

УДК 539.3

<https://doi.org/10.34185/tpm.6.2018.01>

Ахундов В.М., Наумова І.Ю., Забродська Г.А.

**АНАЛІЗ ДЕФОРМАЦІЙ ЕЛАСТОАРМОВАНОЇ ТРУБИ ПІД
ВПЛИВОМ ВНУТРІШНЬОГО ТИСКУ**

Akhundov V.M., Naumova I.Yu., Zabrodska A.A.

**ANALYSIS OF DEFORMATIONS OF AN ELASTOPROPEDED TUBE
UNDER THE INFLUENCE OF INTERNAL PRESSURE**

Дослідження деформування м'яких композитних структур, коли помітно змінюється їх початкова конфігурація, є однією з проблем механіки композитних матеріалів. В якості однієї з таких структур розглянуто довгу тонкостінну трубу з еластичних шарів з кільцевими волокнами з більш жорсткого еластичного матеріалу. Труби данної будови можуть застосовуватися для створення гнучких газо- і повітропроводів, з метою транспортування речовин в розпиленому вигляді, для збирання екологічно шкідливих відходів виробництва, очищення території від деяких видів забруднень, в тому числі збирання сміття і т.п.

Представлене чисельне рішення по моделі кусково-однорідного середовища задачі про деформацію труби з трьох шарів з кільцевими волокнами квадратного перетину під впливом внутрішнього тиску при великих переміщеннях і деформаціях. Трубу моделювали як збірку кільцевих елементів. Такі елементи являють собою кільця квадратного перетину з сполучного матеріалу, що включають кільцеві волокна в якості їх армуючої серцевини. Приймали розрахункову схему труби як довгої циліндричної оболонки, що осесиметрично деформується при навантаженні тиском, коли центральні і крайні перетини кільцевих елементів переміщуються в площинах свого вихідного положення.

Ключові слова: модель кусково-однорідного середовища, волокна кільцеві, тиск внутрішній, деформації великі, метод кінцевих різниць.

The study of the deformation of soft composite structures, when their initial configuration changes significantly, remains one of the problems of the mechanics of composite materials. As one of these structures, we considered a long thin-walled tube of elastic layers with ring fibers of a more rigid elastic material. Pipes of this structure can be used to create flexible gas and air ducts, in order to transport substances in a spray form, to collect environmentally hazardous waste.

The most common approach in the study of the bodies of a fibrous structure is based on the use of a model of a piecewise-homogeneous medium, when the matrix and fibers are considered as contacting bodies. A numerical solution of the problem according to this model of the deformation of a pipe of three layers with circular fibers of square cross section under the influence of internal pressure during large displacements and deformations is presented. The pipe was modeled as an assembly of ring elements. Such elements are square rings of a binder material, including ring fibers as their reinforcing core. The pipe design was accepted as a long cylindrical shell, which is axisymmetrically deformable under pressure, when the extreme and central sections of the ring elements move in the planes of their initial position.

The boundary problem for assembling the ring elements of the shell was formulated on the basis of the equations of the nonlinear theory of elasticity for the matrix and the fibers in it. The problem was solved using the finite difference method, the first order derivatives of the main quantities with respect to the axial and radial coordinates were approximated using second-order finite-difference relations. The discrete analogue of the problem was solved on the basis of the Newton method procedure. The uniqueness of the solution of the boundary value problem was ensured by the continuation of the pressure solution in the pipe.

Key words: model of a piecewise-homogeneous medium, fibers are annular, internal pressure, large deformations, finite difference method.

