаково розподілені випадкові величини (числа $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ у загальному випадку змінюються від вибірки до вибірки). Математичне сподівання кожної із цих величин x_i ($i = \overline{1, n}$) дорівнює a і середнє квадратичне відхилення дорівнює σ . Тоді параметри розподілу $\overline{x}_B$ (це можна довести) такі

$$M(\overline{x}_B) = a, \quad \sigma(\overline{x}_B) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Будемо вимагати, щоб виконувалося співвідношення

$$P(|\overline{x}_B - a| < \delta) = \gamma,$$

де γ – задана надійність.

Скористаємося формулою

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right),$$

де Φ – функція Лапласа.

У нашому випадку одержимо

$$P(|\overline{x}_B - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi(t),$$

де $t = \delta\sqrt{n}/\sigma$.

З останньої рівності маємо

$$\delta = t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Тоді

$$P\left(|\overline{x}_B - a| < t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t)$$

З огляду на те, що ймовірність P задана і дорівнює γ , одержимо

$$P\left(\overline{x}_B - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_B + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \gamma.$$

Таким чином, інтервальною оцінкою (з надійністю γ) математичного сподівання a нормально розподіленої кількісної ознаки X по вибіркoвій середній

$\bar{x}_B$ при відомому середньому квадратичному відхиленні σ генеральної сукупності є довірчий інтервал

$$\bar{x}_B - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (3.4)$$

де $t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \delta$ – точність оцінки; n – об’єм вибірки; t – значення аргументу функції Лапласа $\Phi(t)$, при якому $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ (знаходиться за таблицею (додаток 2)).

Оцінку (3.4) називають класичною. З рівності $\delta = t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, що визначає точність класичної оцінки, можна зробити висновки:

- 1) при зростанні об’єму вибірки n число δ зменшується і, отже, збільшується точність оцінки;
- 2) збільшення надійності оцінки $\gamma = 2\Phi(t)$ призводить до збільшення аргументу функції Лапласа t ($\Phi(t)$ – зростаюча функція), тобто до збільшення δ ; таким чином, збільшення надійності класичної оцінки спричиняє зменшення її точності.

Довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання нормального розподілу при невідомому σ

Нехай середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої кількісної ознаки X генеральної сукупності невідомо. Потрібно оцінити невідоме математичне сподівання a по вибірковій середній $\bar{x}_B$. Знайдемо довірчий інтервал, що покриває параметр a з надійністю γ .

За даними вибірки можна побудувати випадкову величину (її можливі значення будемо позначати через t)

$$T = \frac{\bar{x}_B - a}{s/\sqrt{n}},$$

яка (це можна довести) має розподіл Стюдента зі $k = n - 1$ степенями вільності. Тут s – “виправлене” середнє квадратичне відхилення; n – об’єм вибірки.

Щільність розподілу Стюдента

$$s(t, n) = B_n \left(1 + \frac{t^2}{n-1} \right)^{-n/2}, \quad (3.5)$$

$$\text{де } B_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}; \quad \Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad - \text{ гамма-функція, зокрема,}$$

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

З формули (3.5) видно, що розподіл Стюдента визначається параметром n – об’ємом вибірки (або числом степенів вільності $k = n-1$) і не залежить від невідомих параметрів a і σ . Оскільки щільність розподілу $s(t, n)$ – парна функція від t , то

$$P\left(\left|\frac{\bar{x}_B - a}{s/\sqrt{n}}\right| < t_\gamma\right) = 2 \int_0^{t_\gamma} s(t, n) dt = \gamma$$

або

$$P\left(\bar{x}_B - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \gamma.$$

Таким чином, інтервальною оцінкою (з надійністю γ) математичного сподівання a нормально розподіленої кількісної ознаки X по вибірковій середній $\bar{x}_B$ при невідомому середньому квадратичному відхиленні σ генеральної сукупності є довірчий інтервал

$$\bar{x}_B - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}},$$

де s – «виправлене» вибіркове середнє квадратичне відхилення, t_γ знаходиться за таблицею значень $t_\gamma = t(\gamma, n)$ (додаток 3) по заданим n і γ .

Зауваження. При необмеженому зростанні об’єму вибірки n розподіл Стюдента прямує до нормального. Тому на практиці при $n > 30$ можна замість розподілу Стюдента користуватися нормальним розподілом, тобто для визначення t_γ використовувати функцію Лапласа. Однак при $n < 30$ (чим менше n , тим більшою мірою) заміна розподілу нормальним призводить до грубої помилки, а саме до звуження довірчого інтервалу, тобто до завищення точності оцінки.

Довірчий інтервал для оцінки середнього квадратичного відхилення σ нормального розподілу

Нехай кількісна ознака X генеральної сукупності розподілена нормально. Потрібно оцінити невідоме генеральне середнє квадратичне відхилення σ по “виправленому” вибірковому середньому квадратичному відхиленню s . Знайдемо довірчий інтервал, що покриває параметр σ із заданою надійністю γ .

Будемо вимагати, щоб виконувалося співвідношення

$$P(|\sigma - s| < \delta) = \gamma \quad \text{або} \quad P(s - \delta < \sigma < s + \delta) = \gamma.$$

Перетворимо подвійну нерівність в останньому виразі

$$s\left(1 - \frac{\delta}{s}\right) < \sigma < s\left(1 + \frac{\delta}{s}\right).$$

Покладемо $\frac{\delta}{s} = q$. Тоді

$$s(1 - q) < \sigma < s(1 + q). \quad (3.6)$$

Нерівністю (3.6) користуються при $q < 1$. Оскільки $\sigma > 0$, то при $q > 1$ воно приймає вигляд

$$0 < \sigma < s(1 + q). \quad (3.7)$$

На практиці для відшукування у виразах (3.6) і (3.7) значень q , що відповідають різним значенням γ і n , користуються таблицею значень $q = q(\gamma, n)$ (додаток 4).

Таким чином, інтервальною оцінкою (з надійністю γ) середнього квадратичного відхилення σ нормально розподіленої кількісної ознаки X по «виправленому» вибірковому середньому квадратичному відхиленню s є довірчий інтервал

$$s(1 - q) < \sigma < s(1 + q) \quad (q < 1),$$

$$0 < \sigma < s(1 + q) \quad (q > 1),$$

де q знаходять за таблицею по заданим n і γ .

Приклад. З генеральної сукупності взята вибірка об’ємом n . Потрібно з надійністю **0,95**: 1) оцінити математичне сподівання a нормально розподіленої ознаки генеральної сукупності по вибірковій середній за допомогою довірчого

інтервалу; 2) знайти довірчий інтервал, що покриває генеральне середньоквадратичне відхилення.

x_i	-3	0	2	5	6	7	9
n_i	1	4	5	7	8	3	1

Розв'язок. Обсяг вибірки

$$n = \sum_{i=1}^k n_i = 1 + 4 + 5 + 7 + 8 + 3 + 1 = 29.$$

Вибіркова середня

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i}{n} = \frac{1 \cdot (-3) + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 5 + 8 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + 1 \cdot 9}{29} = \frac{120}{29} \approx 4,138.$$

“Виправлене” вибіркове середнє квадратичне відхилення знаходиться за формулою

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n-1}}.$$

“Виправлена” вибіркова дисперсія

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n-1} = \frac{1}{29-1} \cdot \left[1 \cdot (-3-4,138)^2 + 4 \cdot (0-4,138)^2 + \right. \\ \left. + 5 \cdot (2-4,138)^2 + 7 \cdot (5-4,138)^2 + 8 \cdot (6-4,138)^2 + 3 \cdot (7-4,138)^2 + \right. \\ \left. + 1 \cdot (9-4,138)^2 \right] \approx \frac{223,448}{28} \approx 7,980.$$

“Виправлене” вибіркове середнє квадратичне відхилення

$$s = \sqrt{7,98} \approx 2,825.$$

По об'єму вибірки n і даній надійності γ знайдемо число $t_\gamma = t(\gamma, n)$, використовуючи таблицю значень $t_\gamma = t(\gamma, n)$ (додаток 3)

$$t(0,95; 25) = 2,064, \quad t(0,95; 30) = 2,045.$$

При $n = 29$ і $\gamma = 0,95$ отримаємо

$$t_{\gamma} = 2,045 + \frac{2,064 - 2,045}{30 - 25} \approx 2,049.$$

Довірчий інтервал математичного сподівання

$$\bar{x}_B - t_{\gamma} \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + t_{\gamma} \frac{s}{\sqrt{n}};$$

$$4,138 - 2,049 \cdot \frac{2,825}{\sqrt{29}} < a < 4,138 + 2,049 \cdot \frac{2,825}{\sqrt{29}}$$

або

$$3,063 < a < 5,213.$$

Таким чином, ми отримали довірчий інтервал (з надійністю γ) математичного сподівання a нормально розподіленої кількісної ознаки X по вибірковій середній.

Довірчий інтервал (з надійністю γ) середнього квадратичного відхилення σ нормально розподіленої кількісної ознаки X по “виправленому” вибірковому середньому квадратичному відхиленню s

$$s(1 - q) < \sigma < s(1 + q) \quad (q < 1),$$

$$0 < \sigma < s(1 + q) \quad (q > 1).$$

Число q найдем по таблице значень $q = q(\gamma, n)$ (додаток 4)

$$q(0,95; 25) = 0,32, \quad t(0,95; 30) = 0,28.$$

При $n = 29$ і $\gamma = 0,95$ отримаємо

$$q = 0,28 + \frac{0,32 - 0,28}{30 - 25} \approx 0,29.$$

Довірчий інтервал середнього квадратичного відхилення

$$2,825 \cdot (1 - 0,29) < \sigma < 2,825 \cdot (1 + 0,29),$$

або

$$2,006 < \sigma < 3,644.$$

3.3. Статистична перевірка статистичних гіпотез

3.3.1. Означення статистичної гіпотези

Дані вибірових спостережень становлять основу для одного з кількох альтернативних рішень (продукція може бути бракованою або якісною, точність обробки деталі відповідає стандартам чи ні і т. д.). У цих випадках говорять, що йдеться про висунення деякої гіпотези, яку приймають або відхиляють після проведення певного експерименту. Якщо цей експеримент є статистичним, то гіпотезу називають статистичною.

Означення. *Статистичною* називають гіпотезу про властивості (ознаки) генеральної сукупності, що перевіряється за деякою вибіркою.

Статистичними гіпотезами можуть бути такі твердження: випадкова величина розподілена за нормальним законом, у показниковому розподілі параметр $\lambda = 5$, випадкові величини X та Y незалежні.

У математичній статистиці виділяють два основних типа статистичних гіпотез:

гіпотези про закон розподілу ймовірностей випадкової величини (ознаки генеральної сукупності);

гіпотези про значення параметрів розподілу величини (ознаки генеральної сукупності).

Перші гіпотези називають непараметричними, а другі – параметричними.

Означення. *Основною* або *нульовою* називають висунуту гіпотезу і позначають H_0 .

Означення. *Альтернативною* або *конкуруючою* називають гіпотезу яка повністю або частково заперечує нульову та позначають H_1 .

Означення. Параметричну гіпотезу називають простою, якщо вона стверджує, що всі невідомі параметри мають деякі числові значення, і складеною, якщо вона складається зі скінченного або нескінченного числа простих гіпотез.

