

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ**

**РОБОЧА ПРОГРАМА,  
методичні вказівки та індивідуальні завдання  
до вивчення дисциплін «Лінійна алгебра і аналітична геометрія»,  
«Математичний аналіз» та «Диференціальні рівняння»  
для студентів напрямку 6.050702 – електромеханіка**

**Частина 2**

Затверджено  
на засіданні Вченої ради  
академії  
Протокол № 1 від 29.01.2013

**Дніпропетровськ НМетАУ 2013**

УДК 517(07)

Робоча програма, методичні вказівки та індивідуальні завдання до вивчення дисциплін «Лінійна алгебра і аналітична геометрія», «Математичний аналіз» та «Диференціальні рівняння» для студентів напрямку 6.050702 – електромеханіка. Частина 2 / Укл.: А.В. Павленко, В.Л. Копорулін, Л.П. Кагадій, Л.В. Моссаковська. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2013. – 86 с.

Наведена робоча програма дисциплін «Математичний аналіз» та «Диференціальні рівняння», списки рекомендованої літератури, методичні вказівки до вивчення кожної з дисциплін, що супроводжуються розв'язанням типових типових прикладів з докладними поясненнями, та варіанти контрольних завдань.

Призначені для студентів другого курсу напрямку 6.050702 – електромеханіка заочної форми навчання.

Укладачі: А.В. Павленко, д-р фіз.-мат. наук, проф.  
В.Л. Копорулін, канд. техн. наук, доц.  
Л.П. Кагадій, канд. фіз.-мат. наук, доц.  
Л.В. Моссаковська, ст. викл.

Відповідальний за випуск А.В. Павленко, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рецензент О.О. Сдвижкова, д-р фіз.-мат. наук, проф. (НГУ)

Підписано до друку 20.09.2013. Формат 60x84 1/16. Папір друк. Друк плоский.  
Облік.-вид. арк. 5,06. Умов. друк. арк. 4,95. Тираж 100 пр. Замовлення №

Національна металургійна академія України  
49600, м. Дніпропетровськ-5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП</b> .....	3
<b>МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ</b> .....	4
РОБОЧА ПРОГРАМА .....	4
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА .....	6
КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ .....	8
КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 3 .....	9
Методичні вказівки до виконання .....	9
Індивідуальні завдання .....	21
КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 4 .....	28
Методичні вказівки до виконання .....	28
Індивідуальні завдання .....	46
<b>ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ</b> .....	51
РОБОЧА ПРОГРАМА .....	51
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА .....	53
КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ .....	55
КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 1 .....	56
Методичні вказівки до виконання .....	56
Індивідуальні завдання .....	66
КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 2 .....	71
Методичні вказівки до виконання .....	71
Індивідуальні завдання .....	81
<b>ВИМОГИ</b> до оформлення контрольної роботи, її подання і перевірка .....	86

## ВСТУП

Вища математика без перебільшення є однією з найважливіших складових практично усіх природознавчих і технічних дисциплін, зокрема, теоретичних основ електротехніки. Тому її вивчення вкрай важливе для фундаментальної фахової підготовки сучасного інженера-електрика.

Лекції і практичні заняття, які проводяться для студентів заочної форми навчання, носять переважно оглядовий характер. Їх мета – створити уяву щодо загальної схеми побудови даного розділу математики, ознайомити з основними теоретичними відомостями і методами розв’язання типових задач. Головною ж

формою навчання студента-заочника є самостійна робота. Вивчення теоретичних положень доцільно супроводжувати самостійним розв'язанням відповідних задач і лише після вироблення достатніх практичних навичок приступати до виконання завдань контрольної роботи. Необхідні консультації протягом навчального семестру надаються викладачами академії згідно із затвердженим розкладом.

Сьогодні в Інтернеті неважко знайти величезну кількість літератури з будь-якої теми, в тому числі і з вищої математики. Тому до списку рекомендованої літератури увійшли лише деякі з найбільш уживаних на думку авторів джерел. Рекомендації щодо їх використання дані у методичних вказівках до виконання кожної контрольної роботи. Консультації відносно інших підручників студент може отримати у викладача.

## **МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ**

### **РОБОЧА ПРОГРАМА** навчальної дисципліни «МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ»

**II курс I семестр**

#### **Розподіл навчальних годин**

<b>Кількість годин</b>				<b>Самостійної роботи</b>	<b>Кількість контр. робіт</b>	<b>Форма звітності</b>
<b>УСЬОГО</b>	<b>Аудиторних занять</b>		<b>Практичних занять</b>			
	<b>Усього</b>	<b>Лекцій</b>				
<b>198</b>	<b>32</b>	<b>16</b>	<b>16</b>	<b>166</b>	<b>2</b>	<b>екзамен</b>

### **Зміст програми**

#### **1. Подвійний і криволінійні інтеграли та їх застосування**

28. Означення подвійного інтеграла у декартових координатах, умови його існування, геометричний зміст і основні властивості. Обчислення подвійного інтеграла у декартових та полярних координатах.

29. Обчислення площі плоскої фігури, об'єму тіла та площі поверхні.

30. Застосування подвійного інтеграла при розв'язуванні деяких задач механіки: обчислення статичних моментів, координат центру мас та моментів інерції плоскої платівки.

31. Поняття криволінійного інтеграла першого роду, його геометричний зміст і обчислення для різних способів завдання кривої.

32. Поняття криволінійного інтеграла другого роду, його фізичний зміст, обчислення, зв'язок із подвійним інтегралом (формула Гріна), незалежність від шляху інтегрування.

## 2. Числові ряди

33. Поняття числового ряду. Збіжність і розбіжність ряду. Ряд геометричної прогресії, ряд Діріхле. Необхідна умова збіжності. Достатня умова розбіжності. Залишок числового ряду. Основні властивості збіжних рядів.

34. Поняття факторіала. Достатні умови (ознаки) збіжності числових рядів з додатними членами: ознака порівняння у звичайному та граничному вигляді, ознака Д'Аламбера, "радикальна" ознака Коші, "інтегральна" ознака Маклорена-Коші, ознака Раабе.

35. Абсолютна і умовна збіжності знакозмінних числових рядів. Збіжність знакопозначених рядів (ознака Лейбніца). Властивості знакопозначених числових рядів.

## 3. Степеневі ряди та їх застосування

36. Поняття функціонального ряду. Область збіжності і залишок функціонального ряду, абсолютна і умовна збіжності.

37. Поняття рівномірної збіжності функціонального ряду. Властивості рівномірно збіжних рядів. Ознака Вейєрштрасса.

38. Степеневий ряд як частинний випадок функціонального ряду. Збіжність степеневих рядів (теорема Абеля). Радіус та інтервал збіжності степеневого ряду, їх обчислення. Область збіжності степеневого ряду. Основні властивості степеневих рядів.

39. Ряди Тейлора і Маклорена. Умови розвинення функції в ряд Тейлора. Формула Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа. Розвинення

функцій в ряди Тейлора і Маклорена. Таблиця найпростіших розвинень та її застосування.

40. Наближені обчислення значень функцій, визначених інтегралів та відшукування частинних розв'язків деяких диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів.

#### **4. Ряди Фур'є. Перетворення Фур'є**

41. Періодичні процеси. Гармонічні коливання. Тригонометричний ряд та його властивості. Гармонічний аналіз.

42. Тригонометричний ряд Фур'є. Теорема збіжності ряду Фур'є. Умови Діріхле.

43. Розвинення в ряд Фур'є періодичних функцій на основному і довільному проміжках. Ефект Гіббса. Особливості рядів Фур'є для парних і непарних функцій.

44. Розвинення в ряд Фур'є неперіодичних функцій.

45. Ряд Фур'є в комплексній формі. Поняття інтеграла Фур'є. Інтеграл Фур'є для парних і непарних функцій. Комплексна форма інтеграла Фур'є.

46. Перетворення Фур'є. Бета- і гамма-функції та їх застосування у перетвореннях Фур'є.

### **РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА**

#### **ПІДРУЧНИКИ І НАВЧАЛЬНІ ПОСІБНИКИ**

1. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. – СПб.: Лань, 2008. – 736 с.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 2: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2000. – 416 с.
3. Демидович Б.П., Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики: Учеб. пособие для вузов / Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. – М.: Астрель; АСТ, 2001. – 656 с.
4. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.

5. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч.1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення. – К.: Техніка, 2000. – 592 с.
6. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч.2: Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи. – К.: Техніка, 2000. – 792 с.
7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. В 2 т. Т. 2: Учеб. пособие для втузов. – М.: Наука, 1985. – 560 с. (Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. пособие для втузов. В 2-х т. Т. 2. – М.: Интеграл-пресс, 2009. – 544 с.)
8. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 608 с.
9. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М. та ін. Вища математика у прикладах та задачах. Ч. 2. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 440 с.
10. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М. та ін. Вища математика у прикладах та задачах. Ч. 3. Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 596 с.
11. Шипачев В.С. Высшая математика: Учебник для вузов. – М.: Юрайт, Высшее образование, 2009. – 480 с.

#### **ЗБІРНИКИ ЗАДАЧ**

12. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учеб. пособие. – СПб.: Профессия, 2001. – 432 с.
13. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін.; За ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. – К.: А.С.К., 2004. – 480 с.
14. Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / Под ред. С.Н. Федина. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 592 с.

15. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 336 с.
16. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2003. – 304 с.

#### ЛІТЕРАТУРА ВИДАВНИЦТВА НМетАУ

17. Інтегрування: Навч. посібник / Л.П. Кагадій та ін. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2011. – 192 с.
18. Кагадій Л.П., Чуднов К.У. Вища математика (розділ “Ряди Фур’є”): Конспект лекцій. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2002. – 24 с.
19. Кагадій Л.П., Чуднов К.У., Павленко А.В. Вища математика. Розділ “Ряди”: Конспект лекцій. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2008. – 51 с.
20. Кадильникова Т.М. та ін. Вища математика в прикладах та задачах: Навч. посібник. У 7 ч. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2010-2011.
21. Копорулін В.Л., Моссаковська Л.В. Степеневі ряди та їх застосування: Навч. посібник. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2012. – 88 с.

#### КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ

Виконання кожної контрольної роботи треба починати з вивчення теоретичних положень за наведеними посиланнями, причому це необхідно поєднувати з самостійним розв’язанням рекомендованих задач. До виконання контрольних завдань доцільно приступати тільки після вироблення достатніх практичних навичок. Типові приклади наведені з метою допомогти в цьому. Вони перенумеровані наступним чином: перша цифра означає номер дисципліни (1 – лінійна алгебра і аналітична геометрія, 2 – математичний аналіз, 3 – диференціальні рівняння), друга цифра – порядковий номер контрольної роботи, третя цифра – порядковий номер прикладу. Рисунки мають аналогічну нумерацію; переважна більшість з тих, що містять графіки функцій, побудована за допомогою **Mathcad**.



## КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 3

### МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ

Рекомендується (скориставшись одним або двома з наведених нижче джерел)

- вивчити теоретичні положення за [1], гл. VIII, § 1, гл. IX, § 1, гл. XI, § 1; [3], гл. XXI, §§ 1-7, гл. XXIII, гл. XXIV, §§ 1-3, 6, 7; [4], гл. 9, § 1, гл. 10, §§ 1, 3; [5], гл. 6, §§ 3.3, 3.6, 3.7, 7.4-7.10, 8.1-8.2; [6], гл. 3, §§ 2.1-2.3, 2.6, 2.7, 2.9-2.13, 2.15-2.17; [7], гл. XIV, §§ 1-10, гл. XV, §§ 1-4, гл. XVI, §§ 1-8; [8], гл. XI, § 53, гл. XII, §§ 55-56, гл. XIII; [11], гл. 13, §§ 1-9, гл. 14, §§ 1-4;
- розібрати розв’язання задач у [2], гл. I, §§ 1-6, гл. II, §§ 1-4, гл. III, § 1; [9], гл. 3, § 1, гл. 4, § 1; [10], гл. 2, § 1;
- самостійно розв’язати задачі: [2], №№ 10-12, 17, 19, 22, 23, 31, 34, 41, 42, 186, 188, 191, 197, 214, 217, 222, 301, 302, 304, 305, 307, 308, 310, 311, 314; [12], №№ 2740, 2746, 2749, 2754, 2755, 2762, 2764, 2766, 2791, 2797, 2799, 3477, 3478, 3498, 3499, 3506, 3508, 3536, 3539, 3597, 3598, 3770, 3772, 3775, 3806, 3808, 3813, 3838, 3839; [13], гл. 9, №№ 2, 4, 41, 43, 50, 52, 54, 56, 59, 64, 66, 68, 71, 75, 77, 80, 131, 136, 140, 143, 154, гл. 10, №№ 1, 3, 7, 9, 18, 24, 46, 48, 50, 51, 69, 71, 74, 76, 111, 116, 124, 130, 406 – 414, 429, 471 – 473, 477, 478, 491, 492, 537, 539; [14], №№ 1.1.12, 13, 20, 21, 24, 25, 29, 30, 37, 39, 40, 42, 44, 46-49, 51, 53, 1.2.7, 8, 12, 14, 16, 18, 3.1.9, 10, 11, 16, 17, 21, 24, 27 - 29, 64, 3.2.8, 9, 13, 3.3.4, 5, 4.1.6, 9, 14, 25, 34, 4.2.3, 7, 16, 17, 42; [15], №№ 2292, 2294, 2297, 2387, 2396, 2422, 2424, 2426, 2428, 2432, 2434, 2436, 2438, 2439; [16], гл. 8, №№ 11, 13, 18, 43, 46, 47, 53, 54, 62, 82, 86, 87, 98, 102, гл. 13, №№ 1, 5, 10, 15, 17, 28, 30, 59, 60, 103, 105, 109, 110, 116, 122, 127, 130.

**Приклад 2.3.1.** Обчислити повторний інтеграл.

$$\text{а) } \int_0^2 dx \int_x^{x\sqrt{3}} \frac{xdy}{x^2 + y^2}; \quad \text{б) } \int_1^3 dy \int_2^5 \frac{dx}{(x+2y)^2}.$$

*Розв’язання.*

$$\text{а) } \int_0^2 dx \int_x^{x\sqrt{3}} \frac{xdy}{x^2 + y^2} = \int_0^2 \left( x \cdot \frac{1}{x} \arctg \frac{y}{x} \Big|_x^{x\sqrt{3}} \right) dx = \int_0^2 (\arctg \sqrt{3} - \arctg 1) dx =$$

$$= \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \cdot x \Big|_0^2 = \frac{\pi}{12} \cdot 2 = \frac{\pi}{6};$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \int_1^3 dy \int_2^5 \frac{dx}{(x+2y)^2} &= - \int_1^3 \left( \frac{1}{x+2y} \Big|_2^5 \right) dy = - \int_1^3 \left( \frac{1}{5+2y} - \frac{1}{2+2y} \right) dy = \\ &= - \left( \frac{1}{2} \ln|5+2y| - \frac{1}{2} \ln|2+2y| \right) \Big|_1^3 = - \frac{1}{2} (\ln 11 - \ln 8 - \ln 7 + \ln 4) = - \frac{1}{2} \ln \frac{44}{56} = \frac{1}{2} \ln \frac{14}{11}. \end{aligned}$$

**Приклад 2.3.2.** Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі.

$$\text{а) } \int_0^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x, y) dy; \quad \text{б) } \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2-1}^{y^2/2} f(x, y) dx.$$

*Розв'язання.*

а) Судячи з заданого повторного інтеграла, область інтегрування спроектована на вісь  $Ox$  у відрізок  $[1, 4]$  і обмежена знизу лінією  $y = \sqrt{4x - x^2}$ , а зверху – лінією  $y = \sqrt{16 - x^2}$  (обидві ці лінії є частинами відповідних кіл). Область показана на рис. 2.3.1.

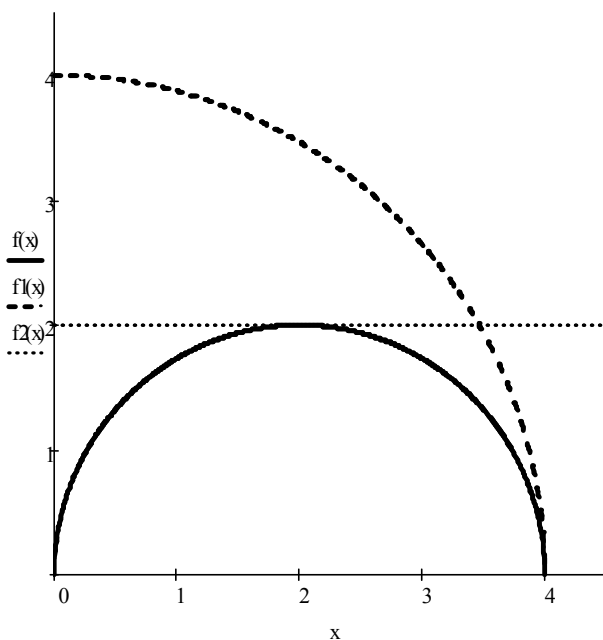


Рис. 2.3.1

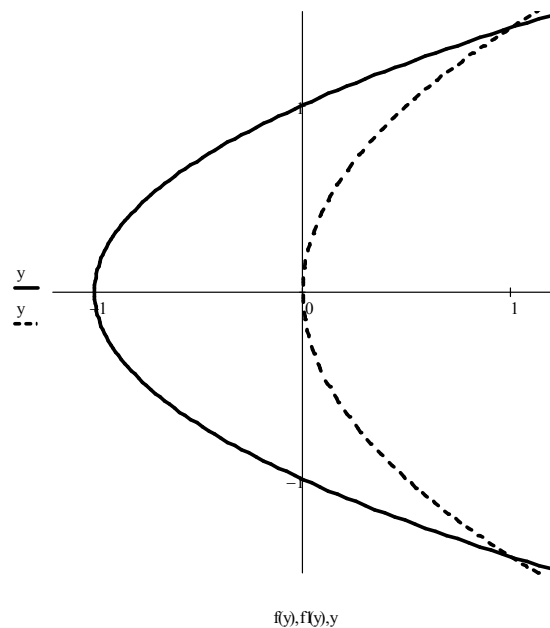


Рис. 2.3.2

Перепроєктуємо область на вісь  $Oy$ . Для цього розв'яжемо рівняння обмежуючих ліній відносно  $x$ , враховуючи, що  $x \geq 0$ :

$$y^2 = 4x - x^2 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{4 - y^2}, \quad y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow x = \sqrt{16 - y^2}.$$

Область інтегрування розіб'ється на три простих області. Перша з них проектується у відрізок  $[0, 2]$  осі  $Oy$  і обмежена зліва віссю  $Oy$ , а справа – лінією  $x = 2 - \sqrt{4 - y^2}$ . Друга область проектується також у відрізок  $[0, 2]$  осі  $Oy$  і обмежена зліва лінією  $x = 2 + \sqrt{4 - y^2}$ , а справа – лінією  $x = \sqrt{16 - y^2}$ . Третя область проектується у відрізок  $[2, 4]$  осі  $Oy$  і обмежена зліва віссю  $Oy$ , а справа – лінією  $x = \sqrt{16 - y^2}$ . Отже,

$$\int_0^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^2 dy \int_0^{2-\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^2 dy \int_{2+\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_0^{\sqrt{16-y^2}} f(x, y) dx;$$

б) Судячи з заданого повторного інтеграла, область інтегрування спроектована на вісь  $Oy$  у відрізок  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$  і обмежена зліва лінією  $x = y^2 - 1$ , а справа – лінією  $x = y^2 / 2$  (обидві ці лінії є параболою). Область показана на рис. 2.3.2. Перепроєктуємо область на вісь  $Ox$ . Для цього розв'яжемо рівняння обмежуючих ліній відносно  $y$ :

$$x = y^2 - 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x+1}, \quad x = y^2 / 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2x}.$$

Область інтегрування розіб'ється на три простих області. Перша з них проектується у відрізок  $[-1, 0]$  осі  $Ox$  і обмежена знизу гілкою  $y = -\sqrt{x+1}$  параболою  $x = y^2 - 1$ , а зверху – гілкою  $y = \sqrt{x+1}$  тієї ж самої параболою. Друга область проектується у відрізок  $[0, 1]$  осі  $Ox$  і обмежена знизу гілкою  $y = -\sqrt{x+1}$  параболою  $x = y^2 - 1$ , а зверху – гілкою  $y = -\sqrt{2x}$  параболою  $x = y^2 / 2$ . Третя область проектується у той самий відрізок  $[0, 1]$  осі  $Ox$  і обмежена знизу гілкою  $y = \sqrt{2x}$  параболою  $x = y^2 / 2$ , а зверху – гілкою  $y = \sqrt{x+1}$  параболою  $x = y^2 - 1$ . Отже,

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2-1}^{y^2/2} f(x, y) dx = \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{x+1}}^{\sqrt{x+1}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x+1}}^{-\sqrt{2x}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_{\sqrt{2x}}^{\sqrt{x+1}} f(x, y) dy.$$

**Приклад 2.3.3.** Обчислити подвійний інтеграл  $\iint_D (3x^2 - 2xy + y) dx dy$ , де

область  $D$  обмежена лініями  $x = 0$ ,  $x = y^2$ ,  $y = 2$ .

*Розв'язання.* Область  $D$  зображена на рис. 2.3.3 (обмежена гілкою параболи  $x = y^2$ , віссю  $Oy$  та прямою  $y = 2$ ). Спроекуємо її на вісь  $Oy$ .