ВСТУП

Актуальність теми. Дослідження деформування м'яких композитних структур, коли помітно змінюється їх початкова конфігурація, є однією з проблем механіки композитних матеріалів. В якості однієї з таких структур розглядаємо довгу тонкостінну трубу з еластичних шарів з кільцевими волокнами з більш жорсткого еластичного матеріалу. Труби данної будови можуть застосовуватися для створення гнучких газо- і повітропроводів, з метою транспортування речовин в розпиленому вигляді, для збирання екологічно шкідливих відходів виробництва, очищення території від деяких видів забруднень, в тому числі збирання сміття і т.п. Такі трубопроводи можуть мобільно «розгортатися» за місцем виникнення техногенної ситуації. Перевагою еластокомпозитних труб у порівнянні з жорсткими трубами (шлангами) є їх зручне транспортування, швидке монтування, легка вага і пружна гнучкість. Вибір на користь труб з

еластичного композиту замість однорідних еластичних робимо в силу можливого застосування в них більш високих тисків, ніж в останніх, при збереженні досить високої осьової гнучкості.

Відзначимо монографію [1], де розглядається безмоментна циліндрична оболонка (труба), однонаправлено армована волокнами, на основі використання ефективних модулів її матеріалу. В [2] вивчаються дво- і чотирихшарові циліндричні оболонки з перехресним розташуванням в них волокон. Матеріал кожного з шарів враховується також за допомогою його ефективних модулів. Основний матеріал циліндричної оболонки, армованої по перехресній схемі волокнами що малорозтягуються, розглядається як фізично нелінійний в [3]. В [4, 5] досліджується артерія як циліндрична труба з 2-х шарів при великих деформаціях, в яких армуючими елементами є колагенові волокна. Конкретний вид потенційного закону при нелінійно-пружній поведінці вимагає тільки три

матеріальні константи для кожного з шарів, щоб врахувати спільну реакцію стінки судини на вплив осьового розтягування, тиску і крутіння.

У зазначених роботах задачі про деформацію циліндричних оболонок вирішуються на основі моделювання матеріалу з вихідною будовою як однорідного анізотропного з макроскопічно еквівалентними механічними властивостями. Перевага такого підходу в тому, що для його комп'ютерної реалізації потрібні порівняно невеликі обчислювальні ресурси. Однак на його основі не виявляються внутрішні поля в матриці і волокнах матеріалу, аналіз руйнування матеріалу може бути лише частковим.

Найбільш загальний підхід в дослідженні тіл волокнистої будови ґрунтується на застосуванні моделі кусково-однорідного середовища. У даній моделі матриця і волокна розглядаються як контактно взаємодіючі тіла на основі рівнянь механіки деформування з виявленням внутрішніх полів для композитної структури. В силу обмеженості обчислювальних ресурсів даний підхід можна застосувати лише для порівняно невеликого переліку тіл, в основному однонаправлено армованих. У даній роботі представляємо результати чисельного рішення по моделі кусково-однорідного середовища задачі про роздування труби з трьох шарів з кільцевими волокнами квадратного перетину при великих переміщеннях і деформаціях.

1. Постановка задачі

Досліджували деформування еластичної тонкостінної труби, армованої кільцевими волокнами,

під впливом внутрішнього тиску. Застосовуються волокна квадратного перетину з більш жорсткого матеріалу в порівнянні з матеріалом матриці (зв'язуючого), які розташовуються в матриці за схемою квадратної упаковки. На рис.1 показана конфігурація осьового перерізу труби в недеформованому стані. Труба включає три шари товщиною h з волокнами в них, довжина сторін квадратного перетину яких δ . Внутрішній радіус оболонки $r = a$, зовнішній радіус $r = b = a + 3h$.

Трубу моделювали як збірку кільцевих елементів. Такі елементи являють собою кільця квадратного перетину $h \times h$ з зв'язуючого матеріалу, що включають кільцеві волокна в якості їх армуючої серцевини. Приймали розрахункову схему труби як довгої циліндричної оболонки, що осесиметрично деформована при навантаженні тиском, коли крайні і центральні перетини кільцевих елементів переміщуються в площинах свого вихідного положення. Задачу в силу умов симетрії вирішували для правої половини концентричної збірки з трьох кільцевих елементів, що включає по одному елементу від кожного шару. Такий половинний шар полягає між центральним поперечним перерізом, в якому розташовуються осьові лінії волокон в збірці, і крайньою поверхнею збірки, що є центральним перетином для матричного шару між двома суміжними рядами волокон з концентричних розташуванням (див. також рис. 3, а).