У результаті статистичної перевірки гіпотези можна зробити два висновки:

- гіпотеза приймається і вона істинна,
- гіпотеза відхиляється і вона помилкова.

При цьому можуть трапитися помилки двох типів:

- гіпотеза відхиляється, але вона істинна (помилка першого роду),
- гіпотеза приймається, але вона помилкова (помилка другого роду).

Виявляється, що помилка першого роду має вагоміші наслідки ніж помилка другого роду. Для того, щоб звести до мінімуму ризик зробити помилку першого роду, вводиться спеціальне число α , яке виражає ймовірність відкинути правильну гіпотезу.

Означення. Ймовірність допустити помилку першого роду називають *рівнем значущості* і позначають α . Число α задають наперед і найчастіше його вибирають рівним **0,1; 0,05; 0,01**.

Означення. Інформацію про випадкову величину, яка міститься в гіпотезі, називають *гіпотетичною* або *теоретичною*, а інформацію про неї, яку отримують на основі вибірки, називають *статистичною*, або *емпіричною*.

3.3.2. Критерій статистичної перевірки гіпотези

Нехай H_0 – нульова гіпотеза про розподіл ймовірностей випадкової величини (ознаки генеральної сукупності) або про значення параметрів цього розподілу. Далі на основі вибірки треба вирішити: потрібно цю гіпотезу прийняти чи відхилити, на користь альтернативної гіпотези.

Означення. *Статистичним критерієм гіпотези* (або просто *критерієм гіпотези*) називається випадкова величина K , за допомогою якої проводиться перевірка гіпотези.

Випадкову величину K вибирають такою, щоб закон розподілу ймовірностей був відомий.

Означення. Значення випадкової величини K , яке обчислене на основі певної вибірки, називають *емпіричним (спостережуваним)* значенням критерію гіпотези і позначають K_{emn} (K_{cn})

Виявляється, що для одних значень K_{emn} гіпотеза H_0 приймається, а для інших – відхиляється.

Означення. Сукупність значень критерію K (випадкової величини K), для яких нульова гіпотеза H_0 відхиляється називається *критичною областю*,

а сукупність значень критерію K для яких гіпотезу H_0 приймають, називається **областю прийняття гіпотези (областю допустимих значень)**.

Тоді маємо таке правило перевірки статистичних гіпотез: якщо емпіричне значення критерію $K_{емп}$ належить критичній області, то нульову гіпотезу відхиляють; якщо емпіричне значення критерію $K_{емп}$ належить області прийняття гіпотези, то гіпотезу H_0 приймають.

Якщо випадкова величина K є одновимірною, то критична область, як правило, є множиною точок певних інтервалів на прямій, які відділені від області прийняття гіпотези так званими критичними точками $k_{кр}$. Тобто для знаходження критичної області достатньо визначити критичні точки.

Розрізняють три види критичних областей:

правостороння критична область – це та область на числовій прямій, що визначається нерівністю $K > k_{кр}$

лівостороння критична область – це та область на числовій прямій, що визначається нерівністю $K < k_{кр}$

Двостороння критична область – це та область на числовій прямій, що визначається сумою інтервалів $K > k_{кр}^{(1)}$, $K < k_{кр}^{(2)}$

Для знаходження критичної області задаються рівнем значущості α і шукають критичні точки $k_{кр}$ із таких співвідношень:

а) для правосторонньої критичної області:

$$P(K > k_{кр}) = \alpha, (k_{кр} > 0)$$

б) для лівосторонньої критичної області:

$$P(K < k_{кр}) = \alpha, k_{кр} < 0$$

в) для двосторонньої симетричної критичної області:

$$P(K > k_{кр}^{(1)}) + P(K < k_{кр}^{(2)}) = \alpha$$

Найчастіше двосторонню критичну область будують як симетричну, визначаючи $k_{кр}^{(1)} = -k_{кр}$ і $k_{кр}^{(2)} = -k_{кр}$ із рівняння:

$$P(K > k_{кр}) = \frac{\alpha}{2}, k_{кр} > 0.$$

Перевірка статистичної гіпотези проводиться за такою схемою:

1. Формулюють нульову гіпотезу H_0 , альтернативну гіпотезу H_1 і задають рівень значущості α для перевірки гіпотези H_0 .
2. Визначають критерій K для перевірки гіпотези H_0 , який є випадковою величиною з відомим розподілом її ймовірностей.
3. Визначають критичні області відносно даних критерію K та рівня значущості α . Для визначення критичної області достатньо знайти критичні точки k_{kp} за відповідними рівностями.
4. Знаходять емпіричне (спостережуване) значення критерію K_{emp} на основі конкретної вибірки.
5. Приймають рішення: якщо емпіричне значення критерію K_{emp} потрапляє в критичну область, то нульову гіпотезу відхиляють, якщо значення K_{emp} потрапляє в область допустимих значень, то нульову гіпотезу приймають.

Для певної гіпотези можна побудувати багато різних критеріїв її перевірки, і за кожним таким критерієм можна одержувати різні результати щодо прийняття нульової гіпотези H_0 на основі однієї вибірки. Тому для визначення кращого критерію вводиться характеристика, яка називається потужністю критерію.

Означення. *Потужністю критерію* називається ймовірність належності критерію критичній області за умови, що істинна конкуруюча гіпотеза.

Тобто, потужність критерію визначається як ймовірність не допустити помилку другого роду при обраному критерії.

3.3.3. Критерій узгодження Пірсона

Означення. Критерії, які призначені для перевірки висунутих гіпотез називаються *критеріями узгодження*. Критерії узгодження дозволяють відповісти на питання про те, чи розбіжність між емпіричними і теоретичними розподілами є настільки незначною, що вона може бути приписана впливу випадковості, чи ні.

Одним з таких критеріїв є критерій Пірсона або критерій χ^2 . Нехай маємо дискретний або інтервальний розподіл вибірки

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_m	$(x_{i-1}; x_i]$	$(x_0; x_1]$	$(x_1; x_2]$	$\dots$	$(x_{k-1}; x_m]$
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_m	n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_m

На підставі побудованого статистичного розподілу вибірки і за наперед заданим рівнем значущості α треба перевірити гіпотезу:

H_0 : {закон розподілу X описується функцією розподілу $F(x)$ або густиною розподілу $f(x)$ }, якщо альтернативна гіпотеза:

H_1 : {закон розподілу X не описується функцією розподілу $F(x)$ або густиною розподілу $f(x)$ }

Згідно з критерієм Пірсона для перевірки гіпотези H_0 вводиться випадкова величина (статистика) K :

$$K = \chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i} = n \sum_{i=1}^m \frac{(w_i - p_i)^2}{p_i}, \quad (3.8)$$

де m - число груп у статистичному розподілі вибірки;

n_i (w_i) - спостережувана частота (відносна частота) ознаки X в тій групі;

$n'_i = n p_i$ - теоретична частота;

p_i - ймовірність того, що значення X належить до i -ї групи, і вона розрахована за допомогою гіпотетичної функції розподілу $F(x)$ або густини розподілу $f(x)$.

Статистика K при $n \rightarrow \infty$ прямує за розподілом до випадкової величини, розподіленої за законом χ^2 із числом $k = m - s - 1$ ступенів вільності, де m - число інтервалів статистичного розподілу вибірки; s - число параметрів, що входять до гіпотетичного розподілу F або f і які оцінюються на підставі спостережуваних даних. Так, наприклад, коли перевіряється узгодження досліджуваного розподілу з розподілом Пуассона, єдиний параметр якого невідомий і оцінюється за вибірковими даними, то $k = m - 2$ (коли параметр λ відомий і не оцінюється за вибірковими даними, то $k = m - 1$); якщо

перевіряється узгодження з нормальним розподілом, для якого за вибірковими даними оцінюються два параметра μ і σ , то $k = m - 3$, тощо.

Якщо маємо повне узгодження теоретичного та статистичного розподілів, то $K = 0$. У протилежному випадку $K > 0$. Обчисливши за формулою (3.8)

$K_{emn} = \chi_{emn}^2$ і визначивши за заданим рівнем значущості α та числом ступенів вільності k із додатка 5 критичне значення $\chi_{kp}^2 = k_{kp}$, маємо такі висновки:

а) гіпотезу H_0 відхиляємо, якщо $K_{emn} \geq k_{kp}$;

б) гіпотезу H_0 приймаємо, якщо $K_{emn} < k_{kp}$.

Застосування критерію Пірсона вимагає дотримання таких умов: 1) експериментальні дані мають бути незалежними, тобто вибірка повинна бути випадковою; 2) обсяг вибірки має бути достатньо великим (практично не меншим ніж 50 одиниць), а частота кожної групи - не меншою за 5. Якщо остання умова не виконується, то проводиться попереднє об'єднання нечисленних груп.

Схема перевірки гіпотези про закон розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини за критерієм Пірсона:

1. Вихідні статистичні дані (результати вибірки) групують і записують як інтервальний варіаційний ряд:

$(x_{i-1}; x_i]$	$(x_0; x_1]$	$(x_1; x_2]$	...	$(x_{m-1}; x_m]$
n_i	n_1	n_2	...	n_m
w_i	w_1	w_2	...	w_m

2. Оскільки перевіряється гіпотеза про те, що розподіл генеральної ознаки X описується певною (конкретною) функцією розподілу $F(x)$ або густиною розподілу $f(x)$, то для кожного інтервалу $(x_{i-1}; x_i]$ можна визначити теоретичні ймовірності p_i попадання значень випадкової величини X у цей інтервал, а отже і теоретичні частоти $n'_i = n p_i$.

Для обчислення ймовірностей p_i використовують формули:

$$p_i = P(x_{i-1} \leq X \leq x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}) \quad (3.9)$$

або

$$p_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \quad (3.10) \text{ Зазначимо,}$$

що для обчислення ймовірностей p_1 і p_m у формулах (3.9) і (3.10) покладають, відповідно, $x_0 = -\infty$ і $x_m = +\infty$, тоді $\sum_{i=1}^m p_i = 1$. Отримані результати обчислень зручно записати у формі таблиці

$(x_{i-1}; x_i]$	$(x_0; x_1]$	$(x_1; x_2]$	...	$(x_{m-1}; x_m]$
n_i	n_1	n_2	...	n_m
w_i	w_1	w_2	...	w_m
p_i	p_i	p_i	...	p_m
$n'_i = n p_i$	n'_1	n'_2	...	n'_m

Зауваження. Гіпотетичні функції розподілу $F(x)$ або густина розподілу $f(x)$, як правило, характеризуються деякими чисельними параметрами, точні значення яких можуть бути невідомими. Тоді для обчислення теоретичних ймовірностей p_i ці невідомі параметри замінюються їх точковими оцінками, які визначають за допомогою даних вибірки.

3. На підставі даних з останньої таблиці обчислюють спостережуване значення критерію Пірсона:

$$K_{emn} = \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$$

або

$$K_{emn} = n \sum_{i=1}^m \frac{(w_i - p_i)^2}{p_i}.$$

4. За даним рівнем значущості α і числом ступенів вільності $k = m - s - 1$, де s – число параметрів гіпотетичного розподілу, що обчислені за даними вибірки, із таблиці критичних значень розподілу χ^2 (додаток) знаходять критичну точку $k_{kp} = \chi_{kp}^2$.