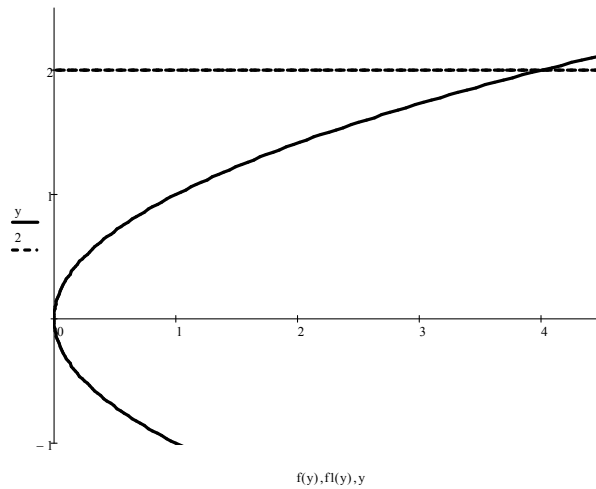


Рис. 2.3.3

$$\begin{aligned} \text{Тоді } \iint_D (3x^2 - 2xy + y) \, dx dy &= \int_0^2 dy \int_0^{y^2} (3x^2 - 2xy + y) \, dx = \int_0^2 \left( x^3 - x^2 y + xy \right) \Big|_0^{y^2} dy = \\ &= \int_0^2 (y^6 - y^5 + y^3) \, dy = \left( \frac{y^7}{7} - \frac{y^6}{6} + \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^2 = \frac{244}{21} \approx 11.62. \end{aligned}$$

*Зауваження.* При проектуванні області на вісь  $Ox$  обираємо додатну вітку  $y = \sqrt{x}$  параболи, область проектується у відрізок  $[0, 4]$ , отже,

$$\begin{aligned} \iint_D (3x^2 - 2xy + y) \, dx dy &= \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 (3x^2 - 2xy + y) \, dy = \int_0^4 \left( 3x^2 y - xy^2 + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{\sqrt{x}}^2 dx = \\ &= \int_0^4 \left( 6x^2 - 4x + 2 - 3x^2 \sqrt{x} + x^2 - \frac{x}{2} \right) dx = \left( \frac{7x^3}{3} - \frac{9x^2}{4} + 2x - \frac{6x^3 \sqrt{x}}{7} \right) \Big|_0^4 = \frac{244}{21}. \end{aligned}$$

**Приклад 2.3.4.** Обчислити площу фігури, обмеженої лініями  $y^2 = x + 1$ ,  $x = y^2 - y^3$ ,  $y = -1$ .

*Розв'язання.* Фігура зображена на рис. 2.3.4 (обмежена параболою  $y^2 = x + 1$ , лінією  $x = y^2 - y^3$  та прямою  $y = -1$ ). Спроекуємо її на вісь  $Oy$ .

$$\text{Тоді } S = \iint_D dx dy = \int_{-1}^1 dy \int_{y^2-1}^{y^2-y^3} dx = \int_{-1}^1 (y^2 - y^3 - y^2 + 1) dy = \left( y - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_{-1}^1 = 2 \text{ (од}^2\text{)}.$$

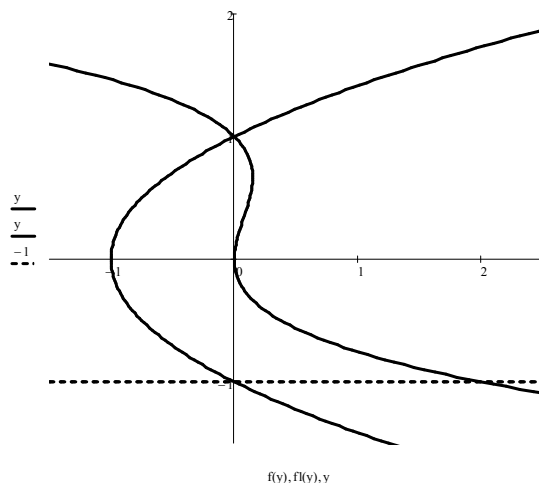


Рис. 2.3.4

**Приклад 2.3.5.** Обчислити криволінійні інтеграли.

а)  $\int_L \frac{y dl}{\sqrt{x}}$ , якщо  $L$  – дуга півкубічної параболи  $y^2 = \frac{4}{9}x^3$  між точками

$A(3; 2\sqrt{3})$  й  $B(8; \frac{32\sqrt{2}}{3})$ ;

б)  $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$ , де  $L$  – дуга кривої  $x = \cos t + t \sin t$ ,  $y = \sin t - t \cos t$   
( $0 \leq t \leq 2\pi$ );

в)  $\int_L (x + y) dl$ , де  $L$  – права пелюстка лемніскати  $\rho^2 = 4 \cos 2\varphi$ ;

г)  $\int_{OA} 2xy dx - x^2 dy$ , де  $OA$  – дуга параболи  $x = 2y^2$  від точки  $O(0; 0)$  до точки  $A(2; 1)$ ;

д)  $\int_L (6 - y) dx + x dy$ , де  $L$  – перша арка циклоїди  $x = 3(t - \sin t)$ ,  
 $y = 3(1 - \cos t)$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ).

*Розв'язання.*

а) Маємо криволінійний інтеграл першого роду (по довжині дуги). Будемо вважати, що крива  $L$  задана рівнянням вигляду  $y = y(x)$  у декартових

координатах. Тоді  $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$  (обираємо знак «+», оскільки точки  $A$  й  $B$

належать першій чверті),  $y' = \sqrt{x}$ , отже,  $dl = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + x} dx$ .

Переходячи до звичайного інтеграла, будемо мати

$$\int_L \frac{y dl}{\sqrt{x}} = \int_3^8 \frac{2\sqrt{x^3}}{3\sqrt{x}} \sqrt{1+x} dx = \frac{2}{3} \int_3^8 x \sqrt{1+x} dx = \left| \begin{array}{l} 1+x=t^2, \quad dx=2tdt, \\ x=t^2-1, \quad t \quad 2 \quad 3 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2}{3} \int_2^3 (t^2-1) \cdot t \cdot 2tdt = \frac{4}{3} \left( \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_2^3 = \frac{4}{3} \left( \frac{243}{5} - 9 - \frac{32}{5} + \frac{8}{3} \right) = \frac{2152}{45} \approx 47.82;$$

б) Маємо криволінійний інтеграл першого роду. Перш за все обчислимо

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\cos^2 t + 2t \cos t \sin t + t^2 \sin^2 t + \sin^2 t - 2t \cos t \sin t + t^2 \cos^2 t} = \sqrt{1+t^2}.$$

Оскільки крива  $L$  задана параметричними рівняннями, то

$$\dot{x}(t) = -\sin t + \sin t + t \cos t = t \cos t, \quad \dot{y}(t) = \cos t - \cos t + t \sin t = t \sin t,$$

$$dl = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \sqrt{t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t} = |t| = t \quad (t \geq 0).$$

Перейдемо до звичайного інтеграла:

$$\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl = \int_0^{2\pi} t \sqrt{1+t^2} dt = \frac{1}{3} (1+t^2)^{3/2} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{3} \left[ (1+4\pi^2)^{3/2} - 1 \right];$$

в) Маємо криволінійний інтеграл першого роду. У звичайній полярній системі

координат  $\rho = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$ , отже,  $\cos 2\varphi \geq 0$ ,  $-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Права

пелюстка лемніскати розташована в секторі  $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$  ( $k=0$ ) (рис. 2.3.5).

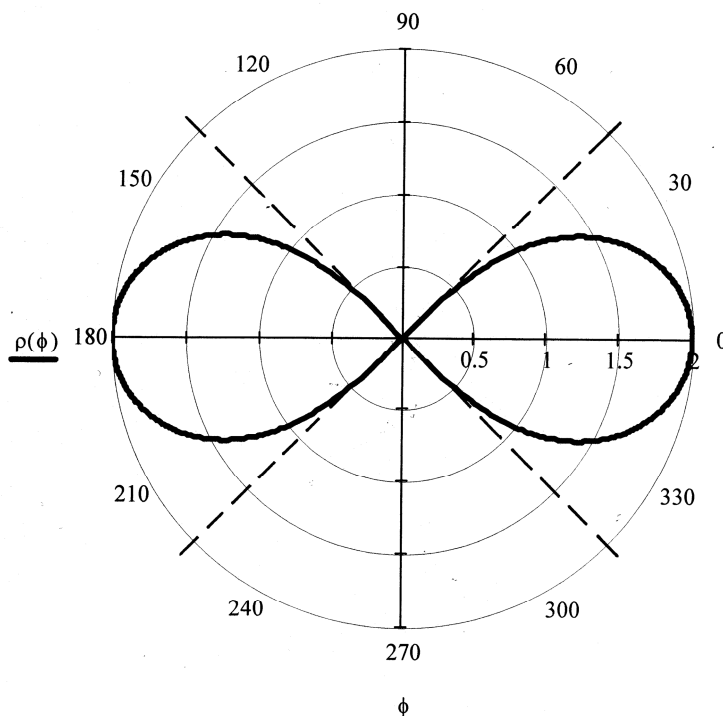


Рис. 2.3.5

Крива  $L$  задана рівнянням у полярних координатах, отже,  $x = \rho \cos \varphi$ ,  
 $y = \rho \sin \varphi$ , де  $\rho = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$ . Оскільки  $\rho' = -\frac{2 \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$ , то диференціал довжини

$$\text{дуги } dl = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi = \sqrt{4 \cos 2\varphi + 4 \frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}} d\varphi = \frac{2}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi. \quad \text{Перейдемо до}$$

звичайного інтеграла:

$$\int_L (x + y) dl = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2\sqrt{\cos 2\varphi} \cdot (\cos \varphi + \sin \varphi) \cdot \frac{2}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = 4(\sin \varphi - \cos \varphi) \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} =$$

$$= 4\sqrt{2};$$

г) Маємо криволінійний інтеграл другого роду (по координатах). Крива  $L$  задана рівнянням у декартових координатах, отже,  $dx = x'dy = 4ydy$ . Перейдемо до звичайного інтеграла:

$$\int_{OA} 2xydx - x^2 dy = \int_0^1 (2 \cdot 2y^2 y \cdot 4y - 4y^4) dy = 12 \cdot \frac{y^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{12}{5};$$

д) Маємо криволінійний інтеграл другого роду. Крива  $L$  задана параметричними рівняннями, отже,  $dx = \dot{x}(t)dt = 3(1 - \cos t)dt$ ,  
 $dy = \dot{y}(t)dt = 3 \sin t dt$ . Перейдемо до звичайного інтеграла:

$$\int_L (6 - y) dx + xdy = \int_0^{2\pi} \{ [6 - 3(1 - \cos t)] \cdot 3(1 - \cos t) + 3(t - \sin t) \cdot 3 \sin t \} dt =$$

$$= 9 \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 t + t \sin t - \sin^2 t) dt = 9 \int_0^{2\pi} t \sin t dt = \left| \begin{array}{l} u = t, \quad dv = \sin t dt, \\ du = dt, \quad v = -\cos t \end{array} \right| =$$

$$= 9 (-t \cos t + \sin t) \Big|_0^{2\pi} = -18\pi.$$

**Приклад 2.3.6.** Встановити збіжність або довести розбіжність рядів

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}};$     б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^2}};$     в)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n \ln^2 n}};$     г)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2};$

д)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2}.$

Розв'язання.

а) Оскільки  $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}} < \frac{1}{\sqrt{n \cdot n \cdot n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$ , а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$  збігається як ряд

Діріхле при  $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ , то за ознакою порівняння заданий ряд також збігається;

б) Для порівняння оберемо звичайний гармонічний ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , який, як відомо,

розбігається. Тоді за граничною ознакою порівняння із застосуванням правила Лопіталя будемо мати

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{3\sqrt[3]{n^2}}} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} = \infty.$$

Отже, на підставі цієї ознаки, заданий ряд *розбігається*;

в) Для порівняння оберемо ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ , який *збігається*, оскільки

$p = 2 > 1$ . Тоді за граничною ознакою порівняння із застосуванням правила

Лопіталя будемо мати  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n \ln^2 n}}}{\frac{1}{n \ln^2 n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$ . Оскільки

границя нескінченна, то ознака незастосовна. Це означає, що ряд для порівняння обраний невдало. Порівняння ж з гармонічним рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  показує, що даний ряд *розбігається* (виконайте самостійно);

г) Спроби порівняння даного ряду з розбіжним гармонічним рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  або

збіжним рядом Діріхле  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  виявляються невдалими (перевірте!). Тому для

порівняння оберемо (збіжний) ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta}}$ , де  $1 < \beta < 2$ . Візьмемо, наприклад,

$\beta = 3/2$ . Тоді за ознакою порівняння із застосуванням правила Лопіталя будемо мати



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln n}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Отже, за граничною ознакою порівняння заданий ряд збігається;

д) При дослідженні рядів дуже корисною може виявитися **таблиця еквівалентних нескінченно малих**:

якщо  $\alpha(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то

$$\begin{aligned} \sin \alpha(n) &\sim \alpha(n), \\ \arcsin \alpha(n) &\sim \alpha(n), \\ \operatorname{tg} \alpha(n) &\sim \alpha(n), \\ \operatorname{arctg} \alpha(n) &\sim \alpha(n), \\ \ln[1 + \alpha(n)] &\sim \alpha(n), \\ b^{\alpha(n)} - 1 &\sim \ln b \cdot \alpha(n), \\ e^{\alpha(n)} - 1 &\sim \alpha(n). \end{aligned}$$

Оскільки  $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то на підставі наведеної таблиці,  $\operatorname{arctg} \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$ .

Тоді  $\sqrt[3]{n^2} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2} \sim \sqrt[3]{n^2} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^{4/3}}$ . Це означає, що якщо за ряд для порівняння

обрати збіжний ряд Діріхле  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$  ( $\alpha = \frac{4}{3} > 1$ ), то за граничною ознакою

порівняння отримаємо  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^{4/3}}} = 1$ . Тоді за наслідком з цієї

ознаки заданий ряд збігається.

**Приклад 2.3.7.** Встановити збіжність або довести розбіжність рядів

а)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n+1)}$ ;    б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! 3^n}{n^n}$ ;    в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n^2+5}{n^2+6} \right)^{n^3}$ ;

г)  $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{\sqrt{3n+2}}{\sqrt{n+1}}$ ;    д)  $\frac{1}{2^3} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{4^3} + \dots$

Розв'язання.

а) Оскільки  $a_n = \frac{(2n+1)!!}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n+1)}$ , то

$$a_{n+1} = \frac{[2(n+1)+1]!!}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot [(3(n+1)+1)]} = \frac{(2n+3)!!}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n+4)} = \frac{(2n+1)!!(2n+3)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n+1) \cdot (3n+4)}$$

і тоді  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{3n+4} = \frac{2}{3} < 1$ . Отже, за ознакою Д'Аламбера заданий ряд

збігається;

б) Оскільки  $a_n = \frac{n!3^n}{n^n}$ , то  $a_{n+1} = \frac{(n+1)!3^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n!(n+1)3^n \cdot 3}{(n+1)^n(n+1)}$ . Отже,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} = \frac{3}{e} > 1. \text{ Таким чином, за ознакою}$$

Д'Аламбера заданий ряд розбігається;

в) Оскільки  $a_n = \left( \frac{n^2+5}{n^2+6} \right)^{n^3}$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2+5}{n^2+6} \right)^{n^2} \{1^\infty\} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} e^a, \text{ де } a = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \frac{n^2+5}{n^2+6} - 1 \right) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+6} = -1. \text{ Отже, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} =$$

$$= e^{-1} = \frac{1}{e} < 1 \text{ і за ознакою Коші заданий ряд збігається;}$$

г) Оскільки  $a_n = \operatorname{arctg}^n \frac{\sqrt{3n+2}}{\sqrt{n+1}}$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3n+2}}{\sqrt{n+1}} =$

$$= \operatorname{arctg} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3n+2}{n+1}} = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} > 1. \text{ Отже, за ознакою Коші заданий ряд}$$

розбігається;

д) Загальний член ряду, як неважко бачити,  $a_n = \frac{n}{(n+1)^3}$ . За ознакою

Д'Аламбера маємо  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{(n+2)^3}}{\frac{n}{(n+1)^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4}{n(n+2)^3} = 1$ , отже, на

підставі цієї ознаки ніякого висновку про збіжність ряду зробити не можна

(ознака незастосовна). До того ж самого результату приводить спроба застосування радикальної ознаки Коші.

Будемо розглядати члени ряду як значення функції  $f(x) = \frac{x}{(x+1)^3}$  при значеннях аргументу  $x = 1, 2, 3, \dots$ . Неважко перевірити, що при  $x \geq 1$  функція  $f(x)$  додатна, неперервна й монотонно спадна, тобто задовольняє умови інтегральної ознаки. Тому дослідимо на збіжність невластний інтеграл

$\int_1^{+\infty} \frac{x}{(x+1)^3} dx$ . В даному випадку за означенням маємо:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{x}{(x+1)^3} dx &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_1^B \frac{x}{(x+1)^3} dx = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_1^B \left[ \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3} \right] dx = \\ &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} \right] \Big|_1^B = \lim_{B \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{B+1} + \frac{1}{2(B+1)^2} \right] - \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right) = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Отже, інтеграл набуває скінченного значення, тобто збігається. Тому за інтегральною ознакою одночасно з ним збігається і заданий ряд.

**Приклад 2.3.8.** Встановити характер збіжності або довести розбіжність

рядів а)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (3n)}{(n+1)!} \operatorname{arctg} \frac{1}{2^n}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(\sqrt{n+1}-1)}$ ; в)  $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln \ln n}$ .

*Розв'язання.*

а) Дослідимо заданий знакопочеревний ряд на абсолютну збіжність, для чого розглянемо ряд з абсолютних величин членів заданого ряду

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (3n)}{(n+1)!} \operatorname{arctg} \frac{1}{2^n}$  (\*). За ознакою Д'Аламбера маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (3n) \cdot (3n+3)}{(n+2)!} \operatorname{arctg} \frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{3 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (3n)}{(n+1)!} \operatorname{arctg} \frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+3}{n+2} = \frac{3}{2} > 1$$

(тут враховано, що  $\operatorname{arctg} \frac{1}{2^n} \sim \frac{1}{2^n}$  при  $n \rightarrow \infty$ ). Отже, ряд (\*) розбігається за ознакою Д'Аламбера. Тому заданий ряд *не збігається абсолютно*. А оскільки

цей результат отриманий на підставі ознаки Д'Аламбера, то необхідна умова збіжності ряду  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  (а з нею і друга умова ознаки Лейбніца) не виконується. Це означає, що заданий ряд *розбігається*;

б) Дослідимо заданий знакопозначений ряд на абсолютну збіжність, для чого розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(\sqrt{n+1}-1)} \quad (*),$$

складений з абсолютних величин членів заданого ряду. Порівняємо цей ряд зі збіжним рядом Діріхле  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ ,

застосувавши граничну ознаку порівняння:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(\sqrt{n+1}-1)}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n}}{(n+1)(\sqrt{n+1}-1)} = 1.$$

Отже, за наслідком зі згаданої ознаки обидва ряди поведуться однаково, тобто ряд (\*) збігається. А це означає, що заданий ряд *збігається абсолютно*;

в) Дослідимо заданий знакопозначений ряд на абсолютну збіжність, для чого розглянемо ряд з абсолютних величин членів заданого ряду

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{\ln \ln n} \quad (*).$$

Оскільки  $\ln n < n$ , а  $\ln \ln n \ll n$ , то  $\frac{1}{\ln \ln n} \gg \frac{1}{n}$ . Тому за ознакою порівняння

ряд (\*) розбігається, отже, заданий ряд *не збігається абсолютно* (тут ми

врахували, що гармонічний ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  розбігається). Оскільки цей результат

отриманий не за ознакою Д'Аламбера або радикальною ознакою Коші, то ми повинні дослідити ряд також на умовну збіжність.

Перевіримо виконання умов ознаки Лейбніца:

$$1) \text{ нерівність } \frac{1}{\ln \ln(n+1)} < \frac{1}{\ln \ln n} \text{ виконується } \forall n \geq 4; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln \ln n} = 0.$$

Обидві умови виконуються, отже, за ознакою Лейбніца заданий ряд збігається. А оскільки він не збігається абсолютно, то він *збігається умовно*.

## ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

**Завдання 1.** Обчислити повторний інтеграл.

1.  $\int_0^2 dx \int_{\frac{x^2}{2}}^x (2x - y) dy .$
2.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_{\frac{y}{2}}^y (4x + y) dx .$
3.  $\int_1^2 dx \int_{\frac{2}{x}}^{2x} (2xy + x^2) dy .$
4.  $\int_0^1 dx \int_{-x}^{x^2} (2y - 3x) dy .$
5.  $\int_0^1 dy \int_{-2y}^y (xy^2 + y) dx .$
6.  $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y) dy .$
7.  $\int_0^1 dx \int_{\frac{x}{3}}^{2x} e^{3x+y} dy .$
8.  $\int_0^2 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{y^2} (x - y^2) dx .$
9.  $\int_0^{\pi} dx \int_{-x}^{2x} \sin(2y - x) dy .$
10.  $\int_0^2 dy \int_{-y}^{\frac{-y}{2}} (x + 3y) dx .$

**Завдання 2.** Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі.

1.  $\int_0^4 dx \int_{\frac{3x}{4}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy .$
2.  $\int_0^1 dx \int_{2x^2}^{3-x} f(x, y) dy .$
3.  $\int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} f(x, y) dy .$
4.  $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx .$
5.  $\int_0^2 dy \int_{\sqrt{4-y^2}}^{6-y} f(x, y) dx .$
6.  $\int_{-1}^0 dx \int_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy .$
7.  $\int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) dy .$
8.  $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy .$
9.  $\int_0^2 dx \int_{2x}^{6-x} f(x, y) dy .$

$$10. \int_0^1 dx \int_{-1}^{1+x^2} f(x, y) dy.$$

**Завдання 3.** Обчислити подвійний інтеграл.

$$1. \iint_D xy dx dy, D: y = x, y = 2, y = 0.$$

$$2. \iint_D (x - y) dx dy, D: y = x, x + y = 2, y = 0.$$

$$3. \iint_D (2x - y) dx dy, D: x = 1, x = 2, y = x, y = x^2.$$

$$4. \iint_D (3x + y) dx dy, D: y = 2x, x + y = 3, x = 0.$$

$$5. \iint_D x^2 y dx dy, D: y = x^2, x + y = 2.$$

$$6. \iint_D y dx dy, D: y = x, y = 5x, x = 1.$$

$$7. \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy, D: x = 2, y = x, xy = 1.$$

$$8. \iint_D (x - y) dx dy, D: y = 2 - x^2, y = 2x - 1.$$

$$9. \iint_D xy dx dy, D: y = x^2, y = 2x.$$

$$10. \iint_D xy dx dy, D: y = x, y = 0, x = 5.$$

**Завдання 4.** Обчислити за допомогою подвійного інтеграла площу фігури, обмеженої лініями.

1.  $y^2 = 4x, x + y = 3, y \geq 0$ .