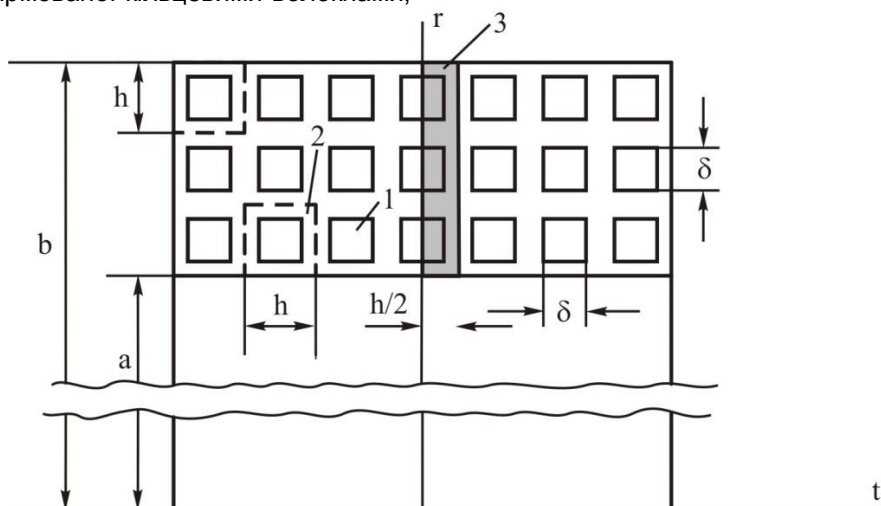


Рисунок 1. Осьовий переріз тришарової труби з кільцевими волокнами в початковому стані: 1 – волокно квадратного перетину, 2 – кільцевий елемент, 3 – половина концентричної збірки кільцевих елементів праворуч від центрального перетину.

Застосовували систему матеріальних циліндричних координат $\hat{\theta}^1, \hat{\theta}^2, \hat{\theta}^3$, які в відліковій конфігурації труби позначаємо як t, φ, r , – осьова, окружна і радіальна координати відповідно. Осьову координату t відраховуємо від центрального поперечного перерізу збірки. Поряд з радіальною координатою r застосовували координату $z = r - a$, що відміряється від внутрішньої по-

верхні труби. Фізичні компоненти векторних і тензорних величин супроводжуємо координатними індексами, укладеними в круглі дужки.

Величини, що відносяться до матриці і волокон, відзначаємо індексом n . Значення $n = 0$ відповідає матриці, значення $n = 1, 2, 3$ вказують на волокна і включають їх кільцеві елементи зі складу збірки, для якої вирішується крайова зада-

ча; нумерація волокон і кільцевих елементів, що їх включають, проводиться по напрямку від внутрішньої поверхні труби до зовнішньої. При відсутності індексу n величина відноситься до матриці і кожному з волокон, або до труби в цілому.

2. Рівняння математичної моделі

$$g_{n(11)} = \lambda_{n1}^2 = \left(1 + \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_{n(3)}}{\partial t}\right)^2,$$

$$g_{n(22)} = \lambda_{n2}^2 = \left(1 + \frac{u_{n(3)}}{r}\right)^2, \tag{2.1}$$

$$g_{n(33)} = \lambda_{n3}^2 = \left(1 + \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_{n(1)}}{\partial r}\right)^2,$$

$$g_{n(13)} = \lambda_{n1}\lambda_{n3} \cos \omega_{n13} = \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial r} + \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial t} + \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial t} \cdot \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial r} + \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial t} \cdot \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial r}, \quad n = 0, 1, 2, 3$$