Зауваження. χ_{kr}^2 є розв'язком рівняння $P(\chi^2 > \chi_{kr}^2) = \int_{\chi_{kr}^2}^{\infty} R(x, m) dx = \alpha$.

5. Зіставляємо значення K_{emn} і k_{kr} якщо $K_{emn} \geq k_{kr}$, то гіпотезу H_0 відхиляють, якщо ж $K_{emn} < k_{kr}$, то гіпотезу H_0 приймають.

Приклад. Нехай X – процент зростання зарплати на деякому підприємстві. Унаслідок 100 спостережень за зростанням заробітної плати працівників підприємства за певний період одержали такі результати:

$(x_{i-1}; x_i]$	(13,5; 14,5]	(14,5; 15,5]	(15,5; 16,5]	(16,5; 17,5]	(17,5; 18,5]	(18,5; 19,5]	(19,5; 20,5]
n_i	6	10	18	28	20	12	6

За допомогою критерію Пірсона і для заданого рівня значущості $\alpha = 0,05$ перевірити гіпотезу H_0 : досліджувана випадкова величина X має нормальний закон розподілу ймовірностей.

Розв'язання. Нормальний закон розподілу характеризується густиною

розподілу $f(x, a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, де a і σ - параметри розподілу.

Оскільки ці параметри невідомі, то оцінюємо їх на підставі вибірових даних. Одержимо:

$$a^* = \bar{x} = \frac{1}{100}(14 \cdot 6 + 15 \cdot 10 + 16 \cdot 18 + 17 \cdot 28 + 18 \cdot 20 + 19 \cdot 12 + 20 \cdot 6) = 17,06,$$

$$\bar{D}_e = \frac{1}{99}(3,06^2 \cdot 6 + 2,06^2 \cdot 10 + 1,06^2 \cdot 18 + 0,06^2 \cdot 28 + 0,94^2 \cdot 20 +$$

$$+ 1,94^2 \cdot 12 + 2,94^2 \cdot 6) = 2,36,$$

$$\sigma^* = \sigma_e = \sqrt{\bar{D}_e} = \sqrt{2,36} = 1,54.$$

Заокругливши, виберемо $a = 17$, $\sigma = 1,5$ і перевіримо гіпотезу про те, що випадкова величина X має нормальний закон розподілу ймовірностей із густиною

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 1,5} e^{-\frac{(x-17)^2}{2(1,5)^2}}.$$

Для цього обчислимо спочатку статистичні ймовірності w_i та теоретичні ймовірності p_i попадання випадкової величини X в інтервали $(x_{i-1}; x_i]$.
Статистичні ймовірності обчислюємо за формулою

$$w_i = \frac{n_i}{n} :$$

$$w_1 = 0,06, w_2 = 0,10, w_3 = 0,18, w_4 = 0,28, w_5 = 0,20, w_6 = 0,12, w_7 = 0,06.$$

Теоретичні ймовірності обчислюємо за формулою:

$$p_i = P(x_{i-1} \leq X \leq x_i) = \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}}{\bar{\sigma}}\right) - \Phi\left(\frac{x_{i-1} - \bar{x}}{\bar{\sigma}}\right),$$

де $\Phi(x)$ - інтегральна функція Лапласа.

Одержимо

$$p_1 = P(x_0 \leq X \leq x_1) = \Phi\left(\frac{14,5 - 17}{1,5}\right) - \Phi(-\infty) = \Phi(\infty) - \Phi(1,67) = \\ = 0,5 - 0,4525 \approx 0,05$$

$$p_2 = P(x_1 \leq X \leq x_2) = \Phi\left(\frac{15,5 - 17}{1,5}\right) - \Phi\left(\frac{14,5 - 17}{1,5}\right) = \Phi(1,67) - \Phi(1) = \\ = 0,4525 - 0,3413 \approx 0,11,$$

$$p_3 = P(x_2 \leq X \leq x_3) = \Phi\left(\frac{16,5 - 17}{1,5}\right) - \Phi\left(\frac{15,5 - 17}{1,5}\right) = \Phi(1) - \Phi(0,33) = \\ = 0,3413 - 0,1293 \approx 0,21,$$

$$p_4 = P(x_3 \leq X \leq x_4) = \Phi\left(\frac{17,5 - 17}{1,5}\right) - \Phi\left(\frac{16,5 - 17}{1,5}\right) = \Phi(0,33) - \Phi(-0,33) = \\ = 2 \cdot 0,1293 \approx 0,26,$$

$$p_5 = P(x_4 \leq X \leq x_5) = \Phi\left(\frac{18,5 - 17}{1,5}\right) - \Phi\left(\frac{17,5 - 17}{1,5}\right) = \Phi(1) - \Phi(0,33) = \\ = 0,3413 - 0,1293 \approx 0,21,$$

$$p_6 = P(x_5 \leq X \leq x_6) = \Phi\left(\frac{19,5 - 17}{1,5}\right) - \Phi\left(\frac{18,5 - 17}{1,5}\right) = \Phi(1,67) - \Phi(1) = \\ = 0,4525 - 0,3413 \approx 0,11,$$

$$p_7 = P(x_6 \leq X \leq x_7) = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{19,5 - 17}{1,5}\right) = \Phi(+\infty) - \Phi(1,67) = \\ = 0,5 - 0,4525 \approx 0,05.$$

Запишемо отримані дані в таблицю

w_i	0,06	0,10	0,18	0,28	0,20	0,12	0,06
p_i	0,05	0,11	0,21	0,26	0,21	0,11	0,05

Обчислюємо

$$K_{emn} = \chi_{emn}^2 = 100 \cdot \left(\frac{0,01^2}{0,05} + \frac{0,01^2}{0,11} + \frac{0,03^2}{0,21} + \frac{0,02^2}{0,26} + \frac{0,01^2}{0,21} + \frac{0,01^2}{0,11} + \frac{0,01^2}{0,05} \right).$$

$$K_{emn} = \chi_{emn}^2 = 1,18.$$

Для заданого рівня значущості $\alpha = 0,05$ і числа ступенів вільності $k = 7 - 2 - 1 = 4$ із таблиці додатка 5 визначаємо $k_{kp} = \chi_{kp}^2 = 9,5$.

Оскільки $K_{emn} = 1,18 < k_{kp} = 9,5$, то гіпотеза H_0 : випадкова величина X має нормальний розподіл – приймається.

3.4. Методи аналізу взаємозв'язків. Кореляція та регресія

3.4.1. Сутність та види взаємозв'язків

Усі явища навколишнього світу є взаємопов'язаними між собою і взаємозумовленими одне одним. У складному переплетенні всеосяжного зв'язку будь-яке явище є наслідком дії певної множини причин і водночас – причиною інших явищ.

Залежності між змінними величинами можна поділити на функціональні і статистичні. У природничих науках, як правило, вивчаються *функціональні залежності*, при яких кожному значенню однієї змінної x (аргументу) за певним законом відповідає одне і тільки одне значення іншої змінної y (функції). Такі зв'язки існують в математиці, фізиці, хімії, астрономії та в інших науках. У реальному світі, наприклад, у соціально-економічних явищах, строгої функціональної залежності між змінними не існує, бо вони перебувають під впливом випадкових факторів, наслідки якого передбачити практично неможливо. Наприклад, поширеність респіраторних зимових захворювань залежить від виконання профілактичних заходів, а саме, щеплення, але ця залежність не буде функціональною, оскільки на рівень захворюваності, крім того, впливатимуть кліматичні умови, щільність населення, загальний рівень життя, генетичні особливості, тощо.

Позначимо через (X, Y) двовимірну випадкову величину, геометрично її можна зобразити як випадкову точку $M(x, y)$ на площині. В багатьох задачах математичної статистики необхідно встановити математичну залежність вивчаємого параметра Y від одного (або кількох) факторів за даними спостереження. У цьому випадку говорять про необхідність побудови *регресійної моделі* $Y = F(X)$ (або $Y = F(X_1, X_2, \dots, X_k)$ відповідно).

Розглядаючи зв'язок між двома (або більше) змінними величинами важливо встановити на основі логічного міркування, яка з ознак є причиною, а яка – наслідком. Незалежні ознаки у статистиці називають *факторами* (причина плюс умови, в яких діє причина), а залежні – *результатом* (наслідком). За кількістю факторних ознак вирізняються *парний зв'язок* $Y = f(x)$ – одна факторна і одна результативна ознака та *множинний зв'язок* $Y = f(x_1; x_2; x_3)$ – кілька факторних ознак і одна результативна.

Якщо кожному значенню фактора x відповідає певна множина значень результату y , яка утворює умовний розподіл, то зв'язок між ними називається *стохастичним зв'язком* або *статистичною залежністю* ознаки Y від X .

Різновидом статистичної залежності є *кореляційна залежність* (correlation (англ.) – співвідношення, відповідність), за якою на зміну фактора результативна ознака реагує зміною своєї умовності середньої $\bar{y}_x$ ($\bar{y}_x$ – середнє арифметичне із значень Y , що відповідають одному і тому ж значенню $X = x$). Отже, якщо кожному значенню фактора x відповідає одне значення умовної середньої $\bar{y}_x$, то $\bar{y}_x$ є функцією від аргументу x , і така залежність ознаки Y від X називається *кореляційною*. Рівняння

$$Y = F(x) \quad (3.11)$$

Називається *рівнянням парної регресії* Y на X (або *кореляційним рівнянням*).

Зауваження 1. В рівнянні (3.11) $Y = \bar{y}_x$ – вирівняні значення результативної ознаки (залежна змінна), x – значення факторної ознаки (незалежна змінна), $F(x)$ – функція регресії. Графік функції $F(x)$ називається *лінією регресії*.

Зауваження 2. Між ознаками Y та X може існувати статистична залежність і за відсутності кореляційної. Але коли існує кореляційна залежність між ознаками, то обов'язково між ними існуватиме і статистична залежність.

3.4.2. Етапи кореляційно-регресійного аналізу

Лінія регресії є головною характеристикою кореляційного зв'язку.

Кореляційно-регресійний аналіз складається з таких етапів:

- 1) постановка задачі, встановлення наявності зв'язку між ознаками, що спостерігаються;
- 2) вибір найбільш суттєвих факторів для аналізу; оцінка ефектів впливу;
- 3) вибір форми регресії;
- 4) визначення параметрів рівняння та показників щільності кореляційного зв'язку;
- 5) перевірка істотності зв'язку.

3.4.3. Способи виявлення наявності взаємозв'язків

Виявлення та вимірювання взаємозв'язків ґрунтується на всебічному теоретичному аналізі суті явищ. Залежно від характеру зв'язку в регресійному аналізі використовують лінійні і нелінійні функції. При виборі функції використовують графіки, кореляційні таблиці, аналітичні групування.

Один із способів – побудова точкового графіка «кореляційне поле» – паралельне зіставлення рядів значень ознак x і y (рис. 3.8). Розміщення точок на графіку свідчить про наявність і напрям зв'язку; кожній точці з координатами x_i, y_i відповідає певне числове значення ознак X та Y .