2.  $x = \sqrt{4 - y^2}, y = \sqrt{3x}, x \geq 0$ .

3.  $y = 6x^2, x + y = 2, x \geq 0$ .

4.  $y = x^2 + 2, y = x, x = 2, x \geq 0$ .

5.  $y = 4x^2, 9y = x^2, y \leq 2$ .

6.  $y = \frac{8}{x^2 + 4}, x^2 = 4y$ .

7.  $x = y^2, x = \frac{3}{4}y^2 + 1$ .

8.  $y = x^2 + 1, x + y = 3$ .

9.  $y = x^2 + 4x, y = x + 4$ .

10.  $y = \sqrt{2 - x^2}, y = x^2$ .

**Завдання 5.** Обчислити криволінійні інтеграли.

1. а)  $\int_L \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$ , де  $L$  – відрізок прямої між точками  $O(0;0)$  й  $A(1;2)$ ;

б)  $\int_{AB} xdy - ydx$ , де  $AB$  – дуга параболи  $y = 4 - x^2$  між точками  $A(-2;0)$  й  $B(0;4)$ .

2. а)  $\int_L \frac{dl}{\sqrt{8 - x^2 - y^2}}$ , де  $L$  – відрізок прямої між точками  $O(0;0)$  й  $B(2;2)$ ;

б)  $\int_{AB} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$ , де  $AB$  – дуга параболи  $y = x^2$  між точками  $A(-1;1)$  й  $B(1;1)$ .

3. а)  $\int_L (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y})dl$ , де  $L$  – відрізок прямої між точками  $A(-1;0)$  й  $B(0;1)$ ;

б)  $\int_{OA} (x^2 + y^2)dx + 2xydy$ , де  $OA$  – дуга кубічної параболи  $y = x^3$  між точками  $O(0;0)$  й  $A(1;1)$ .

4. а)  $\int_L \frac{dl}{\sqrt{5(2x+y)}}$ , де  $L$  – відрізок прямої між точками  $A(0;4)$  й  $B(4;0)$ ;

б)  $\oint_{L^-} (x+2y)dx + (x-y)dy$ , де  $L^-$  – коло  $x = 2 \cos t$ ,  $y = 2 \sin t$ , що

проходиться за ходом годинникової стрілки.

5. а)  $\int_L \frac{ydl}{\sqrt{x^2+y^2}}$ , де  $L$  – дуга кардіоїди  $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$  ( $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ );

б)  $\int_{OBA} 2xydx - x^2dy$ , де  $OBA$  – ламана:  $O(0;0)$ ,  $A(2;1)$ ,  $B(2;0)$ .

6. а)  $\int_L ydl$ , де  $L$  – дуга астроїди  $x = \cos^3 t$ ,  $y = \sin^3 t$  між точками  $A(1;0)$  й  $B(0;1)$ ;

б)  $\int_{AB} (x^2 + y^2)dx + xydy$ , де  $L$  – відрізок прямої між точками  $A(1;1)$  й  $B(3;4)$ .

7. а)  $\int_L ydl$ , де  $L$  – дуга параболи  $y^2 = \frac{2}{3}x$  між точками  $O(0;0)$  й

$$B\left(\frac{35}{6}; \frac{\sqrt{35}}{3}\right);$$

б)  $\int_{AB} \cos ydx - \sin xdy$ , де  $AB$  – відрізок прямої між точками  $A(2\pi; -2\pi)$  й  $B(-2\pi; 2\pi)$ .

8. а)  $\oint_{OABCO} xydl$ , де  $OABCO$  – контур прямокутника з вершинами  $O(0;0)$ ,  $A(4;0)$ ,  $B(4;2)$ ,  $C(0;2)$ ;

б)  $\int_{AB} \frac{ydx + xdy}{x^2 + y^2}$ , де  $AB$  – відрізок прямої між точками  $A(1;2)$  й  $B(3;6)$ .



9. а)  $\oint_{ABOA} (x+y)dl$ , де  $ABOA$  – контур трикутника з вершинами  $A(1;0)$ ,  $B(0;1)$ ,  
 $O(0;0)$ ;

б)  $\int_{ABC} (x^2 + y^2)dx + (x + y^2)dy$ , де  $ABC$  – ламана:  $A(1;2)$ ,  $B(3;2)$ ,  $C(3;5)$ .

10. а)  $\int_L \sqrt{2y}dl$ , де  $L$  – перша арка циклоїди  $x = 2(t - \sin t)$ ,  $y = 2(1 - \cos t)$

$(0 \leq t \leq 2\pi)$ ;

б)  $\int_{AB} xydx + (y-x)dy$ , де  $AB$  – дуга кубічної параболи  $y = x^3$  між  
 точками  $A(0;0)$  й  $B(1;1)$ .

**Завдання 6.** Встановити збіжність або довести розбіжність рядів.

1. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n+2)!}{n^5}$ ;

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} 10^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ ;

в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n^2+1}\right)^2$ ;

г)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$ ;

д)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^4}$ .

2. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n - 1}{5^n (n+1)!}$ ;

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-1}{5n}\right)^{n^2}$ ;

в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)\ln(3n+2)}$ ;

г)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$ ;

д)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ .

3. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^n \left(\frac{1}{n}\right)^7$ ;

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2n+1}\right)^n$ ;

в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\ln^2(2n+1)}$ ;

г)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n+2}$ ;

д)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n^2+1}$ .

4. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{3^n}$ ;

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+2))^n}$ ;

в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{(4n+5)^3}}$ ;

$$\Gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 3n}};$$

$$\Delta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n}.$$

$$5. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^n}}{3^n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \arcsin \frac{1}{2^n} \right)^{3n};$$

$$\text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+4)\ln^3(3n+4)};$$

$$\Gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}};$$

$$\Delta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^{2n}}.$$

$$6. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \dots (n+3)}{5 \cdot 7 \cdot 9 \dots (2n+3)};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n^2 + 5n + 8}{3n^2 - 2} \right)^n;$$

$$\text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{(7n-5)^5}};$$

$$\Gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+2)};$$

$$\Delta) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^7 n}.$$

$$7. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{9}{10} \right)^n n^7;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \operatorname{arctg} \frac{1}{5^n} \right)^n;$$

$$\text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+7}{n^2+49} \right)^2;$$

$$\Gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+3}};$$

$$\Delta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}.$$

$$8. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 7 \cdot 13 \dots (6n-5)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n+1)};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2};$$

$$\text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\ln(3n-1)};$$

$$\Gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+2};$$

$$\Delta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3+n^2}.$$

$$9. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n^n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \operatorname{tg} \frac{\pi}{5^n} \right)^{3n};$$

$$\text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-2)\ln(5n-2)};$$

$$\Gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n(n+1)};$$

$$\Delta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-1)(6n+3)}.$$

$$10. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n(n+1)}{5^n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+1))^{2n}};$$

$$\text{B) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1};$$

$$\Gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3^n}; \quad \Delta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{7^{2n}}.$$

**Завдання 7.** Встановити характер збіжності або довести розбіжність рядів.

$$1. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)3^n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^3}.$$

$$2. \text{ a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)!}.$$

$$3. \text{ a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2+1}.$$

$$4. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{6n+5};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{(n+1)!}.$$

$$5. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n2^n}.$$

$$6. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n^4}.$$

$$7. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n-1}{3^n}.$$

$$8. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(2n+1)};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n^3}.$$

$$9. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \sqrt[3]{n+1}};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(\ln(n+1))^n}.$$

$$10. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+1}};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3+1}.$$

## КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 4

### МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ

Рекомендується (скориставшись одним або двома з наведених нижче джерел)

- вивчити теоретичні положення за [1], гл. XI, §§ 2-5, гл. XII, §§ 1, 3; [3], гл. XXI, §§ 8-19; [4], гл. 9, §§ 2-4; [6], гл. 3, §§ 2.4, 2.14, 2.18, 2.22-2.30, 3.1-3.11, 5.1-5.4, 6.1, 6.3; [7], гл. XVI, §§ 9-22, гл. XVII, §§ 1-6, 12-14; [8], гл. XIV, XV; [11], гл. 14, §§ 5, 7;
- розібрати розв'язання задач у [2], гл. III, §§ 3-9; [10], гл. 2, §§ 2, 3;
- самостійно розв'язати задачі: [2], №№ 368, 374, 377, 391, 392, 394, 416, 419, 423, 435, 489, 492, 497, 500, 505, 506; [12], №№ 2842 – 2844, 2856, 2859, 2860, 2864, 2867, 2868, 2879, 2883, 2889, 2898, 2903, 2915, 2927, 2932, 4383, 4385, 4387, 4388, 4391; [13], гл. 9, №№ 211, 214, 216, 229, 233, 250, 293, 294, 302, 303, 307, 314, 316, 332, 338, 343, 348, 351, 353, 357, 359, 382, 384, 391, 403, 438, 442, 450, 451; [14], №№ 1.3.7, 8, 10, 20, 34, 35, 1.4.10, 12, 18, 21-б, 23-б, 25, 29; [15], №№ 2470, 2475, 2478, 2484, 2488, 2496, 2498, 2501, 2502, 2506, 2507, 2514, 2521, 2522, 2523, 2552, 2560, 2563, 2570; [16], гл. 8, №№ 103, 108, 112, 114, 121, 124, 125, 132, 137, 143, 148, 153, 157, 163, 166.

**Приклад 2.4.1.** Знайти радіуси та інтервали збіжності степеневих рядів:

$$\begin{aligned} \text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n (x+2)^n}{(2n+1)(n+2)}; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{2n^3} (x-1)^n; \quad \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n)!}{(3n)!} x^n; \\ \text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+5)^n}{n^n}; \quad \text{д)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n} (x-1)^n; \quad \text{е)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n \frac{(2n)!(x+3)^{2n+3}}{(n!)^2}. \end{aligned}$$

*Розв'язання.*

а) Оскільки  $|a_n| = \left| \frac{(-1)^n 3^n}{(2n+1)(n+2)} \right| = \frac{3^n}{(2n+1)(n+2)}$ , то за формулою

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad \text{маємо} \quad \frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} (2n+1)(n+2)}{(2n+3)(n+3)3^n} = 3, \quad \text{звідки} \quad R = \frac{1}{3}. \quad \text{Отже,}$$

інтервал збіжності даного ряду є  $|x+2| < \frac{1}{3}$  або  $-\frac{1}{3} < x+2 < \frac{1}{3}$ , тобто  $-\frac{7}{3} < x < -\frac{5}{3}$ ;

б) Оскільки  $|a_n| = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{2n^3} = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{2n^3}$ , то за формулою  $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

маємо  $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{2n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{2n^2} = e^2$ , звідки  $R = \frac{1}{e^2}$ . Отже,

інтервал збіжності даного ряду є  $|x-1| < \frac{1}{e^2}$  або  $1 - \frac{1}{e^2} < x < 1 + \frac{1}{e^2}$ ;

в) Оскільки  $|a_n| = \frac{n!(2n)!}{(3n)!}$ , то з формули  $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n!(2n)!}{(3n)!}}{\frac{(n+1)![2(n+1)]!}{[3(n+1)]!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{(n+1)(2n+1)(2n+2)} = \frac{27}{4}.$$

Отже, інтервал збіжності даного ряду є  $|x| < \frac{27}{4}$ ;

г) Оскільки  $|a_n| = \frac{1}{n^n}$ , то з формули  $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  маємо

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty. \text{ Це означає, що ряд абсолютно збігається на усій}$$

числовій осі;

д) З формули  $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$  маємо  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n!}{3^n}}{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)} = 0$ . Це

означає, що ряд збігається в єдиній точці  $x=1$  (інтервал збіжності вироджується в точку);

е) Тут показник степеня є лінійною функцією  $\varphi(n) = 2n+3$ . Радіус збіжності

визначимо з формули  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|}$  для  $\varphi(n) = kn+m$ , де  $(k \geq 2) \in \mathbb{N}$ ,

а  $m$  – ціле невід'ємне число (може дорівнювати  $0$ ), поклавши  $k = 2$ :

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\left(\frac{n+2}{n}\right)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2}}{\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+1} \frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{(n+2)(n+1)}{n(n+3)} \right]^n \frac{(n+1)^3}{(n+3)(2n+1)(2n+2)}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot \sqrt{e} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Отже, ряд збігається в інтервалі  $|x+3| < \frac{1}{2}$  або  $-\frac{7}{2} < x < -\frac{5}{2}$ .

*Зауваження.* Можна було б обчислити одразу інтервал збіжності безпосередньо за ознакою Д'Аламбера, тобто скориставшись нерівністю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{\varphi(n+1)}}{a_n x^{\varphi(n)}} \right| < 1:$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{\varphi(n+1)}}{a_n x^{\varphi(n)}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+1} \frac{(2n+2)!(x+3)^{2n+5}}{[(n+1)!]^2}}{\left(\frac{n+2}{n}\right)^n \frac{(2n)!(x+3)^{2n+3}}{(n!)^2}} \right| =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{(n+3)(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^3} |x+3|^2 = e \cdot \frac{1}{e} \cdot 4 \cdot |x+3|^2 < 1.$$

Отже, отримали той самий інтервал збіжності  $|x+3| < \frac{1}{2}$ .

**Приклад 2.4.2.** Знайти область збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+2} \sqrt{n \ln n}}.$$

*Розв'язання.* З формули  $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$  маємо

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3^{n+2} \sqrt{n \ln n}}}{\frac{1}{3^{n+3} \sqrt{n+1 \ln(n+1)}}} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 3$$

(тут ми використали правило Лопіталя). Отже, ряд збігається в інтервалі  $|x| < 3$ .

Дослідимо поведінку ряду в межових точках  $x = \pm 3$  цього інтервалу.

В точці  $x = -3$  маємо знакопозначений числовий ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{3^{n+2} \sqrt{n \ln n}} = \frac{1}{9} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n \ln n}}. \text{ Дослідимо його на абсолютну збіжність, для}$$

чого розглянемо знакододатний ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n \ln n}} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n \ln n}}$ . Порівняємо цей

ряд із розбіжним гармонічним рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ . За “граничною” ознакою

порівняння  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n \ln n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{2\sqrt{n}}{1}} = \infty$  (тут ми знов використали

правило Лопіталя). Оскільки границя існує і нескінченна, то за згадану

ознакою в точці  $x = -3$  ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n \ln n}}$  розбігається, отже, знакопозначений

ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n \ln n}}$  не збігається абсолютно. В той же час цей ряд збігається за

ознакою Лейбніца, оскільки, як неважко перевірити, обидві умови ознаки

виконуються. Тому ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n \ln n}}$ , а разом з ним і заданий степеневий ряд

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+2} \sqrt{n \ln n}}$ , збігаються умовно.

В точці  $x = 3$  маємо знакододатний ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{3^{n+2} \sqrt{n \ln n}} = \frac{1}{9} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n \ln n}}$ ,

який, як вже з'ясовано, розбігається. Отже, в точці  $x = 3$  заданий степеневий ряд розбігається.

Таким чином, областю збіжності заданого степеневому ряду є півінтервал  $[-3, 3)$ , всередині якого ряд збігається абсолютно, на лівому кінці – умовно.

**Приклад 2.4.3.** Розвинути функцію в ряд Маклорена та вказати область, в якій це розвинення справедливе.

а)  $f(z) = x^4 \sin(3x^2)$ ;    б)  $f(x) = \frac{1}{1+x^5}$ ;    в)  $f(x) = \frac{2x-5}{x^2-5x+6}$ ;

г)  $f(x) = \frac{1}{(1-x^3)^2}$ ;    д)  $f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ .

*Розв'язання.*

а) Безпосереднє розвинення приведе до громіздких обчислень. Тому скористаємось відомим розвиненням в ряд Маклорена функції  $\sin x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (-\infty < x < +\infty),$$

в якому замінимо  $x$  на  $3x^2$ , і отриманий ряд почленно помножимо на  $x^4$ :

$$\sin(3x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(3x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1} x^{4n+2}}{(2n+1)!},$$

$$f(z) = x^4 \sin(3x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1} x^{4n+6}}{(2n+1)!} = 3x^6 - \frac{9}{2}x^{10} + \frac{81}{40}x^{14} - \dots$$

Отримане розвинення справедливе на усій числовій осі  $(-\infty < x < +\infty)$ ;

б) Замінимо у відомому розвиненні

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1),$$

$x$  на  $x^5$ . Маємо

$$\frac{1}{1+x^5} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x^5)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{5n} = 1 - x^5 + x^{10} - x^{15} + \dots + (-1)^n x^{5n} + \dots$$

Цей ряд подає задану функцію для усіх  $x$  таких, що  $|x^5| < 1$ , тобто  $-1 < x < 1$ ;

в) В деяких випадках розвинення функції в степеневий ряд можна отримати, просумувавши табличні розвинення або раніше знайдені. При цьому іноді треба тотожно перетворити функцію таким чином, щоб подати її у вигляді зручної комбінації функцій, розвинення яких відомі.



Задана функція є правильним раціональним дробом. У відповідності із розкладанням знаменника на множники  $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$  подамо її у вигляді суми найпростіших дробів:

$$\frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 6} = \frac{2x - 5}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3}, \quad \text{звідки} \quad 2x - 5 = A(x - 3) + B(x - 2).$$

Невідомі коефіцієнти  $A$  і  $B$  знайдемо з системи рівнянь

$$\begin{array}{l} x = 2 \mid -1 = -A, \\ x = 3 \mid 1 = B. \end{array}$$

Отже,  $A = B = 1$  й  $f(x) = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{x - 2} + \frac{1}{x - 3}$ . Кожен з отриманих найпростіших дробів після нескладного тотожного перетворення розвинемо в ряд Маклорена за допомогою відомого розвинення

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1 < x < 1).$$

Будемо мати

$$\frac{1}{x - 2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \quad \left(\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \Rightarrow |x| < 2\right),$$

$$\frac{1}{x - 3} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{x}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n \quad \left(\left|\frac{x}{3}\right| < 1 \Rightarrow |x| < 3\right).$$

Отже,

$$\frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 6} = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right) x^n = -\frac{5}{6} - \frac{13}{36}x - \frac{35}{216}x^2 - \dots$$

За відповідною властивістю степеневих рядів отримане розвинення справедливе в інтервалі  $(-2, 2)$ , який є спільним інтервалом збіжності обох рядів;

г) При розвиненні деяких функцій в степеневі ряди дуже корисним виявляється спосіб, що заснований на використанні такої властивості степеневих рядів, як можливість їх почленного диференціювання. Суть цього способу полягає в наступному. Нехай треба знайти розвинення деякої функції  $f(x)$  в степеневий ряд. Якщо вдається знайти таку функцію  $g(x)$ , що  $f(x) = a \cdot x^k \cdot g'(x)$ , де  $k \in \mathbb{Z}$ , то, розвинувши функцію  $g(x)$  в степеневий ряд і продиференціювавши його почленно, отримаємо розвинення в ряд функції  $f(x)$ . При цьому

отримане розвинення справедливе всюди, де відповідне розвинення було вірним для функції  $g(x)$ .

Оскільки в даному випадку  $\frac{1}{(1-x^3)^2} = \frac{1}{3x^2} \left( \frac{1}{1-x^3} \right)'$ , то, замінивши у табличному розвиненні

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1 < x < 1)$$

$x$  на  $x^3$ , отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x^3)^2} &= \frac{1}{3x^2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} (x^3)^n \right)' = \frac{1}{3x^2} \sum_{n=1}^{\infty} 3n x^{3n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{3n-3} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^{3n} = \\ &= 1 + 2x^3 + 3x^6 + \dots \end{aligned}$$

Оскільки при диференціюванні інтервал збіжності степеневого ряду не змінюється, то знайдене розвинення справедливе при усіх  $x$  з інтервалу  $-1 < x < 1$ ;

д) В деяких випадках значно простіше розвинути в степеневий ряд не саму функцію  $f(x)$ , а її похідну  $f'(x)$ , після чого почленно проінтегрувати отриманий ряд.

Знайдемо похідну  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x \cdot 2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$ .

У табличному розвиненні

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1)$$

замінімо  $x$  на  $x^2$  і отримаємо розвинення  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ , вірне

при  $-1 < x < 1$ . Проінтегрувавши цей ряд почленно від  $0$  до  $x$ , будемо мати

шукане розвинення  $f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ . Оскільки при

почленному інтегруванні ряду інтервал його збіжності не змінюється, то знайдене розвинення справедливе при усіх  $x$  з інтервалу  $-1 < x < 1$ .

**Приклад 2.4.4.** Розвинути в ряд Тейлора в околі точки  $x_0 = 4$  (за степенями різниці  $x - 4$ ) функцію  $f(x) = \ln(x^2 + 4x - 5)$  та вказати область, в якій це розвинення справедливе.