(компоненти векторних і тензорних величин, що дорівнюють нулю за умов симетрії задачі, що розв'язується, не наводимо), де λ_{n1} , λ_{n2} , λ_{n3} – кратності подовжень за напрямками координатних ліній $\hat{\theta}^1$, $\hat{\theta}^2$, $\hat{\theta}^3$ (t , φ , r) відповідно; ω_{n13} –

Виходили із загальних рівнянь нелінійної механіки, що визначають компоненти тензора міри деформації Коші-Гріна [6]. Для компонент тензорів осесиметричної деформації матриці і волокон в трубі приходимо до виразів, відповідно до яких вони визначаються як функції осьової і радіальної координат t та r .

координатний кут між $\hat{\theta}^1$ і $\hat{\theta}^3$ – координатними лініями.

У разі матеріалів, що стискаються, матриці і волокон компоненти симетричних тензорів напружень Піола-Кірхгофа в складових пов'язані з компонентами тензорів їх деформації співвідношеннями

$$J\sigma_{n(ij)} = 2 \sum_{p=1}^q \frac{\partial W_n}{\partial I_{np}} \cdot \frac{\partial I_{np}}{\partial q_{n(ij)}}, \quad i, j = 1, \dots, 3, \quad n = 0, 1, 2, 3, \tag{2.2}$$

де $W_n = W_n [I_{n1}(g_{n(ij)}), I_{n2}(g_{n(ij)}), \dots, I_{nq}(g_{n(ij)})]$ – пружний потенціал матеріалу матриці ($n = 0$) або волокна ($n = 1, 2, 3$), який визначається в залежності від інваріантів $I_{n1}, I_{n2}, \dots, I_{nq}$ тензора його деформації.

Застосовуючи рівняння рівноваги МДТТ при великих (кінцевих) деформаціях, прийшли до наступних рівнянь рівноваги для зв'язуючого і волокон труби при осесиметричній деформації в метриці відлікової конфігурації:

$$\frac{\partial t_{n(11)}}{\partial t} r + \frac{\partial t_{n(31)}}{\partial r} r + t_{n(31)} = 0, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial t_{n(13)}}{\partial t} r + \frac{\partial t_{n(33)}}{\partial r} r + t_{n(33)} - t_{n(22)} = 0,$$

$n = 0, 1, 2, 3$.

Тут $t_{n(ij)}$ – фізичні компоненти несиметричного тензора напружень Піола-Кірхгофа для матриці (зв'язуючого) і волокон, з яких відмінні від нуля визначаються виразами

$$t_{n(11)} = J_n \sigma_{n(11)} \left(1 + \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial t}\right) + J_n \sigma_{n(13)} \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial r},$$

$$t_{n(13)} = J_n \sigma_{n(13)} \left(1 + \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial r}\right) + J_n \sigma_{n(11)} \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial t},$$

$$t_{n(31)} = J_n \sigma_{n(31)} \left(1 + \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial t}\right) + J_n \sigma_{n(33)} \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial r},$$

$$t_{n(33)} = J_n \sigma_{n(33)} \left(1 + \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial r}\right) + J_n \sigma_{n(31)} \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial t}; \tag{2.4}$$

$$t_{n(22)} = J_n \sigma_{n(22)} \left(1 + \frac{u_{n(3)}}{r}\right). \tag{2.5}$$

Компоненти $J\sigma_{(ij)}$ симетричного тензора напружень виражаються через компоненти p_{ij}

векторів напружень на $\hat{\theta}^i$ – координатних поверхнях, віднесених до нормованого векторного базису системи координат в деформованій конфігурації циліндра, за формулами [7]

$$J\sigma_{(11)} = \lambda_1^{-1} \lambda_2 \lambda_3 \sin \omega_{23} p_{11},$$

$$J\sigma_{(22)} = \lambda_2^{-1} \lambda_1 \lambda_3 \sin \omega_{13} p_{22},$$

$$J\sigma_{(33)} = \lambda_3^{-1} \lambda_1 \lambda_2 \sin \omega_{12} p_{33},$$

$$J\sigma_{(13)} = \lambda_2 \sin \omega_{23} p_{13} \tag{2.6}$$

(Індекс "n" приналежності матриці або волокну опускаємо).