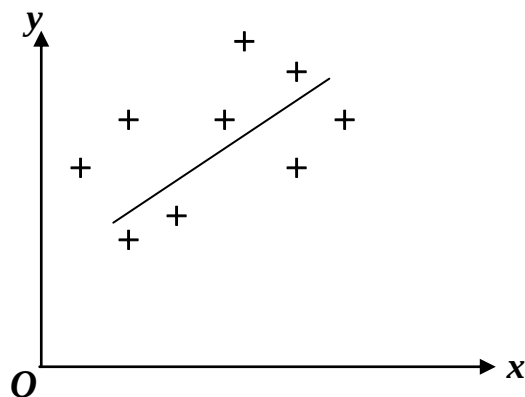


Рис. 3.8

В «кореляційній таблиці» міститься комбінаційний розподіл сукупності за ознаками x і y :

Групи за факторною ознакою	Групи за результативною ознакою			Разом
	1	2	3	
1				
2				
3				
Разом				

Розміщення частот у клітинках таблиці вздовж діагоналі свідчить про наявність і напрям зв'язку.

Аналітичні групування утворюються за атрибутивною (словесною, описовою) факторною ознакою x . Наявність зв'язку виявляється систематичною (від групи до групи) зміною групових середніх результативної ознаки $\bar{y}_x$.

3.4.4. Парна лінійна регресія

Найпростішим та найбільш поширеним у статистичному аналізі рівнянням регресії є лінійна функція

$$Y = a + bx, \quad (3.12)$$

яка використовується, якщо зміна x призводить до відносно рівномірної зміни y . Коефіцієнт регресії b показує на скільки одиниць зміниться y зі зміною x на одиницю (оцінює ефект впливу факторної ознаки на результативну). Знак коефіцієнта регресії вказує напрям зв'язку: якщо $b > 0$, то зв'язок прямий, якщо $b < 0$, то зв'язок зворотній, якщо $b = 0$, то зв'язок відсутній. Коефіцієнт a – вільний член рівняння регресії (значення Y при $x = 0$) і не має інтерпретації.

Параметри функції (a, b) визначаються методом найменших квадратів, згідно з яким сума квадратів відхилень фактичних значень (y) від теоретичних

(Y) є мінімальною: $\sum_{i=1}^n (y_i - Y_i)^2 \rightarrow \min$, де n – обсяг вибірки. Відповідно до

цієї умови параметри обчислюються на основі системи *нормальних* рівнянь:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i = na + b \sum_{i=1}^n x_i, \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2. \end{cases} \quad (3.13)$$

Розв'язки системи можна знайти за формулами Крамера:

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i}, \quad (3.14)$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i.$$

Зауваження. Описаний вище метод може бути застосований до будь-якого вибіркового рівняння регресії. Зокрема, при множинній лінійній залежності число рівнянь (3.13) збільшується до кількості невідомих. Рівняння лінійної множинної регресії для k факторів має вигляд

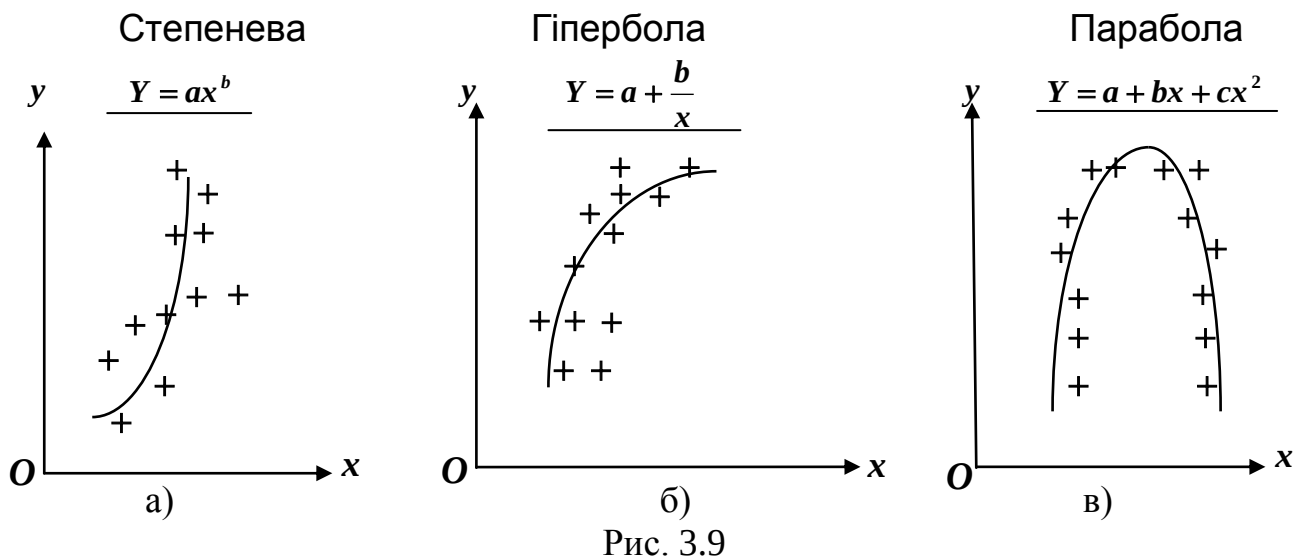
$$Y = a_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_k x_k + \varepsilon, \quad (3.15)$$

где a_0 – вільний член, $b_1, b_2, \dots, b_k$ – коефіцієнти множинної регресії, $x_1, x_2, \dots, x_k$ – незалежні факторні змінні, Y – результуюча змінна, ε – випадкова величина, яка характеризує похибку між даними спостережень і відповідними теоретичними значеннями (3.15).

Коефіцієнти множинної регресії показують рівень середньої зміни результативної ознаки зі зміною відповідного фактора x_i на одиницю, за умови, що всі інші фактори, що входять в рівняння регресії (3.15), залишаються сталими величинами. Такі коефіцієнти називаються коефіцієнтами *чистої регресії*, а коефіцієнт парної регресії – коефіцієнтом повної регресії.

3.4.5. Нелінійна регресія

Якщо попередній аналіз явищ, зв'язок між якими досліджується, показує, що однаковим змінам середніх значень факторної ознаки відповідають неоднакові зміни середніх значень результативної ознаки, то для рівняння регресії (3.11) застосовуються нелінійні функціональні залежності, а саме: параболічна другого порядку, гіперболічна, степенева тощо (рис. 3.9):



Степенева функція (а) використовується тоді, коли зміна результативної ознаки y відбувається з прискоренням (приклад: вплив обсягу грошової маси (x) на рівень інфляції (y)), а гіперболічна функція (б) – при зміні з уповільненням (приклад: залежність продуктивності праці робітників (y) від рівня заробітної плати (x)). Параболічна функція (в) використовується, якщо дія відбувається зі зміною напрямку зв'язку (приклад: залежність урожайності зернових (y) від кількості опадів (x)).

Параметри відповідних рівнянь визначаються зазначай методом найменших квадратів.

3.4.6. Оцінювання щільності кореляційного зв'язку

3.4.6.1. Універсальним вимірником щільності кореляційного зв'язку є коефіцієнт детермінації R^2 . Він застосовується до будь-якої форми кореляційного зв'язку, визначається відношенням факторної дисперсії до загальної:

$$R^2 = \frac{\delta_y^2}{\sigma_y^2} = \frac{\delta_y^2}{\sigma_e^2 + \delta_y^2} \quad (3.16)$$

та показує частку варіації ознаки y , яка пояснюється варіацією фактора x .

Загальна дисперсія

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y - \bar{y})^2}{n}$$

вимірює загальний розмір варіації результативної ознаки, сформованої під впливом усіх можливих факторів (рис. 3.10 (а)).

Факторна дисперсія

$$\delta_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y - \bar{y})^2}{n}$$

вимірює розмір варіації результативної ознаки, зумовленої фактором (рис. 3.10 (б)).

Залишкова дисперсія

$$\sigma_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y - Y)^2}{n}$$

вимірює розмір варіації результативної ознаки, зумовленої дією всіх інших факторів (рис. 3.10 (в)).

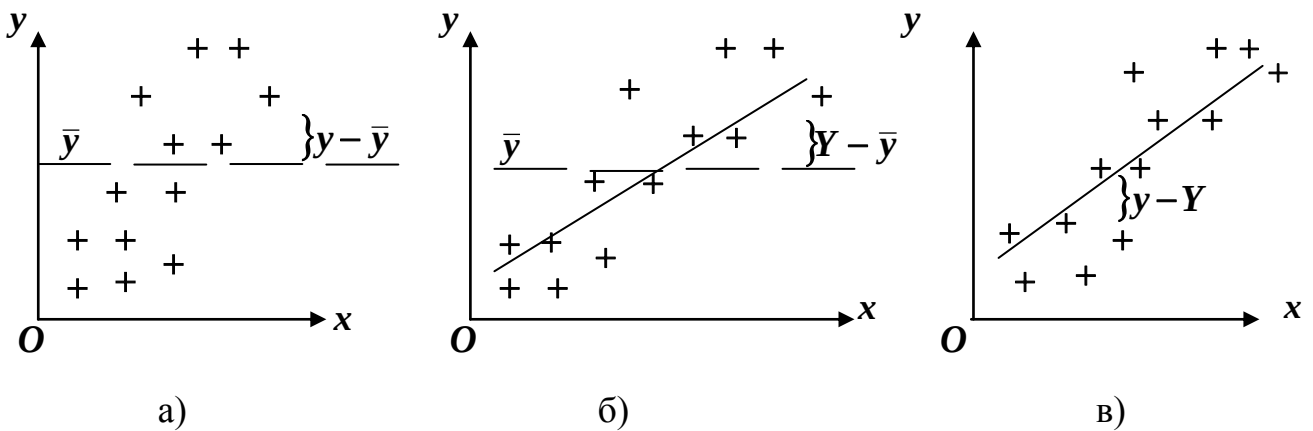


Рис. 3.10

Значення коефіцієнта R^2 змінюється від 0 до 1, оскільки $R = \sqrt{1 - \frac{\sigma_e^2}{\sigma_y^2}}$.

3.4.6.2. При вимірюванні щільності парного лінійного зв'язку застосовується також коефіцієнт кореляції (Пірсона).

Лінійний коефіцієнт кореляції r розраховується за формулами:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (3.17)$$

або

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{n \sigma_x \sigma_y}. \quad (3.18)$$

Коефіцієнт кореляції змінюється в межах від -1 до +1, знак вказує на напрям зв'язку. Лінійний коефіцієнт кореляції функціонально пов'язаний з коефіцієнтом детермінації – $r^2 = R^2$ і має наступні властивості:

Властивості мір щільності зв'язку:

- Кореляція є *додатною* ($r > 0$), якщо змінні ознаки X та Y змінюються в одному напрямку, і *від'ємною* ($r < 0$) якщо в різних напрямках.
- За відсутністю будь-якого зв'язку значення коефіцієнта наближається до нуля; при функціональному зв'язку – до одиниці.
- За наявності кореляційного зв'язку значення коефіцієнта тим вище, чим щільніший зв'язок.
- Лінійний коефіцієнт кореляції пов'язаний з коефіцієнтом регресії

$$r = b \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}.$$

3.4.7. Перевірка істотності кореляційного зв'язку

Для перевірки статистичної значущості кореляційної залежності величин (або істотності кореляційного зв'язку) необхідно перевірити нульову гіпотезу $H_0 : r_T = 0$ – про рівність нулю генерального коефіцієнта кореляції при конкуруючій гіпотезі $H_1 : r_T \neq 0$. Якщо нульову гіпотезу буде відкинуто, то це означає, що вибіркового коефіцієнта кореляції r значно відрізняється від нуля, а ознаки X та Y корельовані, тобто пов'язані лінійною залежністю.