*Розв'язання.* Перетворимо тотожно задану функцію, виділяючи різницю  $x - 4$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x^2 + 4x - 5) = \ln[(x - 1)(x + 5)] = \ln\{[3 + (x - 4)][9 + (x - 4)]\} = \\ &= \ln\left[27\left(1 + \frac{x - 4}{3}\right)\left(1 + \frac{x - 4}{9}\right)\right] = \ln 27 + \ln\left(1 + \frac{x - 4}{3}\right) + \ln\left(1 + \frac{x - 4}{9}\right). \end{aligned}$$

Скористаємось табличним розвиненням

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (-1 < x \leq 1),$$

в якому замінимо  $x$  на  $\frac{x - 4}{3}$  й на  $\frac{x - 4}{9}$ . Отримаємо

$$\ln\left(1 + \frac{x - 4}{3}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x - 4)^n}{n 3^n} \quad \left(\left|\frac{x - 4}{3}\right| < 1 \Rightarrow |x - 4| < 3\right),$$

$$\ln\left(1 + \frac{x - 4}{9}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x - 4)^n}{n 9^n} \quad \left(\left|\frac{x - 4}{9}\right| < 1 \Rightarrow |x - 4| < 9\right).$$

Отже,

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x^2 + 4x - 5) = \ln 27 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 + 3^n}{n 9^n} (x - 4)^n = \\ &= \ln 27 + \frac{4}{9}(x - 4) - \frac{5}{9^2}(x - 4)^2 + \frac{28}{3 \cdot 9^3}(x - 4)^3 - \dots \end{aligned}$$

Отримане розвинення справедливе в інтервалі  $|x - 4| < 3$ , який є спільним інтервалом збіжності рядів  $\ln\left(1 + \frac{x - 4}{3}\right)$  та  $\ln\left(1 + \frac{x - 4}{9}\right)$ .

**Приклад 2.4.5.** Розвинути в ряд Маклорена функцію  $f(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t} dt$ .

*Розв'язання.* При наближеному обчисленні визначених інтегралів, коли знайти первісну в скінченному вигляді не представляється можливим, широко

застосовується почленне інтегрування степеневого ряду. При цьому підінтегральну функцію розвивають в ряд, який потім інтегрують почленно.

Скориставшись табличним розвиненням

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 \leq x \leq 1),$$

будемо мати

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t} dt = \int_0^x \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \int_0^x t^{2n} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}. \end{aligned}$$

Оскільки  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$ , то розвинення справедливе в інтервалі  $-1 < x < 1$ .

**Приклад 2.4.6.** Обчислити  $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^3} dx$  з точністю  $\delta = 10^{-4}$ .

*Розв'язання.* Прийmemo залишкову похибку  $\varepsilon = \frac{\delta}{4} = \frac{1}{4} \cdot 10^{-4} = 2.5 \cdot 10^{-5}$  і

розвинемо підінтегральну функцію в ряд Маклорена, для чого у табличному розвиненні

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

замінімо  $x$  на  $-x^3$ :

$$e^{-x^3} = 1 - x^3 + \frac{x^6}{2!} - \frac{x^9}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{3n}}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n}}{n!}.$$

Отриманий ряд збігається на всій числовій осі, отже, його можна почленно інтегрувати на будь-якому відрізку, зокрема, на відрізку  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ . Після інтегрування і застосування формули Ньютона-Лейбніца приходимо до знакопозначеного числового ряду, який збігається, тобто є рядом Лейбніца:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^3} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{3n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(3n+1)} x^{3n+1} \Big|_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(3n+1)8^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 8} + \frac{1}{2! \cdot 14 \cdot 8^2} - \frac{1}{3! \cdot 20 \cdot 8^3} + \dots$$

Для забезпечення необхідної точності обчислення суми цього ряду, яка і є значенням заданого визначеного інтеграла, потрібно утримати таке число членів ряду, щоб виконалася умова  $|u_{n+1}| \leq \varepsilon$ , де  $u_{n+1}$  – перший з відкинутих членів, а  $\varepsilon$  – задана залишкова похибка.

Оскільки  $u_0 = 0.5$ ,  $u_1 = -0.015625$ ,  $u_2 = 0.0005580$ ,  $u_3 = -0.0000163$ , ... й  $|u_3| < \varepsilon = 0.000025$ , то треба утримати 3 перших члени ряду:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^3} dx \approx 0.5 - 0.015625 + 0.0005580 = 0.4849330 \approx 0.4849.$$

Значення цього інтеграла, обчислене на комп'ютері за допомогою **Mathcad**, дорівнює **0.48491714311364 ...**, тобто в отриманому результаті всі знаки вірні.

**Приклад 2.4.7.** Знайти чотири перших, відмінних від нуля, члени розвинення в степеневий ряд розв'язку рівняння  $y'' = x \sin y'$ , який задовольняє початкові умови  $y(1) = 0$ ,  $y'(1) = \frac{\pi}{2}$ .

*Розв'язання.* Будемо шукати частинний розв'язок рівняння у вигляді ряду Тейлора

$$\tilde{y} = y(1) + y'(1)(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \dots$$

За умовою задачі,  $y(1) = 0$ ,  $y'(1) = \frac{\pi}{2}$ . З рівняння  $y'' = x \sin y'$  знаходимо, що

$y''(1) = 1 \cdot \sin y'(1) = 1 \cdot 1 = 1$ . Диференціюючи вихідне рівняння, маємо

$$y''' = \sin y' + x y'' \cos y',$$

звідки отримуємо  $y'''(1) = \sin y'(1) + 1 \cdot y''(1) \cdot \cos y'(1) = 1 + 1 \cdot 1 \cdot 0 = 1$ .

Диференціюючи рівність  $y''' = \sin y' + x y'' \cos y'$ , маємо

$$y^{(4)} = y'' \cos y' + y'' \cos y' + x y''' \cos y' - x y'' y''' \sin y',$$

звідки отримуємо  $y^{(4)}(1) = 2 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -1$ .

Отже, шуканий частинний розв'язок має вигляд

$$\tilde{y} = \frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{1}{3!}(x-1)^3 - \frac{1}{4!}(x-1)^4 + \dots$$

**Приклад 2.4.8.** Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію

$$f(x) = \begin{cases} x/3, & -3 \leq x \leq 0, \\ 3-x, & 0 < x \leq 3 \end{cases}, \text{ задану на проміжку, довжина якого дорівнює}$$

періоду.

*Розв'язання.* Графік функції наведений на рис. 2.4.1. Судячи з умови, період функції  $T = 2l = 6$ , тобто напівперіод  $l = 3$ . Функція  $f(x)$  не є ані парною, ані непарною, і на проміжку  $[-3, 3]$ , де вона задана, неперервна, за винятком однієї точки розриву першого роду  $x = 0$ . Отже,  $f(x)$  задовольняє умови теореми Діріхле. Тому відповідний ряд Фур'є

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

де  $a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx$ ,  $a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$ ,  $b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$ ,

збігається в кожній точці  $x \in (-l, l)$ , причому сума ряду  $S(x) = f(x)$  у точках

неперервності функції  $f(x)$ ,  $S(x) = \frac{1}{2} \left[ \lim_{t \rightarrow x+0} f(t) + \lim_{t \rightarrow x-0} f(t) \right]$  у точках розриву,

$S(\pm l) = \frac{1}{2} \left[ \lim_{t \rightarrow -l+0} f(t) + \lim_{t \rightarrow l-0} f(t) \right]$  на кінцях інтервалу  $(-l, l)$ .

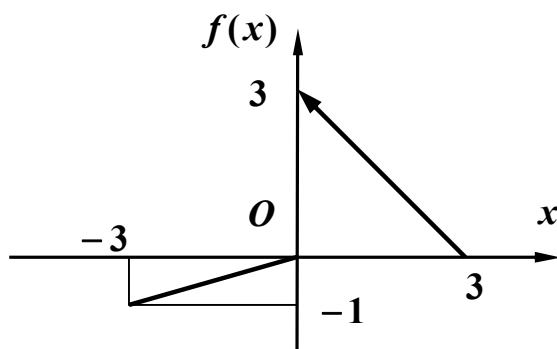


Рис. 2.4.1

Обчислимо коефіцієнти ряду:

$$a_0 = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) dx = \frac{1}{3} \left[ \int_{-3}^0 \frac{x}{3} dx + \int_0^3 (3-x) dx \right] = 1,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \cos \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{1}{3} \left[ \int_{-3}^0 \frac{x}{3} \cos \frac{n\pi x}{3} dx + \int_0^3 (3-x) \cos \frac{n\pi x}{3} dx \right] = \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{3} \left( \frac{3x}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{3} + \frac{9}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{3} \right) \Big|_{-3}^0 + \left[ \frac{3}{n\pi} (3-x) \sin \frac{n\pi x}{3} - \frac{9}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{3} \right] \Big|_0^3 \right\} = \\ &= \frac{4}{n^2 \pi^2} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \frac{8}{(2k-1)^2 \pi^2}, & n = 2k-1, \quad (k = 1, 2, \dots), \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \sin \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{1}{3} \left[ \int_{-3}^0 \frac{x}{3} \sin \frac{n\pi x}{3} dx + \int_0^3 (3-x) \sin \frac{n\pi x}{3} dx \right] = \\ &= \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{3} \left( -\frac{3x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{3} + \frac{9}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi x}{3} \right) \Big|_{-3}^0 + \left( -\frac{3}{n\pi} (3-x) \cos \frac{n\pi x}{3} - \frac{9}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi x}{3} \right) \Big|_0^3 \right] = \\ &= \frac{1}{n\pi} [3 - (-1)^n] = \begin{cases} \frac{1}{k\pi}, & n = 2k, \\ \frac{4}{(2k-1)\pi}, & n = 2k-1, \quad (k = 1, 2, \dots). \end{cases} \end{aligned}$$

Отже, враховуючи тільки ненульові члени ряду, одержуємо, що задана функція в точках її неперервності подається у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{(2k-1)^2 \pi^2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{3} + \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{3} + \frac{1}{k\pi} \sin \frac{2k\pi x}{3}.$$

В точці розриву  $x = 0$  значення суми ряду

$$S(0) = \frac{1}{2} \left[ \lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) \right] = \frac{1}{2} [0 + 3] = \frac{3}{2},$$

а в межових точках  $x = \pm 3$  воно є

$$S(\pm 3) = \frac{1}{2} \left[ \lim_{x \rightarrow -3+0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) \right] = \frac{1}{2} [-1 + 0] = -\frac{1}{2}.$$

**Приклад 2.4.9.** Подати у вигляді інтеграла Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

*Розв'язання.* Кусково-гладка і абсолютно інтегровна на  $(-\infty, +\infty)$  функція  $f(x)$  може бути подана у вигляді інтеграла Фур'є

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x] d\alpha,$$

де  $A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha t dt$ ,  $B(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \alpha t dt$ .

Ескіз графіка заданої функції наведений на рис. 2.4.2. Функція ані парна, ані непарна (загального типу).

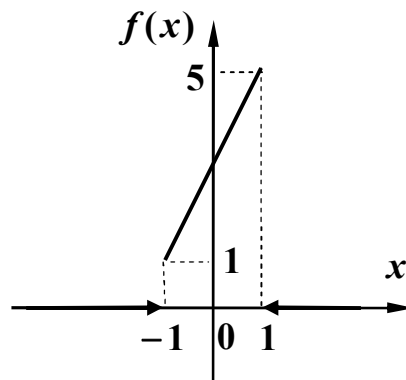


Рис. 2.4.2

Переконаємось, що  $f(x)$  абсолютно інтегровна на  $(-\infty, +\infty)$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \int_{-\infty}^{-1} 0 \cdot dx + \int_{-1}^1 (2x + 3) dx + \int_1^{+\infty} 0 \cdot dx = 0 + (x^2 + 3x) \Big|_{-1}^1 + 0 = 6 < \infty.$$

Задана функція кусково-гладка на  $(-\infty, +\infty)$ . Це впливає з того, що

$$f'(x) = \begin{cases} 2, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

скінченна на кожному з проміжків. Отже, задану функцію

справді можна зобразити інтегралом Фур'є. Знайдемо  $A(\alpha)$  та  $B(\alpha)$ .

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (2t + 3) \cos \alpha t dt = \left| \begin{array}{l} u = 2t + 3, \quad dv = \cos \alpha t dt, \\ du = 2 dt, \quad v = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha t \end{array} \right| =$$



$$= \frac{1}{\pi} \left( \frac{2t+3}{\alpha} \sin at \Big|_{-1}^1 - \frac{2}{\alpha} \int_{-1}^1 \sin at dt \right) = \frac{1}{\pi} \left( 6 \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^2} \cos at \Big|_{-1}^1 \right) = 6 \frac{\sin \alpha}{\pi \alpha},$$

$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin at dt = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (2t+3) \sin at dt = \left. \begin{array}{l} u = 2t+3, \quad dv = \sin at dt, \\ du = 2dt, \quad v = -\frac{1}{\alpha} \cos at \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left( -\frac{2t+3}{\alpha} \cos at \Big|_{-1}^1 + \frac{2}{\alpha} \int_{-1}^1 \cos at dt \right) = \frac{1}{\pi} \left( -\frac{4}{\alpha} \cos \alpha + \frac{2}{\alpha^2} \sin at \Big|_{-1}^1 \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left( \frac{4}{\alpha^2} \sin \alpha - \frac{4}{\alpha} \cos \alpha \right) = \frac{4}{\pi \alpha} \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} - \cos \alpha \right).$$

Отже, інтеграл Фур'є заданої функції має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ 6 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cos \alpha x + \frac{4}{\alpha} \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} - \cos \alpha \right) \sin \alpha x \right] d\alpha.$$

У точках розриву  $x^* = \pm 1$  інтеграл Фур'є дорівнює

$$\frac{1}{2} [f(x^* - 0) + f(x^* + 0)].$$

**Приклад 2.4.10.** Подати у вигляді інтеграла Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & -2 \leq x < 0, \\ e^{-x}, & 0 < x \leq 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

*Розв'язання.* Ескіз графіка заданої функції наведений на рис. 2.4.3.

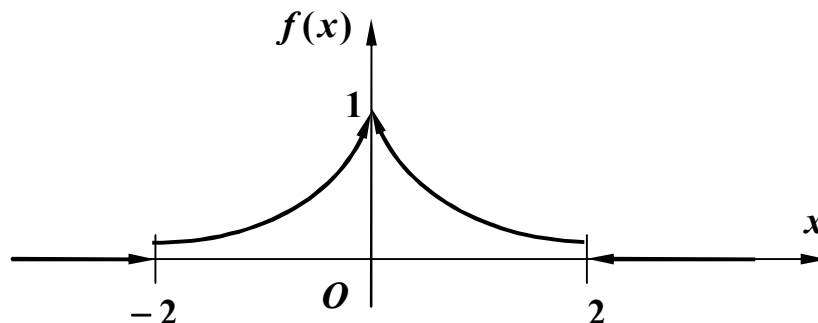


Рис. 2.4.3

Задана функція кусково-гладка і абсолютно інтегровна на  $(-\infty, +\infty)$ , оскільки

похідна  $f'(x) = \begin{cases} e^x, & -2 \leq x < 0, \\ -e^{-x}, & 0 < x \leq 2, \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$  скінченна на кожному з проміжків і

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \int_{-\infty}^{-2} 0 \cdot dx + \int_{-2}^0 e^x dx + \int_0^2 e^{-x} dx + \int_2^{+\infty} 0 \cdot dx = 0 + e^x \Big|_{-2}^0 - e^{-x} \Big|_0^2 + 0 =$$

$$= 2 \left( 1 - \frac{1}{e^2} \right) < \infty.$$

Задана функція *парна*, отже, її можна подати інтегралом Фур'є у вигляді

$$f(x) = \int_0^{+\infty} A(\alpha) \cos \alpha x d\alpha,$$

де  $A(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \cos \alpha t dt$ . Отже,

$$A(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \cos \alpha t dt = \frac{2}{\pi} \int_0^2 e^{-t} \cos \alpha t dt = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{e^{-t}}{1 + \alpha^2} (-\cos \alpha t + \alpha \sin \alpha t) \right] \Big|_0^2 =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + \alpha^2} \left( \frac{-\cos 2\alpha + \alpha \sin 2\alpha}{e^2} + 1 \right).$$

*Зауваження.* Інтеграл  $\int e^{-t} \cos \alpha t dt$  відноситься до так званих “циклічних” інтегралів, що беруться по частинах. Тут ми використали формулу первісної

$$\int e^{ax} \cos bxdx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx).$$

Таким чином, інтеграл Фур'є має вигляд

$$f(x) = \frac{2}{\pi e^2} \int_0^{+\infty} \frac{\alpha \sin 2\alpha - \cos 2\alpha + e^2}{1 + \alpha^2} \cos \alpha x d\alpha.$$

**Приклад 2.4.11.** Подати у вигляді інтеграла Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & -2 \leq x < 0, \\ -e^{-x}, & 0 < x \leq 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

*Розв'язання.* Ескіз графіка заданої функції наведений на рис. 2.4.4.

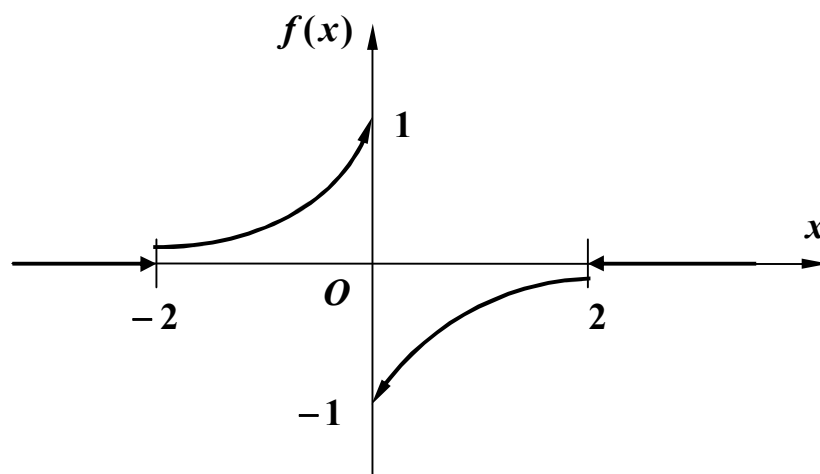


Рис. 2.4.4

Задана функція кусково-гладка і абсолютно інтегровна на  $(-\infty, +\infty)$ , оскільки

$$\text{похідна } f'(x) = \begin{cases} e^x, & -2 \leq x < 0, \\ e^{-x}, & 0 < x \leq 2, \\ 0, & |x| > 2 \end{cases} \text{ скінченна на кожному з проміжків і}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx &= \int_{-\infty}^{-2} 0 \cdot dx + \int_{-2}^0 e^x dx + \int_0^2 e^{-x} dx + \int_2^{+\infty} 0 \cdot dx = 0 + e^x \Big|_{-2}^0 - e^{-x} \Big|_0^2 + 0 = \\ &= 2 \left( 1 - \frac{1}{e^2} \right) < \infty. \end{aligned}$$

Задана функція *непарна*, отже, її можна подати інтегралом Фур'є у вигляді

$$f(x) = \int_0^{+\infty} B(\alpha) \sin \alpha x d\alpha,$$

де  $B(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \sin \alpha t dt$ . Отже,

$$\begin{aligned} B(\alpha) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \sin \alpha t dt = -\frac{2}{\pi} \int_0^2 e^{-t} \sin \alpha t dt = -\frac{2}{\pi} \left[ \frac{e^{-t}}{1+\alpha^2} (-\sin \alpha t - \alpha \cos \alpha t) \right] \Big|_0^2 = \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+\alpha^2} \left( \frac{\sin 2\alpha + \alpha \cos 2\alpha}{e^2} - \alpha \right). \end{aligned}$$

*Зауваження.* Використана формула первісної “циклічного” інтеграла

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx).$$

Таким чином, інтеграл Фур'є має вигляд

$$f(x) = \frac{2}{\pi e^2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2\alpha + \alpha \cos 2\alpha - \alpha e^2}{1 + \alpha^2} \sin \alpha x \, d\alpha.$$

*Зауваження.* Якщо функція  $f(x)$  задана лише на півосі  $(0, +\infty)$ , то її можна продовжити на всю вісь  $(-\infty, +\infty)$  парним або непарним способом за наведеними вище формулами.

**Приклад 2.4.12.** Знайти перетворення Фур'є функції  $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ .

*Розв'язання.* Якщо функція  $f(x)$  така, що подається інтегралом Фур'є, то в кожній точці, де  $f(x)$  диференційовна, існує функція

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} \, dx,$$

яка називається *перетворенням Фур'є функції  $f(x)$* .

Задана функція кусково-гладка на  $(-\infty, +\infty)$ , оскільки  $f'(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

скінченна на кожному скінченному відрізку  $[-l, l]$  числової осі. Переконаємось далі, що  $f(x)$  абсолютно інтегровна на  $(-\infty, +\infty)$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, dx = \int_{-1}^1 |x| \, dx = \int_{-1}^0 (-x) \, dx + \int_0^1 x \, dx = -\frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 1 < \infty.$$

Отже, перетворення Фур'є існує і за наведеною формулою

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( - \int_{-1}^0 x e^{-i\alpha x} \, dx + \int_0^1 x e^{-i\alpha x} \, dx \right).$$

Інтегруючи частинами, одержимо

$$- \int_{-1}^0 x e^{-i\alpha x} \, dx = e^{-i\alpha x} \left( \frac{x}{i\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \Big|_{-1}^0 = -\frac{1}{\alpha^2} + e^{-i\alpha} \left( \frac{1}{i\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right),$$

$$\int_0^1 x e^{-i\alpha x} dx = -e^{-i\alpha x} \left( \frac{x}{i\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \Big|_0^1 = -e^{-i\alpha} \left( \frac{1}{i\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right) - \frac{1}{\alpha^2}.$$

Підсумовуючи значення обох інтегралів, отримуємо  $F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{e^{-i\alpha} - 1}{\alpha^2}$ .

**Приклад 2.4.13.** Знайти косинус- та синус-перетворення Фур'є функції

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & x > \pi \end{cases}.$$

*Розв'язання.* Якщо функція  $f(x)$  кусково-гладка і абсолютно інтегровна на півосі  $(0, +\infty)$ , то існують функції

$$F_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos \alpha x dx \quad \text{та} \quad F_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin \alpha x dx,$$

які називаються відповідно *косинус-перетворенням* та *синус-перетворенням* Фур'є функції  $f(x)$ .