3. Побудова чисельного рішення задачі

Геометричні рівняння (2.1), фізичні рівняння (2.2) і рівняння рівноваги (2.3) разом з (2.4), (2.5) є вирішальними рівняннями крайової задачі для труби як кусочно-однорідного циліндра. Компоненти векторів переміщень $u_{n(1)}, u_{n(3)}$ і компоненти тензорів напружень $t_{n(11)}, t_{n(13)}, t_{n(31)}, t_{n(33)}$ в матриці і волокнах брали в якості основних величин. Вміщені в дозвільних рівняннях компоненти де-

формації $q_{n(11)}, q_{n(22)}, q_{n(33)}, q_{n(13)}$ і компоненти напружень $t_{n(22)}$ висловлювали через основні величини за допомогою (2.1), (2.2) і (2.5).

Граничні умови для зв'язуючого і волокон труби, при яких вирішували крайову задачу, висловлюють відсутність осьових переміщень в поверхнях $t = 0$ та $t = h/2$ і поперечних зсувів з цих поверхонь:

$$u_{n(1)}|_{t=0} = 0, \quad q_{n(13)}|_{t=0} = 0, \quad u_{n(1)}|_{t=h/2} = 0, \quad q_{n(13)}|_{t=h/2} = 0, \quad (3.1)$$

$$n = 0, 1, 2, 3.$$

Для внутрішньої поверхні $r = a$ під впливом тиску p , як слідкуючого навантаження, компоненти несиметричного тензора Піола-Кірхгофа (2.4) виражали через компоненти симетричного тензора (2.2) і використовували зв'язок останніх (2.6) з компонентами вектора напружень в поверхні. При вільній від навантажень зовнішньої поверхні $r = b$ напруження в ній брали рівними нулю. В результаті прийшли до граничних умов у внутрішній і зовнішній поверхнях труби (збірки блоків), які записуємо у вигляді

$$t_{m(33)}|_{r=a} = -\lambda_{m3}^{-1} \lambda_{m1} \lambda_{m2} \left(1 + \frac{\partial u_{m(3)}}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} \cdot p, \quad (3.2)$$

$$t_{m(31)}|_{r=b} = 0, \quad t_{m(33)}|_{r=b} = 0,$$

де індексом m відзначили окремо величини в граничних поверхнях, як ті, що відносяться до матриці (зв'язуючому).

Умови спільного деформування задавали, виходячи з рівності компонент векторів переміщень і напружень для матриці (зв'язуючого) і волокон між собою в межах їх розділу. Ці умови наводимо, відзначаючи величини, що відносяться до матриці, окремо індексом m . В циліндричних поверхнях розділу матриці з n – волокном

$$t_{m(31)}|_{r=a} = -\lambda_{m3}^{-1} \lambda_{m1} \lambda_{m2} \frac{\partial u_{m(1)}}{\partial r} \Big|_{r=a} \cdot p,$$

$$u_{m(1)}(t, r) = u_{n(1)}(t, r), \quad u_{m(3)}(t, r) = u_{n(3)}(t, r),$$

$$t_{m(31)}(t, r) = t_{n(31)}(t, r), \quad t_{m(33)}(t, r) = t_{n(33)}(t, r), \quad (3.3)$$

$$0 \leq t \leq \delta/2, \quad z = nh - (h + \delta)/2, \quad z = nh - (h - \delta)/2,$$