Якщо нульову гіпотезу буде прийнято, то вибіркового коефіцієнта кореляції незначущий, його відхилення від нуля мають чисто випадковий характер, а X та Y некорельовані.

Правило: для того, щоб за заданим рівнем значущості α перевірити нульову гіпотезу H_0 , необхідно *фактичне* (розраховане) значення коефіцієнта (або показника критерія) порівняти з *критичним* (табличним) значенням. Якщо фактичне значення перевищує критичне, зв'язок визначається істотним, в іншому випадку істотність зв'язку не доведена.

Серед *фактичних* (спостережуваних) показників слід виділити наступні:

- 1) коефіцієнт детермінації R^2 ;
- 2) значення F_r (критерій Фішера):

$$F_r = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{k_2}{k_1}, \quad (3.19)$$

де $k_1 = m - 1$, $k_2 = n - m$, n – обсяг сукупності (вибірki), m – кількість параметрів рівняння регресії;

- 3) значення t_r (критерій Стюдента):

$$t_r = r \cdot \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}. \quad (3.20)$$

Критичне значення – максимально можливе значення R^2 , (або F_r , або t_r), яке може випадково виникнути за відсутності зв'язку. Це значення (для будь якого із трьох зазначених критеріїв) визначається за даними таблиць критичних значень, складених для певних *рівнів істотності* (значущості) α і чисел ступенів свободи k_1, k_2 (додатки 6,7,8).

Зауваження 1. Для парної лінійної регресії застосовують як універсальний вимірник щільності кореляційного зв'язку R^2 , так і критерій Стюдента. Розрахункове (спостережуване) значення параметра t_r (3.20) порівнюють з табличним $t_{кр}$, який знаходиться за таблицею критичних точок розподілу Стюдента (додаток 6) з числом ступенів свободи $k = n - 2$ і даним рівнем істотності α . Якщо розрахункове значення t_r перевищує табличне ($|t_r| > t_{кр}$), то з ймовірністю $(1 - \alpha)$ коефіцієнт кореляції можна вважати істотним, тобто гіпотезу про відсутність кореляційного зв'язку між випадковими величинами (X, Y) слід відкинути і прийняти альтернативну гіпотезу про наявність залежності між цими випадковими величинами. Якщо $|t_r| < t_{кр}$ немає сенсу відкидати нульову гіпотезу.

Зауваження 2. При малому обсязі вибірки ($n < 30$) нарівні з коефіцієнтом R^2 застосовується F –критерій Фішера (3.19). За даним рівнем істотності α та числами k_1, k_2 за таблицями F –розподілу Фішера (додаток 8) знаходять критичне значення $F_{кр}(\alpha, k_1, k_2)$ і, якщо $F_r > F_{кр}$, нульову гіпотезу спростовують, зв'язок вважають істотним, а рівняння регресії – значущим. Критерій Фішера застосовують у випадках, коли вибірковий коефіцієнт кореляції близький до одиниці ($r \geq 0,8$).

Приклад. Результати експериментального дослідження дозволили виявити зв'язок між ступенем розчинності тіосульфату та температурою:

Зразок	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Показник ступеня розчинності, %	33,5	37,0	41,2	46,1	50,0	52,9	56,8	64,3	69,9
Температура, град	0	10	20	30	40	50	60	70	80

За наведеними даними:

1. Визначте функцію, якою можна описати зв'язок між ступенем розчинності тіосульфату та температурою, побудуйте графік кореляційного поля.
2. Обчисліть параметри функції, поясніть їхній зміст.
3. Перевірте істотність зв'язку між зазначеними ознаками з імовірністю 0,95, зробіть висновки.

Розв'язок. Головною характеристикою кореляційного зв'язку є лінія регресії, яка описує залежність результативної ознаки (y) від факторної (x). У наведеному прикладі результативною ознакою є розчинність тіосульфату, яка залежить від температури – факторна ознака.

1. Для вибору функції слід побудувати графік кореляційного поля. На основі його загального вигляду робиться висновок, щодо наявності та напрямку кореляційного зв'язку (рис. 3.11).

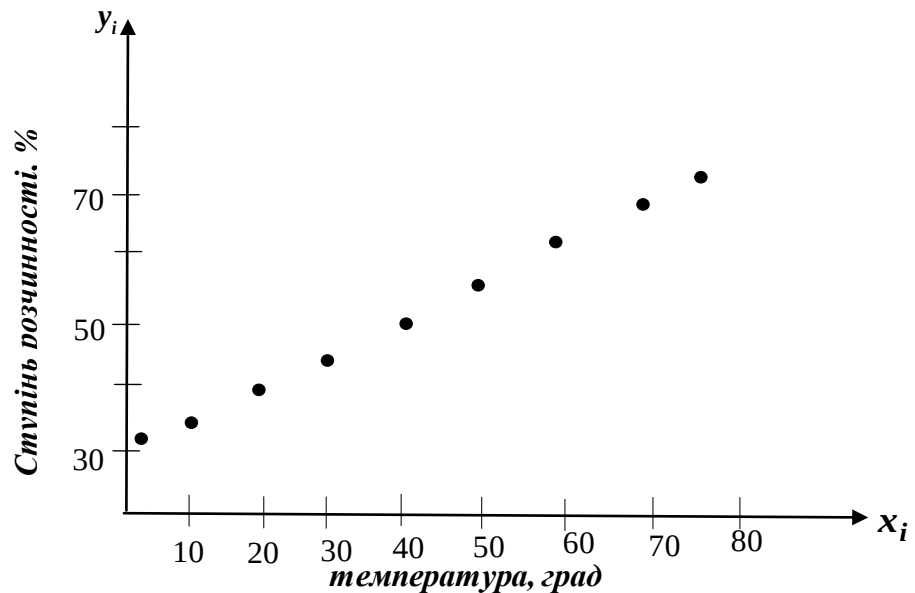


Рис. 3.11

Як видно з рисунка, поступове зростання рівня температури призводить до зростання ступеня розчинності, а оскільки зростання факторної і результативної ознак відбувається відносно рівномірно, то для оцінки кореляційного зв'язку доцільно використати лінійну функцію:

$$Y = a + bx.$$

2. Параметри a і b обчислюються на основі системи нормальних рівнянь (3.13) за формулами (3.14).

До розрахунку коефіцієнтів регресії a і b

№ зразка	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
1	0	33,5	0	0	1122,25
2	10	37,0	100	307	1369,00
3	20	41,2	400	824	1697,44
4	30	46,1	900	1383	2125,21
5	40	50,0	1000	2000	2500,00
6	50	52,9	2500	2645	2798,41
7	60	56,8	3600	3408	3226,24
8	70	64,3	4900	4501	4134,49
9	80	69,9	6400	5592	4886,01
Σ	360	451,7	20400	20723	23859,05

Отримані в таблиці величини дозволяють визначити параметр b :

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i} = \frac{9 \cdot 20723 - 360 \cdot 451,7}{9 \cdot 20400 - 360 \cdot 360} = 0,44(\%).$$

Тобто при збільшенні температури на 1 град розчинність зразка зростає в середньому на 0,44%.

Для обчислення параметра a слід визначити середні рівні ступеня розчинності ($\bar{y}$) та температури ($\bar{x}$), для їх визначення застосовується арифметична проста:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{360}{9} = 40; \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{451,7}{9} = 50,19.$$

Параметр a дорівнює:

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 50,19 - 0,44 \cdot 40 = 32,59.$$

Тоді рівняння регресії матиме такий вигляд:

$$Y = a + bx = 32,59 + 0,44x,$$

де Y –теоретичне значення результативної ознаки, яке формується лише під впливом досліджуваного фактора і не враховує вплив інших чинників.

Теоретичне значення визначається підстановкою в обчислене рівняння регресії фактичних значень факторної ознаки: так, для 1-го зразка очікуваний ступень розчинності тіосульфату мав становити:

$$Y_1 = 32,59 + 0,44 \cdot 0 = 32,59\%.$$

Це за умови, що на розчинність впливає лише температура зберігання або обробки. Решта значень Y визначені аналогічно і наведені в таблиці.

Теоретичні значення результативної ознаки Y

Зразки	x_i	Алгоритм	Y_i
1	0	$Y_1 = 32,59 + 0,44 \cdot 0$	32,59
2	10	$Y_2 = 32,59 + 0,44 \cdot 10$	36,99
3	20	$Y_3 = 32,59 + 0,44 \cdot 20$	41,39
4	30	$Y_4 = 32,59 + 0,44 \cdot 30$	45,79
5	40	$Y_5 = 32,59 + 0,44 \cdot 40$	50,19
6	50	$Y_6 = 32,59 + 0,44 \cdot 50$	54,59
7	60	$Y_7 = 32,59 + 0,44 \cdot 60$	58,99
8	70	$Y_8 = 32,59 + 0,44 \cdot 70$	63,39
9	80	$Y_9 = 32,59 + 0,44 \cdot 80$	67,79
Σ	360		451,7

Отримані таким чином теоретичні значення результативної ознаки можуть відрізнятись від фактичних $y_i \neq Y_i$, бо інакше зв'язок був би функціональним (рис. 3.12).

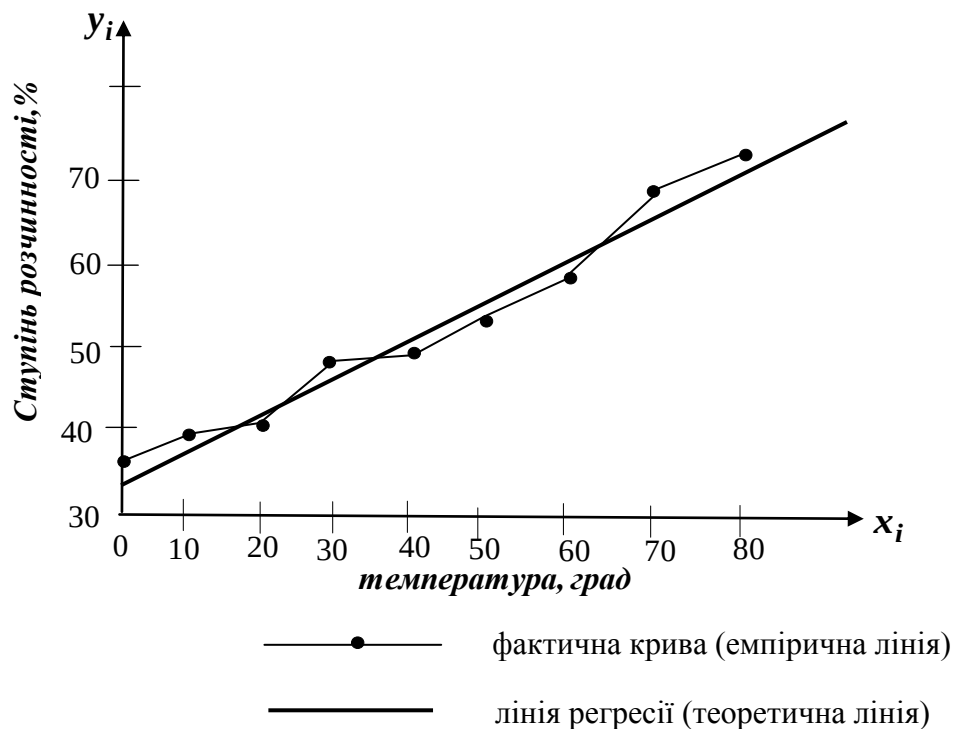


Рис. 3.12

3. Перевірка адекватності регресійної моделі і оцінка щільності зв'язку здійснюється за допомогою коефіцієнта детермінації R^2 . За правилом декомпозиції варіації її загальний розмір (загальна дисперсія σ_y^2) складається з варіації, яка зумовлена дією фактора (факторна дисперсія δ_y^2), та варіації, що зумовлена впливом решти ознак (залишкова дисперсія σ_e^2).