Задана функція задовольняє вказані умови. Отже,

$$\begin{aligned} F_c(\alpha) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \sin x \cos \alpha x dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} [\sin(1-\alpha)x + \sin(1+\alpha)x] dx = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{\cos(1-\alpha)x}{1-\alpha} + \frac{\cos(1+\alpha)x}{1+\alpha} \right] \Big|_0^{\pi} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{\cos(1-\alpha)\pi}{1-\alpha} + \frac{\cos(1+\alpha)\pi}{1+\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1+\alpha} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{\cos \pi\alpha}{1-\alpha} + \frac{\cos \pi\alpha}{1+\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1+\alpha} \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\cos \pi\alpha + 1}{1-\alpha^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_s(\alpha) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \sin x \sin \alpha x dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} [\cos(1-\alpha)x - \cos(1+\alpha)x] dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{\sin(1-\alpha)x}{1-\alpha} - \frac{\sin(1+\alpha)x}{1+\alpha} \right] \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{\sin(1-\alpha)\pi}{1-\alpha} - \frac{\sin(1+\alpha)\pi}{1+\alpha} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin \pi\alpha \left( \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1+\alpha} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin \pi\alpha}{1-\alpha^2}. \end{aligned}$$

## ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

**Завдання 1.** Знайти область збіжності степеневого ряду.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{2n+1}}{2n-1}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{2^{n-1}3^n}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2 + 1}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{8^n (n^2 + 1)}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{(2n+1)^2 \sqrt{3^n}}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{6^n \sqrt[3]{n+1}}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n (n+3)}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{2^{n+1} (n+1)^2}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^{2n}}{\sqrt{n+3}}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{2n+1}}.$$

**Завдання 2.** Розвинути функцію  $f(x)$  в ряд Маклорена і вказати область збіжності отриманого ряду.

$$1. f(x) = x^3 \operatorname{arctg} x.$$

$$2. f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

$$3. f(x) = \frac{1}{4+x^2}.$$

$$4. f(x) = \frac{1}{\sqrt{3+x}}.$$

$$5. f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{8-x}}.$$

$$6. f(x) = \cos 5x^2.$$

$$7. f(x) = \frac{3}{2x+1}.$$

$$8. f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-2x}}.$$

$$9. f(x) = \frac{1}{1+4x^2}.$$

$$10. f(x) = \operatorname{arctg} 2x^3.$$

**Завдання 3.** Розвинути функцію  $f(x)$  в ряд Тейлора в околі точки  $x_0$  і вказати область збіжності отриманого ряду.

$$1. f(x) = \cos 5x, x_0 = \frac{\pi}{10}.$$

$$2. f(x) = \sin 5x, x_0 = \frac{\pi}{10}.$$

3.  $f(x) = e^{3x}$ ,  $x_0 = \frac{1}{3}$ .

4.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3+x}}$ ,  $x_0 = 1$ .

5.  $f(x) = 3^{-x}$ ,  $x_0 = 2$ .

6.  $f(x) = \sqrt{2+x}$ ,  $x_0 = 2$ .

7.  $f(x) = \frac{3}{2x+1}$ ,  $x_0 = -2$ .

8.  $f(x) = \ln(2+x)$ ,  $x_0 = 3$ .

9.  $f(x) = \sin 5x$ ,  $x_0 = \frac{\pi}{15}$ .

10.  $f(x) = \ln(1+3x)$ ,  $x_0 = 1$ .

**Завдання 4.** Обчислити визначений інтеграл з точністю **0,001**, використовуючи розвинення підінтегральної функції в степеневий ряд.

1.  $\int_0^{0.25} \ln(1+\sqrt{x}) dx$ .

2.  $\int_0^1 \arctg\left(\frac{x^2}{2}\right) dx$ .

3.  $\int_0^{0.2} \sqrt{x} \cdot \sin \sqrt{x} dx$ .

4.  $\int_0^{0.5} \frac{\arctg x}{x} dx$ .

5.  $\int_0^{0.25} \sqrt{x} \cdot \cos x dx$ .

6.  $\int_0^{0.5} \ln(1+x^3) dx$ .

7.  $\int_0^1 x^2 \cdot \sin x dx$ .

8.  $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ .

9.  $\int_0^{0.5} \sqrt{x^3+1} \cdot x dx$ .

10.  $\int_0^{0.5} \frac{1}{x^5+1} dx$ .

**Завдання 5.** Знайти три перші ненульові члени розвинення в степеневий ряд розв'язку задачі Коші.

1.  $y' = xy + e^y$ ,  $y(0) = 0$ .

2.  $y' = x^2 y^2 + 1$ ,  $y(0) = 1$ .

3.  $y' = x^2 - y^2$ ,  $y(0) = 0,5$ .

4.  $y' = x^3 + y^2$ ,  $y(0) = 0,5$ .

$$5. y' = x + y^2, \quad y(0) = -1.$$

$$6. y' = x + x^2 + y^2, \quad y(0) = 1.$$

$$7. y' = 2 \cos x - xy^2, \quad y(0) = 1.$$

$$8. y' = e^x - y^2, \quad y(0) = 0.$$

$$9. y' = x + y + y^2, \quad y(0) = 1.$$

$$10. y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1.$$

**Завдання 6.** Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію, задану на проміжку, довжина якого дорівнює періоду.

$$1. f(x) = \begin{cases} 5, & -\pi \leq x \leq 0 \\ x-1, & 0 < x \leq \pi \end{cases}.$$

$$2. f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}.$$

$$3. f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq x \leq 0 \\ x+2, & 0 < x \leq \pi \end{cases}.$$

$$4. f(x) = \begin{cases} 1-x, & -2 \leq x \leq 0 \\ -3, & 0 < x \leq 2 \end{cases}.$$

$$5. f(x) = \begin{cases} 2x-1, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq \pi \end{cases}.$$

$$6. f(x) = \begin{cases} 2x, & -3 \leq x \leq 0 \\ -1, & 0 < x \leq 3 \end{cases}.$$

$$7. f(x) = \begin{cases} 3x+1, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq \pi \end{cases}.$$

$$8. f(x) = \begin{cases} 3x+1, & -2 \leq x \leq 0 \\ 2, & 0 < x \leq 2 \end{cases}.$$

$$9. f(x) = \begin{cases} -3, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 2x+5, & 0 < x \leq \pi \end{cases}.$$

$$10. f(x) = \begin{cases} x+2, & -4 \leq x \leq 0 \\ -5, & 0 < x \leq 4 \end{cases}.$$

**Завдання 7.** Подати у вигляді інтеграла Фур'є функцію  $f(x)$ , продовживши її для від'ємних значень вказаним чином.

$$1. f(x) = \begin{cases} 1-2x, & 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}, \quad \text{непарне продовження.}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} 4+3x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}, \quad \text{парне продовження.}$$



$$3. f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{x}{3}, & 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}, \text{ непарне продовження.}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}, \text{ парне продовження.}$$

$$5. f(x) = \begin{cases} e^{3x}, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}, \text{ непарне продовження.}$$

$$6. f(x) = \begin{cases} 4x - 3, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}, \text{ парне продовження.}$$

$$7. f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ x + 2, & 1 < x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}, \text{ непарне продовження.}$$

$$8. f(x) = \begin{cases} 5, & 0 \leq x < 1 \\ 2x + 3, & 1 \leq x \leq 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}, \text{ парне продовження.}$$

$$9. f(x) = \begin{cases} \sin \frac{x}{3}, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}, \text{ непарне продовження.}$$

$$10. f(x) = \begin{cases} e^{3x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}, \text{ парне продовження.}$$

**Завдання 8.** Для функції  $f(x)$  знайти перетворення Фур'є вказаного типу.

$$1. f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}, \text{ косинус-перетворення.}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 1 \leq x \leq 2, \text{ синус-перетворення.} \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} xe^{4x}, & 0 \leq x \leq 1, \text{ косинус-перетворення.} \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x < 1 \\ 1 + x, & 1 < x \leq 3, \text{ синус-перетворення.} \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

$$5. f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ x + 2, & 1 \leq x \leq 3, \text{ косинус-перетворення.} \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

$$6. f(x) = \begin{cases} 3, & 0 \leq x < 2 \\ 2x + 5, & 2 \leq x \leq 4, \text{ синус-перетворення.} \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

$$7. f(x) = \begin{cases} e^{3x}, & 0 \leq x \leq 2, \text{ косинус-перетворення.} \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

$$8. f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \text{ синус-перетворення.} \\ 0, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$9. f(x) = \begin{cases} 2x + 5, & 0 \leq x \leq 4, \text{ косинус-перетворення.} \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

$$10. f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 2 \\ 3x - 2, & 2 < x \leq 5, \text{ синус-перетворення.} \\ 0, & x > 5 \end{cases}$$

# ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

## РОБОЧА ПРОГРАМА навчальної дисципліни «ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ»

II курс II семестр

### Розподіл навчальних годин

Кількість годин				Самостійної роботи	Кількість контр. робіт	Форма звітності
УСЬОГО	Аудиторних занять		Практичних занять			
	Усього	Лекцій				
144	20	12	8	124	2	екзамен

### Зміст програми

#### 1. Диференціальні рівняння першого порядку

1. Задачі, які приводять до диференціальних рівнянь. Поняття звичайного диференціального рівняння першого порядку, загальний та частинний розв'язки, їх геометричний зміст. Задача Коші та її геометричний зміст. Теорема Коші (про існування і єдиність розв'язку задачі Коші). Диференціальні рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними.

2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку та такі, що до них приводяться. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку, їх розв'язування методами Лагранжа (варіації довільної сталої) і Бернуллі.

3. Рівняння Бернуллі і Ріккаті. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник.

4. Диференціальні рівняння, нерозв'язувані відносно похідної. Рівняння Лагранжа і Клеро.

5. Постановка і розв'язування задач геометричного і фізичного змісту, які приводять до звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

## 2. Диференціальні рівняння вищих порядків

6. Поняття звичайного диференціального рівняння вищого порядку. Розв'язок рівняння. Задача Коші. Існування і єдиність розв'язку задачі Коші (теорема Коші-Пікара). Умови існування загального розв'язку. Загальний розв'язок у формі Коші. Загальний інтеграл у параметричній формі. Особливий розв'язок.

7. Деякі типи диференціальних рівнянь вищих порядків, що розв'язуються у квадратурах: рівняння, що містять тільки старшу похідну невідомої функції та незалежну змінну, рівняння, що містять тільки похідні. Частинні випадки.

8. Деякі типи диференціальних рівнянь вищих порядків, що допускають пониження порядку: рівняння, що не містять явно невідому функцію або незалежну змінну, рівняння, однорідні відносно невідомої функції та її похідних, рівняння у точних похідних. Частинні випадки.

## 3. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами

9. Поняття лінійного диференціального рівняння  $n$ -го порядку. Загальні властивості. Існування і єдиність розв'язку задачі Коші. Властивості розв'язку лінійних однорідних рівнянь. Поняття лінійної залежності і лінійної незалежності функцій. Визначник Вронського та його властивості. Фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного рівняння, необхідна і достатня умова її утворення. Теорема про структуру загального розв'язку. Побудова рівняння за фундаментальною системою.

10. Розв'язування лінійних однорідних диференціальних рівнянь вищих порядків зі сталими коефіцієнтами.

11. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння  $n$ -го порядку: теорема про структуру загального розв'язку, принцип суперпозиції частинних розв'язків. Розв'язування рівнянь зі сталими коефіцієнтами: метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа), підбір частинного розв'язку та його відшукання методом невизначених коефіцієнтів у випадку “спеціальної” правої частини.

12. Диференціальні рівняння, що зводяться до лінійних зі сталими коефіцієнтами: рівняння Ейлера і Лагранжа.

13. Деякі застосування лінійних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами: постановка і розв'язування задач про коливання вантажу на пружині, вертикальну та бортову качки корабля на спокійній воді, вільні коливання за наявності опору, вимушені коливання.

#### **4. Системи диференціальних рівнянь**

14. Канонічні і нормальні системи звичайних диференціальних рівнянь. Розв'язок системи. Задача Коші. Розв'язування нормальних систем методом послідовного виключення невідомих. Фізичний зміст нормальної системи. Фазові траєкторії системи.

15. Розв'язування нормальних систем методом відшукування інтегровних комбінацій.

16. Фундаментальна система розв'язків лінійної однорідної системи, необхідна і достатня умова її утворення. Матрична форма запису. Структура загального розв'язку. Розв'язування нормальних систем лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами методом Ейлера.

17. Матрична форма запису лінійної неоднорідної системи. Структура загального розв'язку. Розв'язування нормальних систем лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами методом варіації довільних сталих (методом Лагранжа).

18. Постановка і розв'язування задач фізики і техніки, що приводять до систем диференціальних рівнянь.

#### **РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА**

##### **ПІДРУЧНИКИ І НАВЧАЛЬНІ ПОСІБНИКИ**

1. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. – СПб.: Лань, 2008. – 736 с.
2. Васильева А.Б., Медведев Г.Н., Тихонов Н.А., Уразгильдина Т.А. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 432 с.

3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 2: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2000. – 416 с.
4. Демидович Б.П., Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики: Учеб. пособие для вузов / Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. – М.: Астрель; АСТ, 2001. – 656 с.
5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.
6. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч.2: Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи. – К.: Техніка, 2000. – 792 с.
7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов. В 2 т. Т. 2: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука, 1985. – 560 с. (Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. пособие для вузов. В 2-х т. Т. 2. – М.: Интеграл-пресс, 2009. – 544 с.)
8. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 608 с.
9. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 1989. – 383 с.
10. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеева Г.М. та ін. Вища математика у прикладах та задачах. Ч. 3. Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 596 с.
11. Шипачев В.С. Высшая математика: Учебник для вузов. – М.: Юрайт, Высшее образование, 2009. – 480 с.

#### **ЗБІРНИКИ ЗАДАЧ**

12. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учеб. пособие. – СПб.: Профессия, 2001. – 432 с.
13. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін.; За ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. – К.: А.С.К., 2004. – 480 с.

14. Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / Под ред. С.Н. Федина. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 592 с.
15. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 336 с.
16. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2003. – 304 с.

#### ЛІТЕРАТУРА ВИДАВНИЦТВА НМетАУ

17. Сясєв А.В. Вища математика. Розділ “Диференціальні рівняння першого порядку”: Конспект лекцій. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2004. – 44 с.
18. Сясєв А.В. Вища математика. Розділ “Диференціальні рівняння вищих порядків. Системи диференціальних рівнянь”: Конспект лекцій. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2005. – 44 с.

### КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ

Виконання кожної контрольної роботи треба починати з вивчення теоретичних положень за наведеними посиланнями, причому це необхідно поєднувати з самостійним розв’язанням рекомендованих задач. До виконання контрольних завдань доцільно приступати тільки після вироблення достатніх практичних навичок. Типові приклади наведені з метою допомогти в цьому. Вони перенумеровані наступним чином: перша цифра означає номер дисципліни (1 – лінійна алгебра і аналітична геометрія, 2 – математичний аналіз, 3 – диференціальні рівняння), друга цифра – порядковий номер контрольної роботи, третя цифра – порядковий номер прикладу. Рисунки мають аналогічну нумерацію; переважна більшість з тих, що містять графіки функцій, побудована за допомогою **Mathcad**.

# КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 1

## МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ

Рекомендується (скориставшись одним або двома з наведених нижче джерел)

- вивчити теоретичні положення за [1], гл. X, §§ 1, 2; [4], гл. XXII, §§ 1 – 4, 8, 9; [5], гл. 8, §§ 1.1 – 1.7, 2.1 – 2.3; [6], гл. 1, §§ 1.1, 1.2, 1.4, 2.1 – 2.6, 3, 5.1, 5.2; [7], гл. XXIII, §§ 1 – 8, 13, 14, 16 – 18; [8], гл. X, §§ 47, 48.1 – 48.4, 48.6, 49.1, 49.2; [11], гл. 15, §§ 1, 2;
- розібрати розв’язання задач у [2], гл. 1, §§ 1 – 3, гл. 2, § 1; [3], гл. IV, §§ 1, 2; [9], гл. 1, §§ 1 – 5, 8, гл. 2, § 9; [10], гл. 1, §§ 1, 2;
- самостійно розв’язати задачі: [3], №№ 515, 516, 523, 550, 551, 554, 568, 570, 603, 605, 611, 639, 640, 645, 647, 651, 652, 659, 660; [12], №№ 3901, 3903, 3910, 3915, 3934, 3937, 3945, 3946, 3954, 3955, 3965, 3967, 4109, 4114, 4117, 4118, 4125, 4128, 4156, 4157, 4161, 4163, 4173, 4177, 4189, 4193; [13], гл. 8, №№ 2, 4, 43, 44, 48, 61, 66, 84, 86, 103, 105, 115, 121, 124, 133, 140, 184, 191, 200, 206, 213, 214, 215, 217, 221, 227; [14], №№ 2.1.2 (а, б), 16, 19, 23, 25, 40, 64, 2.2.2, 4, 10, 27, 2.3.2, 3, 5, 12, 23, 2.5.2, 3, 2.6.2, 4, 7, 9, 12, 13, 17, 24, 27, 28, 30; [15], №№ 2061, 2065, 2066, 2081, 2093, 2096, 2103, 2116, 2118, 2122, 2155-1, 2156-3, 2163-1, 2164, 2165, 2168, 2169, 2175; [16], гл. 14, №№ 2, 4, 9, 24, 25, 31, 33, 35, 45, 50, 56, 59, 64, 78, 80.

**Приклад 3.1.1.** З’ясувати, чи буде функція  $y = x \arcsin x$  розв’язком рівняння  $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ .

*Розв’язання.* Якщо функція є розв’язком рівняння, то її підстановка до цього рівняння повинна перетворити його на вірну тотожність. Перевіримо це.

Підставимо  $y' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$  разом із  $y = x \arcsin x$  до рівняння:

$$x \arcsin x + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} - x \arcsin x = x \operatorname{tg} \frac{x \arcsin x}{x}.$$

З урахуванням того, що  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$  й  $\sin(\arcsin x) = x$ , отримуємо вірну



тотожність  $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = x \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ . Отже, задана функція справді задовольняє рівнянню, тобто є його розв'язком.

**Приклад 3.1.2.** Скласти рівняння кривої, якщо відомо, що вона проходить через точку  $M_0(0, 1)$ , а кутовий коефіцієнт дотичної до цієї кривої в кожній точці дорівнює  $k(x, y) = x \sqrt[3]{y}$ .

*Розв'язання.* Як відомо, кутовий коефіцієнт дотичної до кривої  $y = y(x)$  в довільній точці  $M(x, y)$  є  $k(x, y) = y'$ . Отже, маємо рівняння  $y' = x \sqrt[3]{y}$ .

Поділимо змінні і отримаємо  $\frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = x dx$ , звідки  $\frac{3}{2} \sqrt[3]{y^2} = \frac{x^2}{2} + \frac{C}{2}$  або

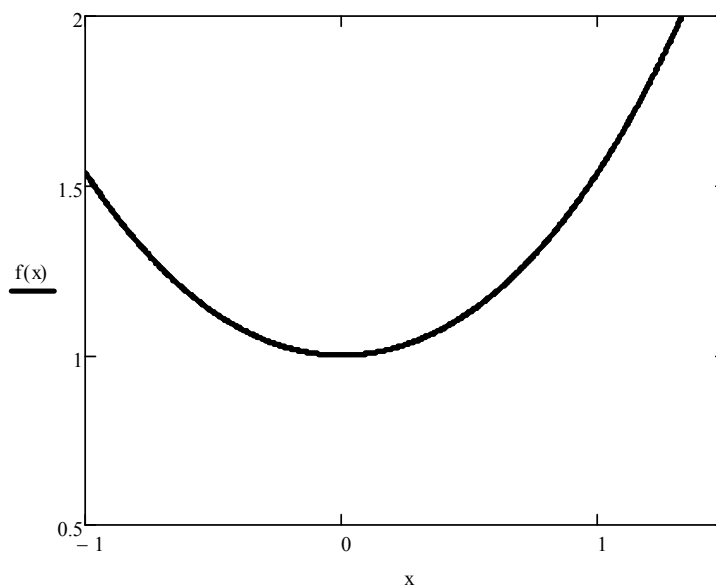
$y^2 = \left(\frac{x^2 + C}{3}\right)^3$ . Отриманий загальний розв'язок є рівнянням сім'ї кривих.

Шукана крива проходить через точку  $M_0$ , отже, її рівняння визначається значенням  $C = C^*$ , знайденим з умови  $y(x_0) = y_0$ , тобто, в даному випадку, з

умови  $y(0) = 1$ . Отже,  $1^2 = \left(\frac{0 + C^*}{3}\right)^3$ , звідки  $C^* = 3$ . Таким чином, рівняння

шуканої кривої є  $y^2 = \left(\frac{x^2}{3} + 1\right)^3$ . Графік додатної гілки кривої наведений на

рис. 3.1.1.



**Рис. 3.1.1**

**Приклад 3.1.3.** Розв'язати рівняння

а)  $2xy^2 dx - y dy = yx^2 dy - 6x dx$ ; б)  $\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0$ ;

в)  $y' = \frac{2x + y - 4}{x - y + 1}$ ; г)  $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$  (застосувати метод Бернуллі).

*Розв'язання.*

а) Перетворимо рівняння до вигляду  $2x(y^2 + 3)dx = y(x^2 + 1)dy$ . Отже, маємо рівняння з відокремлюваними змінними  $X_1(x)Y_1(y)dx + X_2(x)Y_2(y)dy = 0$ .