Для обчислення дисперсій скористаємося розрахунками таблиці:

До розрахунку дисперсій розчинності тіосульфату

Зразок	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(Y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - Y_i)^2$
1	-16,59	278,56	309,76	0,83
2	-13,19	173,98	178,24	0,0001
3	-8,99	80,82	79,44	0,036
4	-4,09	0,04	0	0,036
5	-0,19	16,73	19,96	0,096
6	2,71	7,34	19,96	2,86
7	6,61	43,69	79,44	4,8
8	14,11	199,09	178,24	0,83
9	19,71	388,48	309,76	4,45
Σ		1188,73	1174,8	13,93

Для вимірювання загального розміру варіації розчинності тіосульфату, що сформована під впливом усіх можливих факторів, використовується загальна дисперсія:

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{1188,73}{9} = 132,08.$$

Знайдемо факторну та залишкову дисперсії:

$$\delta_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{1174,8}{9} = 130,53,$$

$$\sigma_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - Y_i)^2}{n} = \frac{13,93}{9} = 1,55.$$

За правилом декомпозиції варіації сума факторної та залишкової дисперсії дорівнює загальній:

$$\sigma_y^2 = \delta_y^2 + \sigma_e^2,$$

$$132,08 = 130,53 + 1,55.$$

Частка факторної дисперсії у загальній характеризує щільність кореляційного зв'язку R^2 :

$$R^2 = \frac{\delta y^2}{\sigma_y^2} = \frac{130,53}{132,08} = 0,99.$$

Отже, 99% варіації показника розчинності тіосульфату лінійно пов'язана з варіацією температури, а 1% з варіацією інших факторів.

У малих сукупностях коефіцієнт детермінації схильний до випадкових коливань. Щоб підтвердити невинновість зв'язку, тобто його істотність, слід порівняти фактичне значення коефіцієнта детермінації з критичним (табличним) значенням. Критичні значення визначені для певного рівня істотності (α) та числа ступенів свободи:

$$k_1 = m - 1 \quad \text{та} \quad k_2 = n - m,$$

де n – обсяг сукупності ($n = 9$), m – кількість параметрів моделі (у прикладі їх два: a і b).

У наведеному прикладі $k_1 = 2 - 1 = 1$, $k_2 = 9 - 2 = 7$, а табличне значення для рівня істотності $\alpha = 0,05$ становить (див. додаток 7):

$$R_{0,95}^2(1;7) = 0,444.$$

Оскільки фактичне значення коефіцієнта детермінації перевищує критичне – $R^2 = 0,99 > 0,444$, то у 95 випадках зі 100 зв'язок між ознаками визначається істотним, тобто невинновим.

4. У моделях регресійного аналізу щільність зв'язку може бути виміряна з використанням лінійного коефіцієнта кореляції Пірсона r . Для його визначення скористаємось розрахунками таблиці.

До розрахунку коефіцієнта кореляції

Зразок	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	-40	1600	667,6
2	-30	900	395,7
3	-20	400	179,8
4	-10	100	40,9
5	0	0	0
6	10	100	27,1
7	20	400	132,2
8	30	900	423,3
9	40	1600	788,4
Σ		6000	2655

У нашому прикладі лінійний коефіцієнт кореляції становить:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{2655}{\sqrt{6000 \cdot 1188,73}} = 0,995.$$

Додатний знак коефіцієнта $r = 0,995 > 0$ вказує на наявність прямого зв'язку, а значення коефіцієнта свідчить про дуже високий рівень взаємозалежності ступеня розчинності тіосульфату від температури зразка. Зазначимо, що

$$r^2 = R^2, \quad (0,995)^2 = 0,99.$$

Перевіримо гіпотезу про істотність коефіцієнта кореляції, яка складається у виконанні критерію Стюдента $|t_r| > t_{kp}$. Обчислимо t_r за формулою:

$$t_r = r \cdot \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} = 0,995 \cdot \sqrt{\frac{9-2}{1-0,995^2}} = 26,49.$$

При заданій довірчій ймовірності $\gamma = 0,95$ (тобто при $\alpha = 0,05$) і $k = 7$ $t_{kp} = t_{0,05;7} = 2,36$ (додаток 6). Оскільки $t_r = 26,49 > 2,36$, то з ймовірністю

0,95 коефіцієнт кореляції вважаємо істотним. Отже, гіпотезу про відсутність кореляційного зв'язку між факторними величинами відкидаємо.

Приклад. Кореляційна таблиця має вигляд

$\begin{matrix} Y \\ \backslash \\ X \end{matrix}$	0,5	0,6	0,7	0,8
0,5	-	2	-	8
0,6	-	4	2	9
0,7	2	12	3	1
0,8	21	14	-	-
0,9	1	-	-	-

X дорівнює відношенню границі текучості сталі до границі її міцності;
 Y – вміст вуглецю в сталі у відсотках. Знайти рівняння регресії Y на X та рівняння регресії X на Y .

Розв'язок. Знайдемо суми частот n_{x_i} за рядками і n_{y_j} за стовпцями.

$\begin{matrix} Y \\ \backslash \\ X \end{matrix}$	0,5	0,6	0,7	0,8	n_{x_i}
0,5	-	2	-	8	10
0,6	-	4	2	9	15
0,7	2	12	3	1	18
0,8	21	14	-	-	35
0,9	1	-	-	-	1
n_{y_j}	24	32	5	18	79

1. Обчислимо середні $\bar{x}$ і $\bar{y}$:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^5 x_i \cdot \frac{n_{x_i}}{n} = \frac{0,5 \cdot 10 + 0,6 \cdot 15 + 0,7 \cdot 18 + 0,8 \cdot 35 + 0,9 \cdot 1}{79} = 0,703;$$

$$\bar{y} = \sum_{j=1}^4 y_j \cdot \frac{n_{y_j}}{n} = \frac{0,5 \cdot 24 + 0,6 \cdot 32 + 0,7 \cdot 5 + 0,8 \cdot 18}{79} = 0,622.$$

2. Обчислимо дисперсії σ_x^2 і σ_y^2 :

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^5 x_i^2 \cdot \frac{n_{x_i}}{n} - (\bar{x})^2 = \frac{0,5^2 \cdot 10 + 0,6^2 \cdot 15 + 0,7^2 \cdot 18 + 0,8^2 \cdot 35 + 0,9^2 \cdot 1}{79} - (0,703)^2 =$$

$$= 0,505 - (0,703)^2 = 0,012;$$

$$\sigma_y^2 = \sum_{j=1}^4 y_j^2 \cdot \frac{n_{y_j}}{n} - (\bar{y})^2 = \frac{0,5^2 \cdot 24 + 0,6^2 \cdot 32 + 0,7^2 \cdot 5 + 0,8^2 \cdot 18}{79} - (0,622)^2 =$$

$$= 0,398 - (0,622)^2 = 0,011.$$

3. Для обчислення коефіцієнта кореляції знайдемо спочатку момент кореляції (коваріацію) K_{xy} :

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^4 \frac{x_i y_j n_{ij}}{n} - \bar{x} \bar{y} = (0,5 \cdot (0,6 \cdot 2 + 0,8 \cdot 8) + 0,6 \cdot (0,6 \cdot 4 + 0,7 \cdot 2 + 0,8 \cdot 9) +$$

$$+ 0,7 \cdot (0,5 \cdot 2 + 0,6 \cdot 12 + 0,7 \cdot 3 + 0,8 \cdot 1) + 0,8 \cdot (0,5 \cdot 21 + 0,6 \cdot 14) + 0,9 \cdot (0,5 \cdot 1)) \cdot \frac{1}{79} -$$

$$- 0,703 \cdot 0,622 = 0,427 - 0,437 = -0,01.$$

Тоді коефіцієнт кореляції:

$$r = r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{\sigma_x^2} \cdot \sqrt{\sigma_y^2}} = \frac{-0,01}{\sqrt{0,012} \cdot \sqrt{0,011}} = \frac{-0,01}{0,11 \cdot 0,105} = -0,867.$$

4. Рівняння регресії Y на X :

$$Y - \bar{y} = r_{xy} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}),$$

$$Y - 0,622 = -0,867 \cdot \frac{0,105}{0,11} (x - 0,703), \quad \underline{Y = -0,828x + 1,204}.$$

Рівняння регресії X на Y :

$$X - \bar{x} = r_{xy} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \bar{y}),$$

$$X - 0,703 = -0,867 \cdot \frac{0,11}{0,105} (y - 0,622), \quad \underline{X = -0,908y + 1,268}.$$

5. Перевіримо гіпотезу про істотність коефіцієнта кореляції за критерієм Стьюдента. Обчислимо

$$t_r = r_{xy} \cdot \sqrt{\frac{n-2}{1-r_{xy}^2}} = -0,867 \cdot \sqrt{\frac{79-2}{1-(-0,867)^2}} = -15,28.$$

Обчислимо $t_{кр} = t_{0,05;77} = 1,996$ (див. додаток 6). Оскільки $|-15,28| = 15,28 > 1,996$, то нульову гіпотезу про рівність нулю генерального коефіцієнта кореляції відкидаємо. Отже, факторні ознаки X та Y корельовано. Вони змінюються у різних напрямках ($r_{xy} < 0$), кореляція є від'ємною.

6. Побудуємо графіки ліній регресій. Вони проходять через точку $M(\bar{x}, \bar{y})$, тому достатньо знайти ще по одній точці на цих прямих (наприклад, $P(0; 1,204)$ та $N(1,268; 0)$):

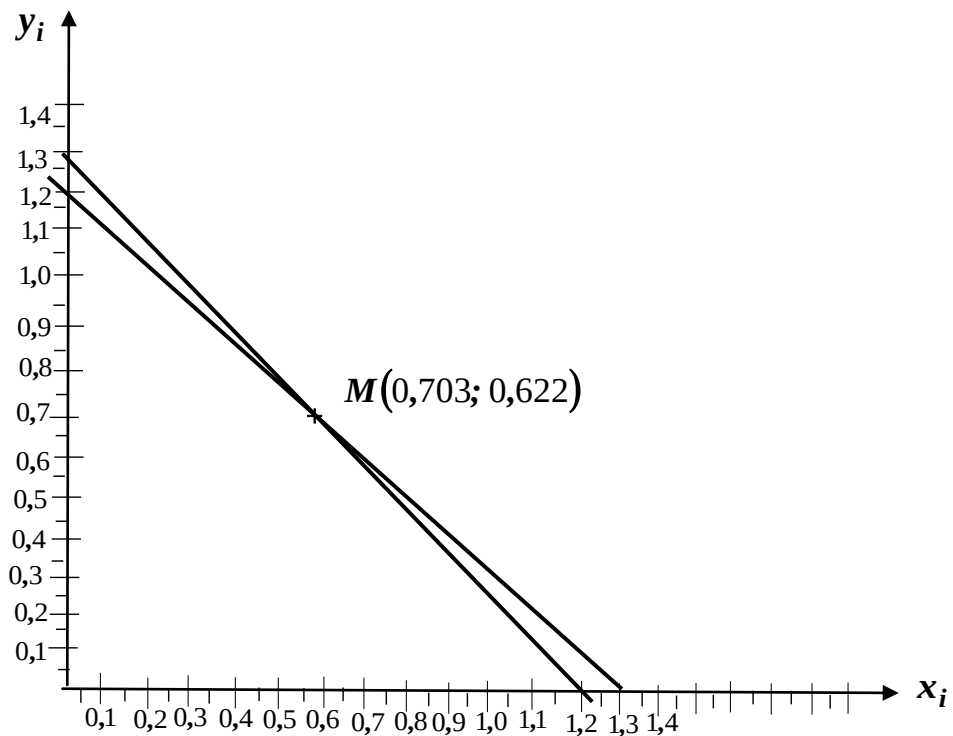


Рис. 3.13

Завдання для самостійної роботи

Приклад 1. З генеральної сукупності взята вибірка обсягом n . Потрібно: 1) знайти незміщену оцінку генеральної середньої, вибірккову і виправлену дисперсії; 2) побудувати полігон відносних частот; 3) побудувати емпіричну функцію розподілу.

x_i	21	33	57	69	75	83
n_i	12	8	5	11	6	9

Приклад 2. Дано інтервальний статистичний розподіл вибірки. Необхідно побудувати гістограму частот, обчислити $\bar{x}_B$, σ_B , s^2 .

I_i	5-7	7-9	9-11	11-13	13-15	15-17	17-19
n_i	8	9	14	41	76	21	13

Приклад 3. З генеральної сукупності взята вибірка обсягом n . Потрібно з надійністю **0,95**: 1) оцінити математичне сподівання α нормально розподіленої ознаки генеральної сукупності по вибірковій середній за допомогою довірчого інтервалу; 2) знайти довірчий інтервал, що покриває генеральне середньоквадратичне відхилення.

x_i	2	4	6	7	9
n_i	4	5	2	6	1

Приклад 4. Дано кореляційну таблицю.

Знайти: 1) вибіркові середні $\bar{x}$ і $\bar{y}$; 2) вибіркові середні квадратичні відхилення σ_x й σ_y ; 3) вибірковий кореляційний момент (коваріацію) K_{xy} ; 4) вибірковий коефіцієнт кореляції r_{xy} . 5) Знайти вибіркові рівняння ліній регресії Y на X і X на Y .

$Y \backslash X$	15	20	25	30
40	4	–	–	–
50	3	7	–	–
60	–	5	30	10
70	–	7	10	8
80	–	–	5	6

Приклад 5. Визначте, які з наведених пар ознак є факторними, а які результативними:

- 1) урожайність зернових та кількість опадів;
- 2) маса монети та час її обігу;
- 3) оцінка на іспиті та активність навчання студента;
- 4) строк експлуатації устаткування та продуктивність його роботи;
- 5) денне споживання масла певною особою та розмір її заробітної плати.

В задачах 2,3 виконати наступні вправи:

- 1) побудувати кореляційне поле залежності ознаки Y від X ;
- 2) обчислити параметри рівняння регресії;
- 3) обчислити коефіцієнт кореляції r та коефіцієнт детермінації R^2 ;
- 4) перевірити істотність зв'язку між зазначеними ознаками з ймовірністю 0,95 , зробити висновки.
- 5) побудувати графік лінії регресії.

Приклад 6. Залежність вмісту кремнію у чавуні від температури шлаку наведено в таблиці:

Зразки	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Вміст кремнію у чавуні, %	0,27	0,36	0,45	0,55	0,61	0,68	0,76	0,82	0,95
Температура шлаку, град	1330	1350	1370	1390	1410	1430	1450	1470	1490

Приклад 7. В таблиці наведено дані, які отримано за результатами опитування студентів, що мешкають в гуртожитку, а саме, середній бал за попередню сесію та кількість годин, які щотижнево студент витрачає на самостійну роботу:

Респондент	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Середній бал (п'ятибальна система)	4,6	4,3	3,8	3,8	4,2	4,3	3,8	4,0	3,1	3,9
Число годин самостійної роботи	25	22	9	15	15	30	20	30	10	17

Приклад 8. Дана кореляційна таблиця. Написати рівняння регресії Y на X та рівняння регресії X на Y . Знайти коефіцієнт кореляції, перевірити адекватність регресійної моделі, оцінити щільність кореляційного зв'язку.

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	4	9	14	19	24	29
130	3	3	-	-	-	-
140	-	5	4	-	-	-
150	-	-	40	2	8	-
160	-	-	5	10	6	-
170	-	-	-	4	7	3

Зразок білета залікового модуля

1. Дано інтервальний статистичний розподіл вибірки. Необхідно побудувати гістограму частот, обчислити $\bar{x}_B$, σ_B , s^2 .

I_i	5-7	7-9	9-11	11-13	13-15	15-17	17-19
n_i	8	9	9	14	41	76	21

(3 бали)

2. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю **0,95** невідомого математичного сподівання α нормально розподіленої ознаки X генеральної сукупності, якщо відомі генеральне середнє квадратичне відхилення $\sigma = 3$, вибіркова середня $\bar{x}_B = 12$ та об'єм вибірки $n = 25$.

(1 бал)

3. З генеральної сукупності взята вибірка обсягом n . Потрібно з надійністю **0,95**: 1) оцінити математичне сподівання α нормально розподіленої ознаки генеральної сукупності по вибірковій середній за допомогою довірчого інтервалу; 2) знайти довірчий інтервал, що покриває генеральне середньоквадратичне відхилення.

x_i	2	4	6	7	9
n_i	4	5	2	6	1

(3 бали)

4. Дано кореляційну таблицю. Знайти: 1) умовний закон розподілу X за умови $Y = 25$; 2) умовне середнє $\bar{x}_{Y=25}$; 3) вибіркові середні $\bar{x}$ і $\bar{y}$; 4) вибіркові середні квадратичні відхилення σ_x і σ_y ; 5) вибірковий кореляційний момент (коваріацію) K_{xy} ; 6) вибірковий коефіцієнт кореляції r_{xy} . 7) Встановити зв'язок між ознаками X і Y . 8) Перевірити гіпотезу про значимість вибіркового коефіцієнта кореляції при довірчій ймовірності $\gamma = 0,95$. 9) Знайти вибіркові рівняння ліній регресії Y на X і X на Y . 10) Побудувати вибіркові рівняння ліній регресії Y на X і X на Y та точку $M(\bar{x}; \bar{y})$.

$Y \backslash X$	10	15	20	25
20	1	–	–	–
30	6	2	–	–
40	–	5	40	5
50	–	2	8	7
60	–	–	4	7

(5 балів)

ЛІТЕРАТУРА

1. Вища математика: Збірник задач за редакцією В.П.Дубовика, І.І.Юрика. – К.: «Видавництво А.С.ЛК.», 2003. – 479 с.
2. Вища математика: основні розділи: Підручник. У двох книгах. Книга 1/ За ред. Г.Л.Кулініча. – К.: Либідь, 1995. – 372 с.
3. Вища математика: Посібник / Л.І. Дюженкова, О.Ю. Дюженкова, Г.О. Михалін– К.: Видавничий центр «Академія», 2002. – 624 с. (Альма-матер)
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятности и математической статистике. - М.: Высшая школа, 1979.
5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2003.
6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч.: Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 2000.
7. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2001.
8. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І., Савіна С. С. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посібник: У 2-х ч. – Ч. II. Математична статистика. – К.: КНЕУ, 2001. — 336 с.
9. Краткий курс математического анализа для ВТУЗов / Бермант А.Ф., Араманович И.Г. – М.: «Наука», 1967. – 735 с.
10. Овчинников П.Ф., Лисицин Б.М., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник. Ч. 2. – К.: Техніка, 2004. – 792 с.
11. Шипачёв В.С. Высшая математика: Учебник для вузов. – М.: Высшая школа, 1998.
12. Шипачёв В.С. Задачник по высшей математике: Учебное пособие для вузов.- М.: Высшая школа, 2002.
13. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. У 3-х кн. – К: Либідь, 1994

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ $t_\gamma = t(\gamma, n)$

$\gamma \backslash n$	0,95	0,99	0,999	$\gamma \backslash n$	0,95	0,99	0,099
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ $q = q(\gamma, n)$

$\gamma \backslash n$	0,95	0,99	0,999	$\gamma \backslash n$	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

КРИТИЧНІ ТОЧКИ РОЗПОДІЛУ χ^2

Число ступенів свободи k	Рівень значущості α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

КРИТИЧНІ ТОЧКИ РОЗПОДІЛУ СТЬЮДЕНТА

Число ступенів свободи k	Рівень значущості α (двобічна критична область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Рівень значущості α (однобічна критична область)					

**КРИТИЧНІ ЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ДЕТЕРМІНАЦІЇ R^2
І КОРЕЛЯЦІЙНОГО ВІДНОШЕННЯ η^2 ДЛЯ РІВНЯ ІСТОТНОСТІ
 $\alpha = 0,05$**

k_2	k_1				
	1	2	3	4	5
5	0,569	0,699	0,764	0,806	0,835
6	0,500	0,632	0,704	0,751	0,785
7	0,444	0,575	0,651	0,702	0,739
8	0,399	0,527	0,604	0,657	0,697
9	0,362	0,488	0,563	0,618	0,659
10	0,332	0,451	0,527	0,582	0,624
11	0,306	0,420	0,495	0,550	0,593
12	0,283	0,394	0,466	0,521	0,564
13	0,264	0,370	0,440	0,494	0,538
14	0,247	0,348	0,417	0,471	0,514
15	0,232	0,330	0,397	0,449	0,492
16	0,219	0,312	0,378	0,429	0,477
17	0,208	0,297	0,361	0,411	0,488
18	0,197	0,283	0,345	0,394	0,435
19	0,187	0,270	0,331	0,379	0,419
20	0,179	0,259	0,318	0,364	0,404
21	0,171	0,248	0,305	0,351	0,390
22	0,164	0,238	0,294	0,339	0,377
23	0,157	0,229	0,283	0,327	0,365
24	0,151	0,221	0,273	0,316	0,353
25	0,145	0,213	0,264	0,306	0,342
26	0,140	0,206	0,256	0,297	0,332
27	0,135	0,199	0,247	0,288	0,323
28	0,130	0,193	0,240	0,279	0,314
29	0,126	0,187	0,233	0,271	0,305
30	0,122	0,182	0,227	0,264	0,297
32	0,115	0,171	0,214	0,250	0,282
34	0,108	0,162	0,203	0,238	0,268
36	0,102	0,153	0,192	0,226	0,256
38	0,097	0,146	0,184	0,218	0,245
40	0,093	0,139	0,176	0,207	0,234
50	0,075	0,113	0,143	0,170	0,194
60	0,063	0,095	0,121	0,144	0,165
80	0,047	0,072	0,093	0,110	0,127
100	0,038	0,058	0,075	0,090	0,103
120	0,032	0,049	0,063	0,075	0,087
200	0,019	0,030	0,038	0,046	0,053
400	0,010	0,015	0,019	0,023	0,027