Поділимо обидві частини рівняння на добуток  $(y^2 + 3)(x^2 + 1)$ . Оскільки обидва множники не дорівнюють нулю (а саме, додатні), то при цьому частинні (або особливі) розв'язки рівняння не загублюються. Таким чином, дістаємо

рівняння з відокремленими змінними  $\frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{y}{y^2 + 3} dy$ . Після інтегрування

отримуємо загальний інтеграл заданого рівняння  $\ln(x^2 + 1) = \frac{1}{2} \ln(y^2 + 3) + \ln|C|$ ,

$C \neq 0$ , який після потенціювання і використання властивостей логарифмів набуває вигляду  $\frac{x^2 + 1}{\sqrt{y^2 + 3}} = C$ ;

б) Маємо *однорідне* диференціальне рівняння першого порядку  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ , тому що функції  $P(x, y) = x - y \cos \frac{y}{x}$  й

$Q(x, y) = x \cos \frac{y}{x}$  є однорідними одного й того самого виміру. Справді,

$$P(\lambda x, \lambda y) = \lambda x - \lambda y \cos \frac{\lambda y}{\lambda x} = \lambda \cdot P(x, y), \quad Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda x \cos \frac{\lambda y}{\lambda x} = \lambda \cdot Q(x, y).$$

Оскільки  $x \neq 0$ , то рівняння приводиться до вигляду

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{1 - \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}}{\cos \frac{y}{x}}. \text{ Застосуємо підстановку } y = ux. \text{ Тоді } y' = u'x + u \text{ і}$$

$$u'x + u = \frac{u \cos u - 1}{\cos u}; \quad u'x = \frac{u \cos u - 1}{\cos u} - u; \quad u'x = - \frac{1}{\cos u}; \quad \frac{du}{dx} x = - \frac{1}{\cos u};$$

$\cos u du + \frac{dx}{x} = 0$ . Інтегрування отриманого рівняння з відокремленими

змінними дає загальний інтеграл  $\sin u + \ln|x| = C$ , який після повернення до вихідної змінної  $y$  набуває остаточного вигляду  $\sin \frac{y}{x} + \ln|x| = C$ ;

в) Дане рівняння відноситься до типу  $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ . Такі рівняння у

випадку  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$  зводяться до однорідних за допомогою підстановки

$x = x_0 + u$ ,  $y = y_0 + v$ , де  $x_0$ ,  $y_0$  є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}. \text{ Розв'язком системи } \begin{cases} 2x + y - 4 = 0, \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \text{ є } x_0 = 1, y_0 = 2.$$

Зробимо підстановку  $x = 1 + u$ ,  $y = 2 + v$ . Тоді  $dx = du$ ,  $dy = dv$ ,  $y' = \frac{dv}{du}$ .

Отримуємо однорідне рівняння  $\frac{dv}{du} = \frac{2u + v}{u - v}$ . Розв'яжемо це рівняння за

допомогою підстановки  $v = zu$ ,  $\frac{dv}{du} = u \frac{dz}{du} + z$ . Маємо

$$u \frac{dz}{du} + z = \frac{2 + z}{1 - z}; \quad u \frac{dz}{du} = \frac{2 + z^2}{1 - z}; \quad \frac{1 - z}{2 + z^2} dz = \frac{du}{u}.$$

Після інтегрування дістаємо загальний інтеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \ln(2 + z^2) = \ln|u| + C.$$

Повертаючись до вихідних змінних за формулами  $z = \frac{v}{u}$ ,  $v = y - 2$ ,  $u = x - 1$ ,

остаточно отримуємо  $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{y-2}{x-1} \right) - \frac{1}{2} \ln \left[ 2 + \left( \frac{y-2}{x-1} \right)^2 \right] = \ln|x-1| + C$ ;

г) Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку  $y' + p(x)y = q(x)$ .

Розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді добутку двох невідомих функцій  $y = uv$ , отже,  $y' = u'v + uv'$ . Підставимо  $y$  та  $y'$  у рівняння і отримаємо

$u'v + uv' + uv \cos x = e^{-\sin x}$  або  $u'v + u(v' + v \cos x) = e^{-\sin x}$  (\*). Невідому

функцію  $v = v(x)$  будемо шукати з умови  $v' + v \cos x = 0$  (\*\*), отже,

$\frac{dv}{dx} = -v \cos x$  або  $\frac{dv}{v} = -\cos x dx$ . Інтегруючи, знаходимо  $\ln|v| = -\sin x$ ,

звідки  $v = e^{-\sin x}$  (для зручності беремо частинний розв'язок, якому відповідає нульове значення довільної сталої). Підставимо знайдену функцію  $v$  в рівняння (\*) і з урахуванням (\*\*) отримаємо  $u'e^{-\sin x} = e^{-\sin x}$ . Оскільки  $e^{-\sin x} \neq 0 \quad \forall x$ , то  $u' = 1$  або  $u = x + C$ . Таким чином, загальний розв'язок має вигляд  $y = (x + C)e^{-\sin x}$ .

**Приклад 3.1.4.** Розв'язати задачу Коші  $xy' + y = y^2 \ln x$ ,  $y(1) = -\frac{1}{2}$ .

*Розв'язання.* Оскільки  $x > 0$ , то без втрати розв'язку перетворимо рівняння до вигляду  $y' + \frac{y}{x} = y^2 \frac{\ln x}{x}$ . Отримали рівняння Бернуллі  $y' + p(x)y = y^r q(x)$ ,

де  $r \neq 0$ ,  $r \neq 1$ . Розв'яжемо його однойменним методом:  $y = uv$ ,  $y' = u'v + uv'$ ,

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = u^2 v^2 \frac{\ln x}{x}; \quad u'v + u \left( v' + \frac{v}{x} \right) = u^2 v^2 \frac{\ln x}{x} \quad (*); \quad v' + \frac{v}{x} = 0 \quad (**);$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}; \quad \ln|v| = -\ln|x|; \quad v = \frac{1}{x}; \quad u' \frac{1}{x} = u^2 \frac{1}{x^2} \frac{\ln x}{x}; \quad \frac{du}{u^2} = \frac{\ln x}{x^2} dx;$$

$$-\frac{1}{u} = -\frac{\ln x + 1}{x} - C; \quad u = \frac{x}{\ln x + 1 + Cx}.$$

Загальний розв'язок  $y = uv$ , таким чином, має вигляд  $y = \frac{1}{\ln x + 1 + Cx}$ . Розв'язок поставленої задачі Коші  $\tilde{y}$

визначається значенням довільної сталої  $C^*$ , знайденим з початкової умови:

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + C^*}, \quad C^* = -3.$$

Отже, шуканий розв'язок має вигляд

$$\tilde{y} = \frac{1}{\ln x + 1 - 3x}.$$

**Приклад 3.1.5.** Розв'язати рівняння

$$\text{а) } y = 2xy' + \sin^2 y'; \quad \text{б) } y = xy' + y' - y'^2.$$

*Розв'язання.*

а) Маємо рівняння Лагранжа  $y = x\phi(y') + \psi(y')$ . В даному разі  $\phi(y') = 2y'$ ,  $\psi(y') = \sin^2 y'$ . Введемо параметр  $p = y'$ , тоді рівняння набуде вигляду  $y = 2xp + \sin^2 p$  (\*). Продиференціюємо по  $x$  обидві частини цього рівняння і

одержимо рівняння  $p = 2p + 2x \frac{dp}{dx} + \sin 2p \frac{dp}{dx}$ , яке приводиться до вигляду

$-p = \frac{dp}{dx}(2x + \sin 2p)$  (\*\*). Неважко бачити, що воно перетворюється на тотожність при  $p = 0$ . Підставивши це значення у рівняння (\*), отримуємо відповідний розв'язок  $y = 0$ . Чи буде він особливим або частинним, з'ясуємо пізніше, коли знайдемо загальний розв'язок.

Рівняння (\*\*) є лінійним відносно  $x$  як функції від  $p$ . Дійсно,  $-p \frac{dx}{dp} = 2x + \sin 2p$ , звідки  $\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = -\frac{\sin 2p}{p}$ . Розв'яжемо це рівняння

методом Бернуллі:  $x = uv$ ,  $\frac{dx}{dp} = \frac{du}{dp}v + u\frac{dv}{dp}$ ,

$$\frac{du}{dp}v + u\frac{dv}{dp} + \frac{2}{p}uv = -\frac{\sin 2p}{p}; \quad \frac{dv}{dp} + \frac{2}{p}v = 0; \quad \frac{dv}{v} = -2\frac{dp}{p}; \quad \ln|v| = -2\ln|p|;$$

$$v = \frac{1}{p^2}; \quad \frac{du}{dp} \frac{1}{p^2} = -\frac{\sin 2p}{p}; \quad du = -p \sin 2p dp; \quad u = -\int p \sin 2p dp + C =$$

$= \frac{p}{2} \cos 2p - \frac{1}{4} \sin 2p + C$ . Отже, загальний розв'язок рівняння (\*\*) має вигляд

$x = \left( \frac{p}{2} \cos 2p - \frac{1}{4} \sin 2p + C \right) \frac{1}{p^2}$ . Підставляючи його у (\*), отримуємо загальний

розв'язок заданого рівняння у параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = \frac{\cos 2p}{2p^2} - \frac{\sin 2p}{4p^2} + \frac{C}{p^2}, \\ y = \cos 2p - \frac{\sin 2p}{2p} + \frac{2C}{p} + \sin^2 p. \end{cases} \quad \text{Оскільки розв'язок } y = 0 \text{ не впливає з}$$

загального розв'язку ні при якому значенні  $C$ , то він є особливим розв'язком заданого рівняння;

б) Маємо рівняння Клеро  $y = xy' + \psi(y')$ , яке є частинним випадком рівняння Лагранжа. В даному разі  $\psi(y') = y' - y'^2$ . Введемо параметр  $p = y'$ , тоді рівняння набуде вигляду  $y = xp + p - p^2$  (\*). Продиференціюємо по  $x$  обидві

частини рівняння і одержимо  $p = p + x \frac{dp}{dx} + (1 - 2p) \frac{dp}{dx}$  або  $\frac{dp}{dx}(x + 1 - 2p) = 0$ .

Прирівнюючи до нуля кожен з множників, отримаємо:  $\frac{dp}{dx} = 0$ ,  $x + 1 - 2p = 0$ . З

першого рівняння маємо  $p = C$  ( $C = \text{const}$ ). Підставивши цей результат в

рівняння (\*), отримаємо загальний розв'язок заданого рівняння  $y = xC + C - C^2$  або  $y = C(x+1-C)$ . З другого рівняння знайдемо  $p = \frac{x+1}{2}$ .

Підставивши цей результат в рівняння (\*), отримаємо особливий розв'язок заданого рівняння  $y = (x+1)\left(\frac{x+1}{2}\right) - \left(\frac{x+1}{2}\right)^2$  або  $y = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2$ . Цей розв'язок не можна отримати з загального розв'язку ні при якому значенні  $C$ .

*Зауваження.* Загальний розв'язок рівняння Клеро отримуємо, замінюючи у вихідному рівнянні  $y'$  на  $C$ . Геометрично він являє собою сім'ю прямих ліній. Особливий розв'язок є обвідною цієї сім'ї.

### Приклад 3.1.6. Розв'язати задачу Коші

а)  $y'' = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $y(0) = -3$ ,  $y'(0) = 2$ ; б)  $x(y'' + 1) + y' = 0$ ,  $y(1) = \frac{1}{4}$ ,  $y'(1) = 0$ ;

в)  $y'' \operatorname{tg} y = 2y'^2$ ,  $y(1) = \frac{\pi}{4}$ ,  $y'(1) = -\frac{1}{2}$ ; г)  $y'' = \sqrt{1-y'^2}$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 1$ ;

д)  $2y'' = y' + y'^3$ ,  $y(0) = \frac{\pi}{2}$ ,  $y'(0) = 1$ ; е)  $3y'y'' = e^y$ ,  $y(-5) = 0$ ,  $y'(-5) = 1$ .

*Розв'язання.*

а) Рівняння має вигляд  $y'' = f(x)$ , тобто містить тільки старшу похідну і незалежну змінну. Знайдемо його загальний розв'язок шляхом послідовного двократного інтегрування:

$$\frac{d(y')}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow d(y') = \frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow \int d(y') = \int \frac{dx}{1+x^2} + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \operatorname{arctg} x + C_1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \operatorname{arctg} x + C_1 \Rightarrow dy = (\operatorname{arctg} x + C_1) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \int (\operatorname{arctg} x + C_1) dx + C_2 \Rightarrow y = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C_1 x + C_2.$$

Частинний розв'язок  $\tilde{y} = y(x, C_1^*, C_2^*)$  знайдемо, визначивши з початкових умов значення  $C_1 = C_1^*$  та  $C_2 = C_2^*$  довільних сталих:  $y(0) = -3 \Rightarrow -3 = C_2^*$ ,  $y'(0) = 2 \Rightarrow 2 = C_1^*$ . Отже, розв'язок поставленої задачі Коші має вигляд

$$\tilde{y} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + 2x - 3;$$

б) Рівняння має вигляд  $F(x, y', y'') = 0$ , тобто містить в явному вигляді незалежну змінну, але не містить невідому функцію. Порядок такого рівняння знижується на одиницю за допомогою підстановки  $y' = p(x)$ . Тоді  $y'' = p'$  і рівняння набуває вигляду  $x(p' + 1) + p = 0$ . Отримали рівняння першого порядку, яке може бути віднесено як до однорідного, так і до лінійного.

Вважаючи його однорідним, тобто,  $p' + 1 = -\frac{p}{x}$  зробимо підстановку  $p = ux$ .

Тоді  $p' = u'x + u \Rightarrow u'x + u = -1 - u \Rightarrow u'x = -(1 + 2u) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{du}{1+2u} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} \ln|1+2u| = -\ln|x| + \frac{1}{2} \ln|C_1| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+2u} = \frac{\sqrt{C_1}}{x} \Rightarrow 1+2u = \frac{C_1}{x^2} \Rightarrow u = \frac{1}{2} \left( \frac{C_1}{x^2} - 1 \right) \Rightarrow p = \frac{C_1}{2x} - \frac{x}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y' = \frac{C_1}{2x} - \frac{x}{2}$ . Після відокремлення змінних і інтегрування отримуємо

загальний розв'язок  $y = \frac{C_1}{2} \ln|x| - \frac{x^2}{4} + C_2$ . Враховуючи, що довільні сталі

незалежні одна від одної і перепозначивши  $\frac{C_1}{2}$  на  $C_1$ , остаточно будемо мати

$y = C_1 \ln|x| - \frac{x^2}{4} + C_2$ . Значення  $C_1 = C_1^*$  та  $C_2 = C_2^*$  довільних сталих знайдемо

з початкових умов:

$$y(1) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + C_2^* \Rightarrow C_2^* = \frac{1}{2}, \quad y'(1) = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2} + C_1^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1^* = \frac{1}{2}. \text{ Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд } \tilde{y} = \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2};$$

в) Рівняння має вигляд  $F(y, y', y'') = 0$ , тобто містить в явному вигляді невідому функцію, але не містить незалежну змінну. Порядок такого рівняння

знижується на одиницю за допомогою підстановки  $y' = q(y)$ . Тоді  $y'' = q \frac{dq}{dy}$  і

рівняння набуває вигляду  $q \frac{dq}{dy} \operatorname{tgy} = 2q^2$ . Отримали рівняння першого порядку

з відокремлюваними змінними. Запишемо його у вигляді  $q \left( \frac{dq}{dy} \operatorname{tgy} - 2q \right) = 0$ .

Прирівнюючи до нуля кожен з множників, будемо мати  $q = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = C; \quad \frac{dq}{dy} \operatorname{ctgy} - 2q = 0 \Rightarrow \frac{dq}{q} = 2 \operatorname{ctgy} dy \Rightarrow \ln|q| = 2 \ln|\sin y| + \ln|C_1| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = C_1 \sin^2 y \Rightarrow y' = C_1 \sin^2 y \Rightarrow \frac{dy}{\sin^2 y} = C_1 dx. \quad \text{Отже, загальний}$$

інтеграл рівняння має вигляд  $\operatorname{ctgy} = C_1 x + C_2$  (знак « - » врахований). Бачимо, що розв'язок  $y = C$  не є особливим, оскільки утворюється з загального при  $C_1 = 0$ . Значення  $C_1 = C_1^*$  та  $C_2 = C_2^*$  довільних сталих знайдемо з початкових умов:

$$y(1) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = C_1^* + C_2^*, \quad y'(1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{4}} \left(-\frac{1}{2}\right) = C_1^* \Rightarrow C_1^* = 1,$$

$C_2^* = 0$ . Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд  $\operatorname{ctgy} = x$ ;

г) Рівняння має вигляд  $F(y', y'') = 0$ , тобто не містить в явному вигляді ані невідому функцію, ані незалежну змінну. Порядок такого рівняння може бути знижений на одиницю за допомогою будь-якої з підстановок  $y' = p(x)$  або  $y' = q(y)$ . Переважність однієї з них визначається конкретним рівнянням. В даному випадку застосуємо підстановку  $y' = p(x)$ :  $y'' = p'$ ,

$$p' = \sqrt{1-p^2} \Rightarrow \frac{dp}{\sqrt{1-p^2}} = dx \Rightarrow \arcsin p = x + C_1 \Rightarrow p = \sin(x + C_1) \Rightarrow$$

$\Rightarrow y' = \sin(x + C_1) \Rightarrow y = C_2 - \cos(x + C_1)$ . Значення  $C_1 = C_1^*$  та  $C_2 = C_2^*$  довільних сталих знайдемо з початкових умов:

$$y(0) = 2 \Rightarrow 2 = C_2^* - \cos C_1^*, \quad y'(0) = 1 \Rightarrow 1 = \sin C_1^* \Rightarrow C_1^* = \frac{\pi}{2}, \quad C_2^* = 2.$$

Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд  $\tilde{y} = 2 - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$  або  $\tilde{y} = 2 + \sin x$ ;

д) Тип даного рівняння той самий, що й в попередньому прикладі. В даному разі вигідніше застосувати підстановку  $y' = q(y)$  (перевірте):  $y'' = q \frac{dq}{dy}$ ,

$$2q \frac{dq}{dy} = q(1+q^2) \Rightarrow q = 0 \Rightarrow y = C, \quad 2 \frac{dq}{dy} = 1+q^2 \Rightarrow \frac{dq}{1+q^2} = \frac{dy}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg} q = \frac{y}{2} + C_1 \Rightarrow q = \operatorname{tg}\left(\frac{y}{2} + C_1\right) \Rightarrow y' = \operatorname{tg}\left(\frac{y}{2} + C_1\right) \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \operatorname{ctg}\left(\frac{y}{2} + C_1\right) dy = dx \Rightarrow 2 \ln \left| \sin\left(\frac{y}{2} + C_1\right) \right| = x + C_2 - \text{ загальний інтеграл.}$$

Значення  $C_1 = C_1^*$  та  $C_2 = C_2^*$  довільних сталих знайдемо з початкових умов:

$$y(0) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2 \ln \left| \sin \frac{\pi}{4} \right| = C_2^* \Rightarrow C_2^* = \ln \sin^2 \frac{\pi}{4} = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2,$$

$$y'(0) = 1 \Rightarrow 1 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + C_1^*\right) \Rightarrow C_1^* = 0. \text{ Отже, розв'язок задачі Коші має}$$

вигляд  $2 \ln \left| \sin \frac{y}{2} \right| = x - \ln 2$ , розв'язок  $y = C$  є особливим;

е) При розв'язанні задач Коші значення кожної з довільних сталих рекомендується знаходити з початкових умов одразу, як тільки ця стала з'являється в процесі розв'язання. Це демонструє даний приклад.

Рівняння відноситься до типу  $F(y, y', y'') = 0$ , отже, застосуємо підстановку

$$y' = q(y), y'' = q \frac{dq}{dy}: 3q^2 \frac{dq}{dy} = e^y \Rightarrow 3q^2 dq = e^y dy \Rightarrow q^3 = e^y + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \sqrt[3]{e^y + C_1} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt[3]{e^y + C_1}} = dx. \text{ Спроба інтегрування отриманого}$$

рівняння приводить до інтеграла, що “не береться”. Врахуємо обидві початкові умови:  $1 = \sqrt[3]{e^0 + C_1^*} \Rightarrow C_1^* = 0$ . Зауважимо, що з цього місця шукаємо вже не

загальний, а частинний розв'язок. Тоді  $\frac{dy}{\sqrt[3]{e^y}} = dx \Rightarrow e^{-\frac{y}{3}} dy = dx \Rightarrow$

$\Rightarrow -3e^{-\frac{y}{3}} = x + C_2$ . Врахуємо тепер першу початкову умову і знайдемо значення  $C_2^*$ :  $-3e^0 = -5 + C_2^* \Rightarrow C_2^* = 2$ . Отже розв'язок задачі Коші має

вигляд частинного інтеграла  $-3e^{-\frac{y}{3}} = x + 2$ .

## ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

**Завдання 1.** З'ясувати, чи буде задана функція розв'язком вказаного рівняння.

1.  $y = e^x \sqrt{1+x^2}$ ,  $y' = \frac{x}{y} e^{2x} + y$ .

2.  $y = \frac{1 - \cos 2x}{2 \cos x}$ ,  $y' - y \operatorname{tg} x = 2 \sin x$ .

3.  $y = \frac{1}{x \ln x}$ ,  $y' x + y = -xy^2$ .

4.  $y = \frac{3-x}{1+3x}$ ,  $(1+x^2)y' + 1 + y^2 = 0$ .

5.  $y = \frac{2x}{1+3x^2}$ ,  $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}$ .

6.  $y = x e^x$ ,  $xy' = y \left(1 + \ln \frac{y}{x}\right)$ .

7.  $y = \ln x - x$ ,  $x \ln xy' - y = x(\ln x - 1)$ .

8.  $y = \frac{x-1}{3} + \frac{5}{\sqrt{2x+1}}$ ,  $(2x+1)y' + y = x$ .

9.  $y = x\sqrt{2x+3}$ ,  $y' = \frac{y}{x} + \frac{x^2}{y}$ .

10.  $y = x e^{1-x}$ ,  $xy' = y \ln \frac{y}{x}$ .

**Завдання 2.** Скласти рівняння кривої, якщо відомо, що вона проходить через точку  $M_0$ , а кутовий коефіцієнт дотичної до цієї кривої в кожній точці дорівнює  $k(x, y)$ .

1.  $M_0(-1; 2)$ ,  $k(x, y) = -\frac{x^2}{y}$ .