КРИТИЧНІ ТОЧКИ РОЗПОДІЛУ ФІШЕРА (F - РОЗПОДІЛУ)

Рівень значущості 0,05									
$k_2 \backslash k_1$	1	2	3	4	5	6	12	24	∞
1	164,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	244,9	249,0	254,3
2	18,5	9,2	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,7	8,6	8,5
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	5,9	5,8	5,6
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,1	5,0	4,7	4,5	4,4
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4	4,3	4,0	3,8	3,7
7	5,6	4,7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,6	3,4	3,2
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7	3,6	3,3	3,1	2,9
9	5,1	4,3	3,9	3,6	3,5	3,4	3,1	2,9	2,7
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	2,9	2,7	2,5
11	4,8	4,0	3,6	3,4	3,2	3,1	2,8	2,6	2,4
12	4,8	3,9	3,5	3,3	3,1	3,0	2,7	2,5	2,3
13	4,7	3,8	3,4	3,2	3,0	2,9	2,6	2,4	2,2
14	4,6	3,7	3,3	3,1	3,0	2,9	2,5	2,3	2,1
15	4,5	3,7	3,3	3,1	2,9	2,8	2,5	2,3	2,1
16	4,5	3,6	3,2	3,0	2,9	2,7	2,4	2,2	2,0
17	4,5	3,6	3,2	3,0	2,8	2,7	2,4	2,2	2,0
18	4,4	3,6	3,2	2,9	2,8	2,7	2,3	2,1	1,9
19	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
20	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
22	4,3	3,4	3,1	2,8	2,7	2,6	2,2	2,0	1,8
24	4,3	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,2	2,0	1,7
26	4,2	3,4	3,0	2,7	2,6	2,4	2,1	1,9	1,7
28	4,2	3,3	2,9	2,7	2,6	2,4	2,1	1,9	1,6
30	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,1	1,9	1,6
40	4,1	3,2	2,9	2,6	2,5	2,3	2,0	1,8	1,5
60	4,0	3,2	2,8	2,5	2,4	2,3	1,9	1,7	1,4
120	3,9	3,1	2,7	2,5	2,3	2,2	1,8	1,6	1,3
∞	3,8	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	1,8	1,5	1,0

Рівень значущості 0,01										
$k_2 \backslash k_1$	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5981	6106	6234	6366
2	98,5	99,0	99,2	99,3	99,3	99,4	99,3	99,4	99,5	99,5
3	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,5	27,1	26,6	26,1
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	14,8	14,4	13,9	13,5
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,3	9,9	9,5	9,0
6	13,7	10,9	9,8	9,2	8,8	8,5	8,1	7,7	7,3	6,9
7	12,3	9,6	8,5	7,9	7,5	7,2	6,8	6,5	6,1	5,7
8	11,3	8,7	7,6	7,0	6,6	6,4	6,0	5,7	5,3	4,9
9	10,6	8,0	7,0	6,4	6,1	5,8	5,5	5,1	4,7	4,3
10	10,0	7,6	6,6	6,0	5,6	5,4	5,1	4,7	4,3	3,9
11	9,7	7,2	6,2	5,7	5,3	5,1	4,7	4,4	4,0	3,6
12	9,3	6,9	6,0	5,4	5,1	4,8	4,5	4,2	3,8	3,4
13	9,1	6,7	5,7	5,2	4,9	4,6	4,3	4,0	3,6	3,2
14	8,9	6,5	5,6	5,0	4,7	4,5	4,1	3,8	3,4	3,0
15	8,7	6,4	5,4	4,9	4,6	4,3	4,0	3,7	3,3	2,9
16	8,5	6,2	5,3	4,8	4,4	4,2	3,9	3,6	3,2	2,8
17	8,4	6,1	5,2	4,7	4,3	4,1	3,8	3,5	3,1	2,7
18	8,3	6,0	5,1	4,6	4,3	4,0	3,7	3,4	3,0	2,6
19	8,2	5,9	5,0	4,5	4,2	3,9	3,6	3,3	2,9	2,4
20	8,1	5,9	4,9	4,4	4,1	3,9	3,6	3,2	2,9	2,4
22	7,9	5,7	4,8	4,3	4,0	3,8	3,5	3,1	2,8	2,3
24	7,8	5,6	4,7	4,2	3,9	3,7	3,3	3,0	2,7	2,2
26	7,7	5,5	4,6	4,1	3,8	3,6	3,3	3,0	2,6	2,1
28	7,6	5,5	4,6	4,1	3,8	3,5	3,2	2,9	2,5	2,1
30	7,6	5,4	4,5	4,0	3,7	3,5	3,2	2,8	2,5	2,0
40	7,3	5,2	4,3	3,8	3,5	3,3	3,0	2,7	2,3	1,8
60	7,1	5,0	4,1	3,7	3,3	3,1	2,8	2,5	2,1	1,6
120	6,9	4,8	4,0	3,5	3,2	3,0	2,7	2,3	2,0	1,4
∞	6,6	4,6	3,8	3,3	3,0	2,8	2,5	2,2	1,8	1,0

Рівень значущості 0,001										
$k_2 \backslash k_1$	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	Змінюється від 400 000 до 600 000									
2	998	999	999	999	999	999	999	999	999	999
3	167	148	141	137	135	133	131	128	126	123
4	74,1	61,3	56,2	53,4	51,7	50,5	49,0	47,4	45,8	44,1
5	47,0	36,6	33,2	31,1	29,8	28,8	27,6	26,4	25,1	23,8
6	35,5	27,0	23,7	21,9	20,8	20,0	19,0	18,0	16,9	15,8
7	29,2	21,7	18,8	17,2	16,2	15,5	14,6	13,7	12,7	11,7
8	25,4	18,5	15,8	14,4	13,5	12,9	12,0	11,2	10,3	9,3
9	22,9	16,4	13,9	12,6	11,7	11,1	10,4	9,6	8,7	7,8
10	21,0	14,9	12,6	11,3	10,5	9,9	9,2	8,5	7,6	6,8
11	19,7	13,8	11,6	10,4	9,6	9,1	8,3	7,6	6,9	6,0
12	18,6	13,0	10,8	9,6	8,9	8,4	7,7	7,0	6,3	5,4
13	17,8	12,3	10,2	9,1	8,4	7,9	7,2	6,5	5,8	5,0
14	17,1	11,8	9,7	8,6	7,9	7,4	6,8	6,1	5,4	4,6
15	16,6	11,3	9,3	8,3	7,6	7,1	6,5	5,8	5,1	4,3
16	16,1	11,0	9,0	7,9	7,3	6,8	6,2	5,6	4,9	4,1
17	15,7	10,7	8,7	7,7	7,0	6,6	6,0	5,3	4,6	3,9
18	15,4	10,4	8,5	7,5	6,8	6,4	5,8	5,1	4,5	3,7
19	15,1	10,2	8,3	7,3	6,6	6,2	5,6	5,0	4,3	3,5
20	14,8	10,0	8,1	7,1	6,5	6,0	5,4	4,8	4,2	3,4
22	14,4	9,6	7,8	6,8	6,2	5,8	5,2	4,6	3,9	3,2
24	14,0	9,3	7,6	6,6	6,0	5,6	5,0	4,4	3,7	3,0
26	13,7	9,1	7,4	6,4	5,8	5,4	4,8	4,2	3,6	2,8
28	13,5	8,9	7,2	6,3	5,7	5,2	4,7	4,1	3,5	2,7
30	13,3	8,8	7,1	6,1	5,5	5,1	4,6	4,0	3,4	2,6
40	12,6	8,2	6,6	5,7	5,1	4,7	4,2	3,6	3,0	2,2
60	12,0	7,8	6,2	5,3	4,8	4,4	3,9	3,3	2,7	1,9
120	11,4	7,3	5,8	5,0	4,4	4,0	3,5	3,0	2,4	1,6
∞	10,8	6,9	5,4	4,6	4,1	3,7	3,3	2,7	2,1	1,0

З М І С Т

Вступ	3
Розділ 1. ПОВЕРХНЕВІ ТА ПОТРІЙНІ ІНТЕГРАЛИ	
1.1. Поверхневі інтеграли першого роду.	4
1.2. Поверхневі інтеграли другого роду.	10
1.3. Потрійний інтеграл.	14
1.4. Формула Остроградського – Гауса.	21
Розділ 2. СКАЛЯРНЕ І ВЕКТОРНЕ ПОЛЯ	
2.1. Поверхні рівня.	25
2.2. Похідна за напрямом.	26
2.3. Градієнт функції.	28
2.4 Векторні лінії.	35
2.5 Потік вектора. Дивергенція.	36
2.6. Циркуляція і ротор векторного поля.	39
2.7. Види векторних полів.	41
2.7.1 Трубочасте (соленоїдне) векторне поле.	41
2.7.2. Потенціальне (безвихрове) векторне поле.	42
2.7.3. Гармонічне (лапласово) векторне поле.	43
Розділ 3. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ	
3.1. Основні поняття та означення.	50
3.1.1. Задачі математичної статистики.	50
3.1.2. Генеральна і вибіркова сукупності.	50
3.1.3. Полігон і гістограма частот.	52
3.1.4. Емпірична функція розподілу.	53
3.2. Статистичні оцінки параметрів розподілу	59
3.2.1. Точкові оцінки.	60
3.2.2. Інтервальні оцінки	65
3.3. Статистична перевірка статистичних гіпотез	73
3.3.1. Означення статистичної гіпотези	73
3.3.2. Критерій статистичної перевірки гіпотези	74
3.3.3. Критерій узгодження Пірсона	76
3.4. Методи аналізу взаємозв'язків. Кореляція та регресія	82
3.4.1. Сутність та види взаємозв'язків	82
3.4.2. Етапи кореляційно-регресійного аналізу	84
3.4.3. Способи виявлення наявності взаємозв'язків	84
3.4.4. Парна лінійна регресія	85
3.4.5. Нелінійна регресія	86
3.4.6. Оцінювання щільності кореляційного зв'язку	87
3.4.7. Перевірка істотності кореляційного зв'язку	89
ЛІТЕРАТУРА	105
ДОДАТКИ	106

Навчальне видання

Моня Андрій Григорович
Кадильникова Тетяна Михайлівна
Пасічник Ірина Володимирівна
Запорожченко Олена Євгенівна
Щербина Ірина Володимирівна

Спеціальні розділи математики

Конспект лекцій

Тем. план 2011, поз. 99

Підписано до друку 03.11.2011. Формат 60x84 1/16. Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид. арк. 7.0. Умов. друк. арк. 6,91. Тираж 100 пр. Замовлення №

Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпропетровськ-5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