2.  $M_0(2; 5)$ ,  $k(x, y) = \frac{y}{x^2}$ .

3.  $M_0(1; 2)$ ,  $k(x, y) = \frac{y^2 - 1}{2x}$ .

4.  $M_0(1; 1)$ ,  $k(x, y) = -\frac{\sqrt{x}}{y}$ .

5.  $M_0(0; 1)$ ,  $k(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + 1}}$ .

6.  $M_0(\pi/2; 1)$ ,  $k(x, y) = y \operatorname{ctg} x$ .

7.  $M_0(1; 1)$ ,  $k(x, y) = 3\frac{y}{x}$ .

8.  $M_0(1; 2)$ ,  $k(x, y) = -y^2 x$ .

9.  $M_0(-1; 1)$ ,  $k(x, y) = -\frac{y^2}{x^2}$ .

10.  $M_0(0; 1)$ ,  $k(x, y) = -y \operatorname{tg} x$ .

**Завдання 3.** Розв'язати рівняння.

1.  $x^2 y' - 2xy = 3y$ .

2.  $xy' + y = xy \ln x$ .

3.  $x^2(y+1) + (x^3-1)(y-1)y' = 0$ .

4.  $e^x \sin^3 y + (1 + e^{2x}) \cos y y' = 0$ .

5.  $x^2 y' + \cos 4y = 1$ .

6.  $yx^2 y' = (y^2 + 1)e^{\frac{1}{x}}$ .

7.  $y^2 - xy' = y - x^2 y'$ .

8.  $x \operatorname{tg} 5y dx - e^{2x^2} dy = 0$ .

9.  $y' = (x-1)e^{x+y}$ .

10.  $3yy' + x^3 = x$ .

**Завдання 4.** Розв'язати рівняння.

1.  $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$ .

2.  $2x^3 y' = y(2x^2 - xy)$ .

3.  $(x^2 + y^2)y' = xy$ .

4.  $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$ .

5.  $(y-x)xdy = y^2 dx$ .

6.  $2x^2 y' = x^2 + y^2$ .

7.  $xy' = y(\ln y - \ln x)$ .

8.  $xy' \cos^2 \frac{y}{x} = y \cos^2 \frac{y}{x} + x$ .

9.  $xyy' = x^2 - y^2$ .

10.  $2y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1$ .

**Завдання 5.** Розв'язати рівняння.

1.  $xy' + 2y = e^{3x}$ .

2.  $\cos xy' + y \sin x = 1$ .

3.  $xy' + y = \ln x$ .

4.  $y' - y \sin x = \sin 2x$ .

5.  $y' - 3y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$ .

6.  $x^2 y' + 3xy = \cos x$ .

7.  $y' + 3y \operatorname{tg} x = \sin x$ .

8.  $x^2 y' + xy = 2 \ln x + 1$ .

9.  $xy' - 2y = xe^{\frac{1}{x}}$ .

10.  $y' + \frac{2e^{2x}y}{1+e^{2x}} = e^{-2x}$ .

**Завдання 6.** Розв'язати задачу Коші.

1.  $2xy' - 3y = -(12 + 20x^2)y^3, \quad y(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ .

2.  $3xy' + 5y = (4x - 5)y^4, \quad y(1) = 1$ .

3.  $2(y' + xy) = (x - 1)e^x y^2, \quad y(0) = 2$ .

4.  $y' + \frac{4x^3 y}{x^4 + 1} = y^2(x^4 + 1) \sin 2x, \quad y(0) = 1$ .

5.  $2y' \sin x + y \cos x = (\cos x - \sin x)y^3, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ .

6.  $y' = y \operatorname{ctg} x + \frac{y^3}{\sin x}, \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

7.  $y' + 4x^3 y = 4(x^3 + 1)e^{-4x} y^2, \quad y(0) = 1$ .

8.  $y - y' \cos x = (1 - \sin x) \cos x y^2, \quad y(0) = 1$ .

9.  $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}, \quad y(2\pi) = \frac{1}{\pi^2}$ .

10.  $2y' - 3y \cos x = -e^{-2x}(2 + 3 \cos x)y^{-1}, \quad y(0) = 1$ .

**Завдання 7.** Розв'язати рівняння.

1. а)  $y = xy'^2 + y'$ ; б)  $y = xy' + \frac{3}{2y'}$ .      2. а)  $y = xy'^2 + y'^3$ ; б)  $y = xy' - \ln y'$ .

3. а)  $y = x \frac{1+y'^2}{2y'}$ ; б)  $y = xy' - y'^2$ .      4. а)  $y = 2xy' + \frac{1}{y'^2}$ ; б)  $y = xy' + \cos y'$ .

5. а)  $y = 2xy' + \ln y'$ ; б)  $y = xy' - y'^4$ .

6. а)  $y = \frac{1}{2}(xy' + y' \ln y')$ ; б)  $y = xy' - 3y'^3$ .

7. а)  $y = x(1 + y') + y'^2$ ; б)  $y = xy' + y' + \sqrt{y'}$ .

8. а)  $y = 2xy' + y'^2$ ; б)  $y = xy' - \frac{1}{y'}$ .      9. а)  $y = xy'^2 - \frac{1}{y'}$ ; б)  $y = xy' - e^{y'}$ .

10. а)  $y = 2xy' - \sqrt{1 + y'^2}$ ; б)  $y = xy' + \frac{1}{y'^2}$ .

**Завдання 8.** Розв'язати рівняння.

1.  $y'' = -\frac{2x}{(x^2 + 3)^2}$ .

2.  $y'' = \frac{1}{2x + 5}$ .

3.  $y'' = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 - 4)^3}}$ .

4.  $y'' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ .

5.  $y'' = \frac{3}{x^2 + 4}$ .

6.  $y'' = \frac{2 \cos x}{\sin^3 x}$ .

7.  $y'' = \frac{x}{\sqrt{(4 - x^2)^3}}$ .

8.  $y'' = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$ .

9.  $y'' = \frac{\operatorname{tg} 2x}{\cos^2 2x}$ .

10.  $y'' = \frac{x}{4 + x^2}$ .

**Завдання 9.** Розв'язати задачу Коші.

1.  $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 2x^3$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

2.  $xy'' \ln x = y'$ ,  $y(e) = 0$ ,  $y'(e) = 1$ .      3.  $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .

4.  $(1 + \sin x)y'' = y' \cos x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2.$

5.  $y'' = 2(y' - 1)\operatorname{tg}x, \quad y(0) = 3, y'(0) = 2.$

6.  $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}, \quad y(1) = 0, y'(1) = 1.$

7.  $xy'' - y' = x^2 e^x, \quad y(1) = 0, y'(1) = e.$

8.  $y''(1 + \cos x) + y' \sin x = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2.$

9.  $2xy'y'' = (y')^2 + 1, \quad y(2) = \frac{2}{3}, y'(2) = 1.$

10.  $y'' + 2x(y')^2 = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$

**Завдання 10.** Розв'язати задачу Коші.

1.  $y'' + 50 \sin y \cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 5.$

2.  $y y'' - (y')^2 = 3y', \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$

3.  $y y'' = 4 - (y')^2, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$

4.  $y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}, y'(0) = 1.$

5.  $y'' = 50 \sin^3 y \cos y, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}, y'(1) = 5.$

6.  $yy'' = (y')^2 + y, \quad y(0) = 1, y'(0) = \sqrt{2}.$

7.  $y y'' = y^2 y' + (y')^2, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$

8.  $2(y')^2 = (y - 1)y'', \quad y(0) = 2, y'(0) = 1.$

9.  $y y'' - y y' \ln y = (y')^2, \quad y(1) = e, y'(1) = e.$

10.  $y y'' = y^2 y' + (y')^2, \quad y(1) = 2, y'(1) = 4.$

## КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 2

### МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ

- Рекомендується (скориставшись одним або двома з наведених нижче джерел)
- вивчити теоретичні положення за [1], гл. X, §§ 3, 4; [4], гл. XXII, §§ 11 – 13; [5], гл. 8, §§ 3, 4, 6; [6], гл. 1, §§ 5.3 – 5.13, 6; [7], гл. XXIII, §§ 20 – 25, 29 – 31; [8], гл. X, §§ 49.3 – 49.5, 50, 51.1 – 51.3, 52; [11], гл. 15, §§ 3, 4;
  - розібрати розв’язання задач у [2], гл. 2, § 2, гл. 3, §§ 3, 4, гл. 4, §§ 3, 4; [3], гл. IV, §§ 3, 5; [9], гл. 2, §§ 13, 14, гл. 4; [10], гл. 1, §§ 2, 3;
  - самостійно розв’язати задачі: [3], №№ 685, 686, 696, 697, 698, 703, 704, 721, 723, 725, 743, 744, 764, 766, 778, 779, 781, 797; [12], №№ 4246, 4251 – 4253, 4262, 4264, 4268, 4270, 4272, 4275 (1-5), 4283, 4285, 4287, 4324.1, 4324.2, 4326, 4337; [13], гл. 8, №№ 246-а, 246-б, 270 – 273, 291, 308 – 310, 315, 322, 339, 345, 350, 373, 376, 378, 395, 396, 405, 406; [14], №№ 2.7.4, 6, 19, 26, 34, 38 – 40, 44, 45, 49, 58, 61, 78, 79, 81, 86, 87, 2.8.4, 5, 7, 8; [15], №№ 2184 – 2186, 2213 – 2215, 2230, 2233, 2276, 2279; [16], гл. 14, №№ 84 – 87, 98, 100, 104, 208, 214, 217.

#### **Приклад 3.2.1.** Розв’язати рівняння

- а)  $y'' + 3y' - 4y = 0$ ;      б)  $y'' - 16y' + 64y = 0$ ;      в)  $y'' - 6y' + 25y = 0$ .

*Розв’язання.*

- а) Маємо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Складемо характеристичне рівняння  $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$ . Його корені  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -4$  дійсні і не дорівнюють один одному. Відповідно до цього фундаментальну систему розв’язків утворюють функції  $y_1(x) = e^x$  й  $y_2(x) = e^{-4x}$ , а загальний розв’язок рівняння має вигляд  $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}$ , де  $C_1$  й  $C_2$  – довільні сталі;
- б) Складемо характеристичне рівняння  $\lambda^2 - 16\lambda + 64 = 0$ . Його корені  $\lambda_1 = 8 = \lambda_2$  дійсні і дорівнюють один одному. Отже, фундаментальну систему розв’язків утворюють функції  $y_1(x) = e^{8x}$  й  $y_2(x) = x e^{8x}$ , а загальний розв’язок рівняння має вигляд  $y(x) = e^{8x}(C_1 + C_2 x)$ ;

в) Складемо характеристичне рівняння  $\lambda^2 - 6\lambda + 25 = 0$ . Його корені  $\lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 25} = 3 \pm 4i$  комплексні спряжені. Отже, фундаментальну систему розв'язків утворюють функції  $y_1(x) = e^{3x} \cos 4x$  й  $y_2(x) = e^{3x} \sin 4x$ , а загальний розв'язок рівняння має вигляд  $y(x) = e^{3x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$ .

**Приклад 3.2.2.** Розв'язати задачу Коші

$$y'' + 12y' + 45y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 3.$$

*Розв'язання.* Складемо характеристичне рівняння  $\lambda^2 + 12\lambda + 45 = 0$ . Його корені  $\lambda_{1,2} = -6 \pm \sqrt{36 - 45} = -6 \pm 3i$  комплексні спряжені. Отже, фундаментальну систему розв'язків утворюють функції  $y_1(x) = e^{-6x} \cos 3x$  й  $y_2(x) = e^{-6x} \sin 3x$ , а загальний розв'язок рівняння має вигляд  $y(x) = e^{-6x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$ . Тоді

$$y'(x) = -6e^{-6x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + e^{-6x} (-3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x).$$

Знайдемо розв'язок задачі Коші, для чого обчислимо значення  $C_1^*$  й  $C_2^*$  з початкових умов:  $y(0) = 5 \Rightarrow e^0 (C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) = 5$ ,

$$y'(0) = 3 \Rightarrow -6e^0 (C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) + 3e^0 (-C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0) = 3.$$

Отже,  $C_1^* = 5$ ,  $C_2^* = 11$  і розв'язок задачі Коші має вигляд

$$\tilde{y}(x) = e^{-6x} (5 \cos 3x + 11 \sin 3x).$$

**Приклад 3.2.3.** Розв'язати рівняння  $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$ .

*Розв'язання.* Маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною  $f(x) = e^{-2x} \ln x$ , яка неперервна на  $(0, +\infty)$ . Як відомо, загальний розв'язок такого рівняння має вигляд  $y(x) = y_{одн}(x) + y^*(x)$ , де  $y_{одн}(x)$  – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, а  $y^*(x)$  – будь-який частинний розв'язок вихідного рівняння.

1) Знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння  $y'' + 4y' + 4y = 0$ : оскільки характеристичне рівняння  $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$  має корені  $\lambda_{1,2} = -2$ , то



фундаментальну систему розв'язків утворюють функції  $y_1(x) = e^{-2x}$  й  $y_2(x) = xe^{-2x}$ , а загальний розв'язок рівняння має вигляд  $y_{одн}(x) = e^{-2x}(C_1 + C_2x)$ .

2) Частинний розв'язок знайдемо методом варіації довільних сталих (методом Лагранжа), згідно з яким  $y^*(x)$  подається у вигляді  $y^*(x) = D_1(x)y_1(x) + D_2(x)y_2(x)$ . Невідомі функції  $D_1(x)$  й  $D_2(x)$  повинні

задовольняти системі рівнянь  $\begin{cases} D_1'(x)y_1(x) + D_2'(x)y_2(x) = 0 \\ D_1'(x)y_1'(x) + D_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$ , лінійних

відносно  $D_1'(x)$  й  $D_2'(x)$ . Оскільки головний визначник цієї системи

$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$  являє собою визначник Вронського, який відмінний від

нуля в даному випадку на  $(0, +\infty)$ , то система сумісна і має єдиний розв'язок, який знаходиться за правилом Крамера

$$D_1'(x) = -\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}, \quad D_2'(x) = \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}.$$

Після інтегрування отримуємо

$$D_1(x) = -\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)} dx, \quad D_2(x) = \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)} dx.$$

Отже,

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & e^{-2x}(1-2x) \end{vmatrix} = e^{-4x},$$

$$D_1(x) = -\int \frac{xe^{-2x}e^{-2x} \ln x}{e^{-4x}} dx = -\int x \ln x dx = -\frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4},$$

$$D_2(x) = \int \frac{e^{-2x}e^{-2x} \ln x}{e^{-4x}} dx = \int \ln x dx = x \ln x - x$$

(тут під символом інтеграла розуміємо первісну). Таким чином, частинний розв'язок має вигляд

$$y^*(x) = \left( -\frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} \right) e^{-2x} + (x \ln x - x) xe^{-2x} = \left( \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{3}{4}x^2 \right) e^{-2x},$$

а загальний розв'язок є  $y(x) = \left( C_1 + C_2x + \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{3}{4}x^2 \right) e^{-2x}$ .

**Приклад 3.2.4.** Вказати вигляд (без відшукування коефіцієнтів) частинного розв'язку рівняння.

- а)  $y'' - y' = x^2 + 3x + 10$ ;                      б)  $y'' + 6y' + 9y = (x^2 - x - 5)e^{-3x}$ ;  
 в)  $y'' + 9y = (x^3 - 3)\cos 3x$ ;                      г)  $y'' - 8y' + 15y = 3\cos x - 5\sin x$ ;  
 д)  $y'' - 8y' + 16y = (2x + 1)e^{4x} \sin 2x$ ;    е)  $y'' - 2y' + 2y = e^x(x^2 \cos x + 2\sin x)$ .

*Розв'язання.* В усіх випадках маємо лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами й правими частинами так званого “спеціального” вигляду  $f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos \beta x + Q_n(x)\sin \beta x]$ , де  $P_m(x)$  і  $Q_n(x)$  – многочлени степенів  $m$  й  $n$  відповідно. Тоді частинний розв'язок рівняння *підбирається* у вигляді  $y^*(x) = x^k e^{\alpha x}[R_s(x)\cos \beta x + T_s(x)\sin \beta x]$ , де  $k$  – кратність контрольного числа правої частини  $\sigma = \alpha + \beta i$  серед коренів характеристичного рівняння, а  $R_s(x)$  і  $T_s(x)$  – многочлени *одного й того ж самого* степеня  $s = \max\{m, n\}$  з невизначеними коефіцієнтами. У таблиці наведені вигляди частинного розв'язку в залежності від правої частини (число  $k$  залежить також від лівої частини рівняння, а саме, від коренів характеристичного рівняння, і тому визначається окремо).

№	$f(x)$	$\sigma$	$s$	$y^*$
1.	$P_m(x)$	0	$m$	$x^k R_m(x)$
2.	$e^{\alpha x} P_m(x)$	$\alpha$	$m$	$x^k e^{\alpha x} R_m(x)$
3.	$P_m(x)\cos \beta x$	$\beta i$	$m$	$x^k [R_m(x)\cos \beta x + T_m(x)\sin \beta x]$
4.	$Q_n(x)\sin \beta x$	$\beta i$	$n$	$x^k [R_n(x)\cos \beta x + T_n(x)\sin \beta x]$
5.	$P_m(x)\cos \beta x + Q_n(x)\sin \beta x$	$\beta i$	$\max\{m, n\}$	$x^k [R_s(x)\cos \beta x + T_s(x)\sin \beta x]$
6.	$e^{\alpha x} P_m(x)\cos \beta x$	$\alpha + \beta i$	$m$	$x^k e^{\alpha x} [R_m(x)\cos \beta x + T_m(x)\sin \beta x]$
7.	$e^{\alpha x} Q_n(x)\sin \beta x$	$\alpha + \beta i$	$n$	$x^k e^{\alpha x} [R_n(x)\cos \beta x + T_n(x)\sin \beta x]$
8.	$e^{\alpha x} [P_m(x)\cos \beta x + Q_n(x)\sin \beta x]$	$\alpha + \beta i$	$\max\{m, n\}$	$x^k e^{\alpha x} [R_s(x)\cos \beta x + T_s(x)\sin \beta x]$

- а) Корені характеристичного рівняння  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ . Судячи з правої частини, маємо випадок 1 (див. таблицю), де  $f(x) = P_2(x) = x^2 + 3x + 10$ , тобто  $m = 2$ . Оскільки  $\sigma = 0$ , то  $k = 1; s = m = 2$ . Отже,  $y^* = x(Ax^2 + Bx + C)$ ;
- б) Корені характеристичного рівняння  $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ . Судячи з правої частини, маємо випадок 2 (див. таблицю), де  $f(x) = (x^2 - x - 5)e^{-3x}$ , тобто  $m = 2$ . Оскільки  $\alpha = -3, \beta = 0$ , то  $\sigma = -3$ , а  $k = 2; s = m = 2$ . Отже,  $y^* = x^2 e^{-3x}(Ax^2 + Bx + C)$ ;
- в) Корені характеристичного рівняння  $\lambda_{1,2} = \pm 3i$ . Судячи з правої частини, маємо випадок 3 (див. таблицю), де  $f(x) = (x^3 - 3)\cos 3x$ , тобто  $m = 3$ . Оскільки  $\alpha = 0, \beta = 3$ , то  $\sigma = 3i$ , а  $k = 1; s = m = 3$ . Отже,  $y^* = x[(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\cos 3x + (Ex^3 + Fx^2 + Gx + H)\sin 3x]$ ;
- г) Корені характеристичного рівняння  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 5$ . Судячи з правої частини, маємо випадок 5 (див. таблицю), де  $f(x) = 3\cos x - 5\sin x$ , тобто  $m = n = 0$ . Оскільки  $\alpha = 0, \beta = 1$ , то  $\sigma = i$ , а  $k = 0; s = 0$ . Отже,  $y^* = A\cos x + B\sin x$ ;
- д) Корені характеристичного рівняння  $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ . Судячи з правої частини, маємо випадок 7 (див. таблицю), де  $f(x) = (2x + 1)e^{4x}\sin 2x$ , тобто  $n = 1$ . Оскільки  $\alpha = 4, \beta = 2$ , то  $\sigma = 4 + 2i$ , а  $k = 0; s = n = 1$ . Отже,  $y^* = e^{4x}[(Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x]$ ;
- е) Корені характеристичного рівняння  $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ . Судячи з правої частини, маємо випадок 8 (див. таблицю), де  $f(x) = e^x(x^2 \cos x + 2\sin x)$ , тобто  $m = 2, n = 0$ . Оскільки  $\alpha = 1, \beta = 1$ , то  $\sigma = 1 + i$ , а  $k = 1; s = \max\{2, 0\} = 2$ . Отже,  $y^* = xe^x[(Ax^2 + Bx + C)\cos x + (Dx^2 + Ex + F)\sin x]$ .

**Приклад 3.2.5.** Розв'язати задачу Коші  $y'' + 4y = \sin 2x, y(0) = y'(0) = 0$ .

*Розв'язання.* Маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною “спеціального” вигляду  $f(x) = \sin 2x$ . Загальний розв'язок рівняння має вигляд  $y(x) = y_{одн}(x) + y^*(x)$ , де  $y_{одн}(x)$  – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, а  $y^*(x)$  – будь-який частинний розв'язок вихідного рівняння.

1) Знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння  $y'' + 4y = 0$ : оскільки характеристичне рівняння  $\lambda^2 + 4 = 0$  має корені  $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ , то загальний розв'язок рівняння має вигляд  $y_{одн}(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ .

2) Судячи з правої частини, маємо випадок 4 (див. таблицю), де  $f(x) = \sin 2x$ , тобто  $m = n = 0$ . Оскільки  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 2$ , то  $\sigma = 2i$ , а  $k = 1$ ;  $s = 0$ . Отже, частинний розв'язок підбираємо у вигляді  $y^* = x(A \cos 2x + B \sin 2x)$ . Знайдемо коефіцієнти  $A$  й  $B$ , для чого підставимо  $y^{* \prime}$  та  $y^{* \prime \prime}$  у рівняння. Оскільки

$$y^{* \prime} = A \cos 2x + B \sin 2x + x(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) = (A + 2Bx) \cos 2x + (B - 2Ax) \sin 2x,$$

$$y^{* \prime \prime} = 2B \cos 2x - 2(A + 2Bx) \sin 2x - 2A \sin 2x + 2(B - 2Ax) \cos 2x = 4[(B - Ax) \cos 2x - (A + Bx) \sin 2x],$$

то отримуємо рівність

$$4[(B - Ax) \cos 2x - (A + Bx) \sin 2x] + 4x(A \cos 2x + B \sin 2x) = \sin 2x$$

або  $4B \cos 2x - 4A \sin 2x = \sin 2x$ . Прирівняємо коефіцієнти при  $\cos 2x$  та

$\sin 2x$  в обох частинах рівності: 
$$\begin{array}{l|l} \cos 2x & 4B = 0 \\ \sin 2x & -4A = 1 \end{array}$$
, звідки  $A = -\frac{1}{4}$ ,  $B = 0$ . Отже,

частинний розв'язок має вигляд  $y^* = -\frac{x}{4} \cos 2x$ , а загальний розв'язок є

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{x}{4} \cos 2x.$$

3) Знайдемо розв'язок задачі Коші, для чого обчислимо значення  $C_1^*$  й  $C_2^*$  з початкових умов:  $y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ ;

$$y'(x) = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x - \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x, \quad y'(0) = 0 \Rightarrow 2C_2 - \frac{1}{4} = 0.$$

Отже,  $C_1^* = 0$ ,  $C_2^* = \frac{1}{8}$  і шуканий розв'язок задачі Коші має вигляд

$$\tilde{y}(x) = \frac{1}{8} \sin 2x - \frac{x}{4} \cos 2x.$$

**Приклад 3.2.6.** Методом послідовного виключення невідомих розв'язати

$$\text{систему рівнянь } \begin{cases} y' = y - z \\ z' = y + z + e^x \end{cases}$$

*Розв'язання.* Маємо лінійну неоднорідну систему двох диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. З першого рівняння системи знаходимо  $z = y - y'$  (\*), отже,  $z' = y' - y''$  (\*\*). Підставивши у друге рівняння системи замість  $z$  та  $z'$  праві частини (\*) та (\*\*), отримаємо рівняння

$y' - y'' = y + y - y' + e^x$  або  $y'' - 2y' + 2y = -e^x$  – неоднорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку з правою частиною спеціального вигляду. Розв'язавши це рівняння (див. попередній приклад), отримаємо  $y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x - 1)$ . Знайдемо тепер

$$y' = e^x [(C_1 + C_2) \cos x + (C_2 - C_1) \sin x - 1]$$

і підставимо цей вираз в (\*) разом із виразом для  $y$ . Будемо мати  $z = e^x (C_1 \sin x - C_2 \cos x)$ . Отже, загальний розв'язок заданої системи складають функції  $y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x - 1)$ ,  $z = e^x (C_1 \sin x - C_2 \cos x)$ .

**Приклад 3.2.7.** Систему рівнянь  $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y \\ \dot{y} = -x + 5y \end{cases}$  розв'язати

а) методом послідовного виключення невідомих; б) методом Ейлера. Знайти фазові траєкторії даної автономної динамічної системи, що проходять через точку  $M_0(1; 2)$ .

*Розв'язання.* Маємо лінійну однорідну систему двох диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

а) З першого рівняння системи знаходимо  $y = \frac{1}{3}(\dot{x} - x)$  (\*), отже,

$\dot{y} = \frac{1}{3}(\ddot{x} - \dot{x})$  (\*\*). Підставивши у друге рівняння системи замість  $x$  та  $\dot{x}$  праві

частини (\*) та (\*\*), отримаємо рівняння  $\frac{1}{3}(\ddot{x} - \dot{x}) = -x + \frac{5}{3}(\dot{x} - x)$  або

$\ddot{x} - 6\dot{x} + 8x = 0$ . Його розв'язок має вигляд  $x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t}$ . Знайдемо тепер

$\dot{x} = 2C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{4t}$  і підставимо цей вираз в (\*) разом із виразом для  $x$ .

Будемо мати  $y = \frac{1}{3}C_1e^{2t} + C_2e^{4t}$ . Отже, загальний розв'язок заданої системи

складають функції  $x = C_1e^{2t} + C_2e^{4t}$ ,  $y = \frac{1}{3}C_1e^{2t} + C_2e^{4t}$ . Після перепозначення

довільної сталої  $\frac{C_1}{3} \rightarrow C_1$  остаточно будемо мати  $x = 3C_1e^{2t} + C_2e^{4t}$ ,

$$y = C_1e^{2t} + C_2e^{4t};$$

б) Запишемо систему у вигляді матричного рівняння  $\dot{Z} = AZ$ , де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{Z} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок системи має вигляд  $Z = C_1Z_1 + C_2Z_2$ , де частинні розв'язки  $Z_1 = \begin{pmatrix} z_{11}(t) \\ z_{21}(t) \end{pmatrix}$  й  $Z_2 = \begin{pmatrix} z_{12}(t) \\ z_{22}(t) \end{pmatrix}$

утворюють фундаментальну систему розв'язків.

Розв'язок системи будемо шукати у вигляді  $Z = \begin{pmatrix} \omega_1 e^{\lambda t} \\ \omega_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \Omega e^{\lambda t}$ , де

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}, \quad \omega_1, \omega_2 \text{ і } \lambda - \text{ сталі. Підставивши } Z \text{ в систему і скоротивши на } e^{\lambda t},$$

отримаємо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно  $\omega_1, \omega_2$  і  $\lambda$   $(A - \lambda E)\Omega = 0$  (тут  $E$  – одинична матриця  $2 \times 2$ ) або

$$\begin{cases} (1 - \lambda)\omega_1 + 3\omega_2 = 0 \\ -\omega_1 + (5 - \lambda)\omega_2 = 0 \end{cases} (*).$$

Як відомо, така система має ненульовий розв'язок (а саме, нескінченну кількість таких розв'язків) тоді і тільки тоді, коли її

головний визначник  $\Delta = |A - \lambda E|$  дорівнює нулю, тобто  $\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ -1 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0$ .

Це рівняння називається *характеристичним*. Його корені називаються *власними числами* матриці  $A$ . В даному випадку  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 4$ , тобто власні

числа *дійсні і різні*. Розв'язки системи (\*)  $\Omega^{(\lambda_1)} = \begin{pmatrix} \omega_1^{(\lambda_1)} \\ \omega_2^{(\lambda_1)} \end{pmatrix}$ ,  $\Omega^{(\lambda_2)} = \begin{pmatrix} \omega_1^{(\lambda_2)} \\ \omega_2^{(\lambda_2)} \end{pmatrix}$  що

відповідають кожному з власних чисел, називаються *власними векторами* матриці  $A$ . Послідовно підставляючи у (\*) замість  $\lambda$  числа  $\lambda_1$  й  $\lambda_2$  і розв'язуючи систему, отримаємо

1) для власного числа  $\lambda_1 = 2$  система (\*) має вигляд 
$$\begin{cases} (1-2)\omega_1 + 3\omega_2 = 0 \\ -\omega_1 + (5-2)\omega_2 = 0 \end{cases}$$

тобто складається з двох однакових рівнянь  $-\omega_1 + 3\omega_2 = 0$ . Отже, система має нескінченну кількість розв'язків  $\omega_1 = 3\omega_2$ , де  $\omega_2$  – довільна константа. Нехай, наприклад,  $\omega_2 = 1$ , тоді  $\omega_1 = 3$  і відповідний власний вектор є  $\Omega^{(\lambda_1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;

2) для власного числа  $\lambda_1 = 4$  система (\*) має вигляд 
$$\begin{cases} (1-4)\omega_1 + 3\omega_2 = 0 \\ -\omega_1 + (5-4)\omega_2 = 0 \end{cases}$$

тобто складається з двох однакових рівнянь  $-\omega_1 + \omega_2 = 0$ . Отже, система має нескінченну кількість розв'язків  $\omega_1 = \omega_2$ , де  $\omega_2$  – довільна константа. Нехай, наприклад,  $\omega_2 = 1$ , тоді  $\omega_1 = 1$  і відповідний власний вектор є  $\Omega^{(\lambda_2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Отже, фундаментальну систему розв'язків складають вектори

$$Z_1 = \Omega^{(\lambda_1)} e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad Z_2 = \Omega^{(\lambda_2)} e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}.$$

а загальний розв'язок системи має вигляд

$$Z = C_1 Z_1 + C_2 Z_2 = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} = \begin{pmatrix} 3C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} \\ C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Оскільки задана динамічна система є однорідною, то вона є *автономною* (*стаціонарною*) (час  $t$  не входить явно у праві частини рівнянь системи). Динамічна система визначає поле швидкостей точки, що рухається в площині, в будь-який момент часу  $t$ , а розв'язок  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  системи являє собою рівняння руху точки: вони визначають положення точки в будь-який момент часу  $t$ . Крім того, рівняння руху є параметричними рівняннями деякої кривої на площині – траєкторії руху точки (*фазова траєкторія* системи). Загальний розв'язок  $x = x(t, C_1, C_2)$ ,  $y = y(t, C_1, C_2)$  системи визначає в параметричному вигляді множину її фазових траєкторій. Після виключення параметра приходимо до рівняння  $\varphi(x, y, C) = 0$ . Через точку  $M_0(x_0; y_0)$  може проходити одна чи декілька траєкторій  $\varphi(x, y, C^*) = 0$  або не проходити

жодної траєкторії (значення  $C = C^*$  визначається з рівняння  $\varphi(x_0, y_0, C) = 0$ ).

Виключимо параметр  $t$  з рівнянь  $x = 3C_1e^{2t} + C_2e^{4t}$ ,  $y = C_1e^{2t} + C_2e^{4t}$ :

$$x - y = 2C_1e^{2t} \Rightarrow e^{2t} = \frac{x - y}{2C_1} \Rightarrow x = 3C_1 \frac{x - y}{2C_1} + C_2 \left( \frac{x - y}{2C_1} \right)^2,$$

тобто множина фазових траєкторій системи визначається рівнянням  $C(x - y)^2 - 3y + x = 0$ , де  $C = \frac{C_2}{2C_1^2}$ . Через задану точку  $M_0(1; 2)$  проходить

траєкторія  $5(x - y)^2 - 3y + x = 0$ . Вона показана на рис. 3.2.1.

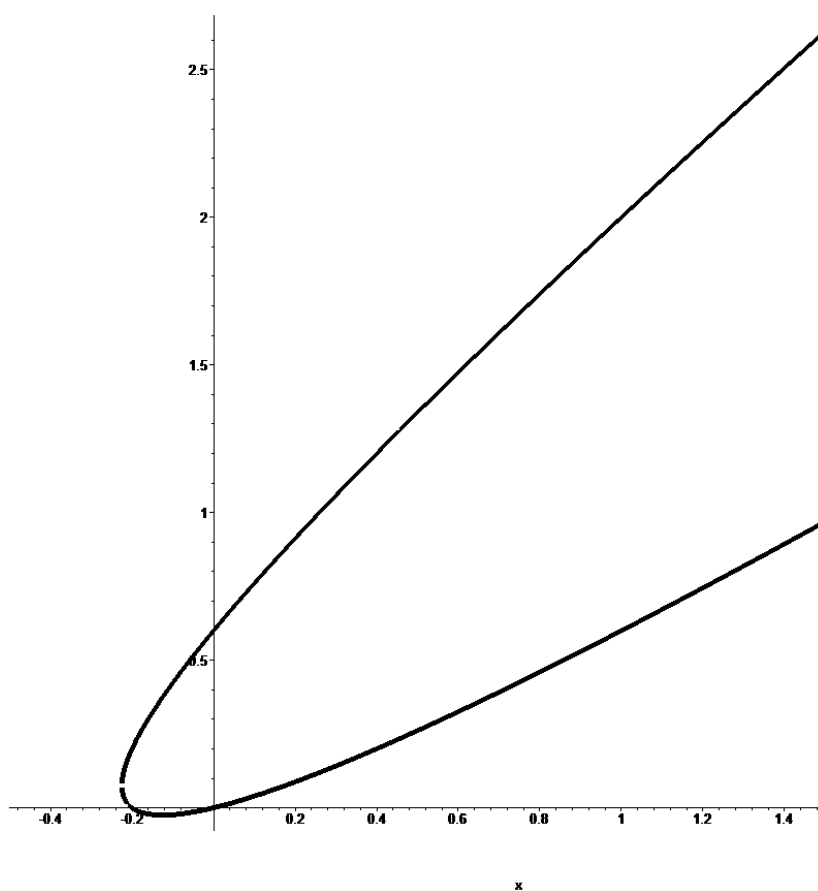


Рис. 3.2.1

*Зауваження.* Через інші точки можуть проходити інші траєкторії або взагалі не проходити жодної траєкторії. Неважко бачити, що в даному разі усі можливі траєкторії проходять через початок координат  $O(0; 0)$ , через, наприклад, точку  $M_0(3; 1)$  проходить пряма  $y = x/3$ , а через точку  $M_0(1; 1)$  (як і через усі точки прямої  $y = x$ , за виключенням початку координат) не проходить жодної траєкторії.



## ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

**Завдання 1.** Розв'язати рівняння.

- a)  $y'' + 4y = 0$ ;                      б)  $y'' - 10y' + 25y = 0$ .
- a)  $y'' - y' - 2y = 0$ ;                    б)  $y'' + 9y = 0$ .
- a)  $y'' - 2y' + 10y = 0$ ;                б)  $y'' + y' - 2y = 0$ .
- a)  $y'' - 4y = 0$ ;                        б)  $y'' + 2y' + 17y = 0$ .
- a)  $4y'' - 8y' + 3y = 0$ ;                б)  $y'' - 3y' = 0$ .
- a)  $2y'' + 3y' + y = 0$ ;                б)  $y'' + 4y' + 8y = 0$ .
- a)  $y'' - 3y' = 0$ ;                        б)  $y'' - 7y' - 8y = 0$ .
- a)  $y'' + 25y' = 0$ ;                      б)  $y'' - 10y' + 16y = 0$ .
- a)  $y'' + 6y' + 10y = 0$ ;                б)  $y'' - 4y' + 4y = 0$ .
- a)  $9y'' - 6y' + y = 0$ ;                б)  $y'' + 12y' + 37y = 0$ .

**Завдання 2.** Розв'язати задачу Коші.

- $y'' + 3y' + 2y = 0$ ,  $y(0) = 5$ ,  $y'(0) = -2$ .
- $y'' + 4y' + 4y = 0$ ,  $y(0) = -3$ ,  $y'(0) = 4$ .
- $y'' - 2y' = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 5$ .
- $y'' - y' - 12y = 0$ ,  $y(0) = -4$ ,  $y'(0) = 3$ .
- $y'' - 2y' + 10y = 0$ ,  $y(0) = 4$ ,  $y'(0) = -4$ .
- $y'' - 6y' + 9y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -4$ .
- $y'' + 4y' + 13y = 0$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = 2$ .
- $y'' - 8y' + 16y = 0$ ,  $y(0) = -5$ ,  $y'(0) = 1$ .
- $y'' - 5y' + 4y = 0$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = -5$ .
- $y'' - 2y' = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -4$ .

**Завдання 3.** Розв'язати рівняння.

1.  $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}$ .

2.  $y'' - 2y' + y = 4e^x \sqrt{x - 5}$ .

$$3. y'' + 2y' = \frac{e^{-4x}}{\sqrt{3 - 7e^{-4x}}}.$$

$$4. y'' - y' = e^{2x} \cos e^x.$$

$$5. y'' + y' = \frac{e^{-2x}}{3 - 2e^{-2x}}.$$

$$6. y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1}.$$

$$7. y'' - 2y' = \frac{e^{4x}}{\sqrt{5e^{4x} + 2}}.$$

$$8. y'' - y' = \frac{e^{4x}}{3e^{4x} - 1}.$$

$$9. y'' + 2y' + 2y = \frac{e^{-x}}{\sin^2 x}.$$

$$10. y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x^4}.$$

**Завдання 4.** Вказати вигляд частинного розв'язку рівняння (без відшукування коефіцієнтів) для наведених варіантів правої частини.

$$1. 2y'' - 7y' + 3y = f(x),$$

$$a) f(x) = xe^{3x};$$

$$б) f(x) = \sin 3x.$$

$$2. 2y'' + y' - y = f(x),$$

$$a) f(x) = (x^2 - 5)e^{-x};$$

$$б) f(x) = x \sin x.$$

$$3. y'' + 49y = f(x),$$

$$a) f(x) = x^3 + 4x;$$

$$б) f(x) = 3 \sin 7x.$$

$$4. 3y'' + 10y' + 3y = f(x),$$

$$a) f(x) = e^{-3x};$$

$$б) f(x) = 2 \cos 3x - \sin 3x.$$

$$5. y'' + 3y' - 4y = f(x),$$

$$a) f(x) = 3xe^{-4x};$$

$$б) f(x) = x \sin x.$$

$$6. 4y'' - 5y' + y = f(x),$$

$$a) f(x) = (4x + 2)e^x;$$

$$б) f(x) = e^x \sin 3x.$$

$$7. y'' - 4y' = f(x),$$

$$a) f(x) = (x - 2)e^{4x};$$

$$б) f(x) = 3 \cos 4x.$$

$$8. 5y'' - 6y' + y = f(x),$$

$$a) f(x) = x^2 e^x;$$

$$б) f(x) = \cos x - \sin x.$$

$$9. y'' - 7y' + 12y = f(x),$$

$$a) f(x) = x^3 e^{3x};$$

$$б) f(x) = 3x \sin 2x.$$

$$10. y'' + 3y' - 4y = f(x),$$

$$a) f(x) = 6xe^{-x};$$

$$б) f(x) = x^2 \sin 2x.$$

**Завдання 5.** Розв'язати рівняння.

$$1. a) y'' - 2y' + 5y = 10 \cos 2x;$$

$$б) y'' - 2y' = (4x + 4)e^{2x}.$$

$$2. a) y'' - 2y' - 8y = 12 \sin 2x;$$

$$б) y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x}.$$

$$3. a) y'' - 3y' + 2y = (34 - 12x)e^{-x};$$

$$б) y'' - 6y' + 34y = 18 \cos 5x.$$

$$4. a) y'' - 6y' + 10y = 51e^{-x};$$

$$б) y'' - 4y' = 8 - 16x.$$



$$3. \quad \text{a) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 9y \\ \frac{dy}{dt} = x + 8y \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} y' = -2y + z - e^{2x} \\ z' = -3y + 2z + 6e^{2x} \end{cases}$$

$$4. \quad \text{a) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = -4x - 4y \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} y' = 5y + 4z + e^x \\ z' = 4y + 5z + 1 \end{cases}$$

$$5. \quad \text{a) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 3y \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} y' = 2y + 4z + \cos x \\ z' = -y - 2z + \sin x \end{cases}$$

$$6. \quad \text{a) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = -3x + 2y \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} y' = 2y - z + 2e^x \\ z' = 3y - 2z + 4e^x \end{cases}$$

$$7. \quad \text{a) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y \\ \frac{dy}{dt} = 8x + y \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} y' = y + z - \cos x \\ z' = -2y - z + \sin x + \cos x \end{cases}$$

$$8. \quad \text{a) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = -5x - 3y \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} y' = 2y + 6z \\ z' = 4y - 3z + \sin 5x \end{cases}$$

$$9. \quad \text{a) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 2y \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} y' = 2y + 7z + e^{4x} \\ z' = 2y - 3z \end{cases}$$

$$10. \quad \text{a) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x - 6y \\ \frac{dy}{dt} = -4x - 2y \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} y' = y + z - \cos 8x \\ z' = 21y + 5z + \sin 8x \end{cases}$$

**Завдання 8.** Розв'язати систему рівнянь методом Ейлера.

$$1. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x - y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 5y \\ \frac{dy}{dt} = -7x - 3y \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -7x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 8y \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x - 8y \\ \frac{dy}{dt} = -3x - 3y \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 6y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 2y \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x - 4y \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 3y \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = -8x - 5y \end{cases}$$

## **ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ, ЇЇ ПОДАННЯ І ПЕРЕВІРКА**

Номер варіанта контрольної роботи, що виконується, повинен співпадати з останньою цифрою номера залікової книжки. Цифра 0 визначає варіант 10. З кожного завдання контрольної роботи вибирається задача з відповідним номером. Виконана контрольна робота переписується в окремий зошит. Розв'язки задач наводяться зі збереженням номерів задач, у порядку зростання цих номерів. Перед розв'язком кожної задачі треба повністю вписати її умову. На обкладинку зошита слід наклеїти заповнений реєстраційний бланк (вказати номер контрольної роботи, назву дисципліни, групу і факультет, прізвище, ім'я та по батькові, номер залікової книжки, домашню адресу). Оформлена відповідним чином робота реєструється у деканаті. Її необхідно подати на кафедру вищої математики завчасно, але не пізніше як за 10 днів до початку екзаменаційної сесії. Після перевірки викладач робить висновки про те, вірно чи невірно виконана робота, з відповідним надписом на обкладинці. Якщо робота виконана не повністю або невірно, то викладач вказує номери відсутніх або невірно розв'язаних задач і, якщо необхідно, робить свої зауваження у вигляді короткої рецензії. Роботи з не усіма задачами, або ж з такими, що повністю або частково не відповідають даному варіанту, вважаються виконаними невірно. Студент повинен виправити усі помилки у тому ж зошиті *після* рецензії викладача у розділі "Робота над помилками" і повернути роботу у найкоротший термін. Виправлення у перевіреній роботі поверх позначок викладача не допускаються. Студент може бути допущений до захисту контрольної роботи, порядок якого визначається викладачем, тільки після повторної перевірки виправлених помилок. На екзамен (залік) допускаються тільки студенти з захищеною роботою.