$$n = 1, 2, 3.$$

У поперечній площині $t = \delta/2$ розділу n – волокна з матрицею

$$u_{m(1)}(t, r) = u_{n(1)}(t, r), \quad u_{m(3)}(t, r) = u_{n(3)}(t, r),$$

$$t_{m(11)}(t, r) = t_{n(11)}(t, r), \quad t_{m(13)}(t, r) = t_{n(13)}(t, r), \quad (3.4)$$

$$t = \delta/2, \quad nh - (h + \delta)/2 \leq z \leq nh - (h - \delta)/2,$$

$$n = 1, 2, 3.$$

Похідні першого порядку від основних величин по осьовій і радіальній координатами t і r апроксимували за допомогою кінцево-різницевих співвідношень другого порядку точності [8]. Разом із залученням граничних умов (3.1), (3.2) і умов спільного деформування матриці і волокон (3.3), (3.4) формується система нелінійних рівнянь відносно основних величин в вузлових точках двовимірної області $0 \leq t \leq h/2, a \leq r \leq b$. Дану систему рівнянь вирішували на основі процедури дискретного методу Ньютона [9]. Єдиність розв'язку крайової задачі забезпечували на основі продовження рішення по тиску p в трубі. В результаті рішення крайової задачі при кінцевому значенні тиску з залученням (2.6) визначали вузлові значення пере-

міщень $u_{n(i)}$, деформацій λ_{ni} , ω_{nij} і напружень p_{nij} для матриці ($n = 0$) та волокон ($n = 1, 2, 3$).

4. Результати чисельного дослідження

Представляємо результати чисельного рішення для труби, внутрішній радіус якої $a = 100$ мм, зовнішній радіус $b = a + 3h = 103$ мм (див. рис. 1). Волокна в ній квадратного перетину $\delta \times \delta$ з довжиною сторони перетину $\delta = 0,6$ мм. Коефіцієнт армування труби $k_f = \delta^2 / h^2 = 0,36$. Фізичні рівняння для матеріалу матриці будували, використовуючи потенціал Левінсона-Буржеса [10].

$$W_m = \frac{E_m}{4(1+\nu_m)} \left(2\beta_m + \frac{4\nu_m - 1}{1 - 2\nu_m} \right) (\sqrt{I_3} - 1)^2 \left[\beta_m (I_1 - 3) + (1 - \beta_m)(I_2 I_3^{-1} - 3) + 2(1 - 2\beta_m)(\sqrt{I_3} - 1) + \left(2\beta_m + \frac{4\nu_m - 1}{1 - 2\nu_m} \right) (\sqrt{I_3} - 1)^2 \right],$$

де I_1, I_2, I_3 – інваріанти тензора міри деформації Коші-Лагранжа. Параметри E_m, ν_m характеризують жорсткість і стисливість матеріалу матриці; β_m – додаткова константа матеріалу. Для модуля пружності зв'язуючого брали

$$W_f = \frac{E_f}{4(1+\nu_f)} \left[(I_1 - 3) - \frac{2}{1 - 2\nu_f} \ln \sqrt{I_3} + \frac{4\nu_f}{1 - 2\nu_f} (\sqrt{I_3} - 3) \right]$$

з модулем пружності $E_f = 68$ МПа і параметром стисливості $\nu_f = 0,4$.

Матеріал матриці з зазначеними параметрами відповідає механічними властивостями поліуретанового каучуку, а матеріал волокон – властивостями поліуретанових ниток [12].

Результати наводимо на основі сітки вузлових точок кінцево-різницевої схеми, при якій на осьових відрізках $0 \text{ мм} \leq t \leq 0,3 \text{ мм}$ і $0,3 \text{ мм} \leq t \leq 0,5 \text{ мм}$ по 7-м рівновіддалених вузлових точок, а на радіальних відрізках для областей волокон по 13-ть і областей матриці між волокнами по 9-ть вузлових точок. Точки на межах розділу зв'язуючого з волокнами, відповідно до комп'ютерного алгоритму рішення задачі, розглядалися як здвоєні, що належать різним компонентам матеріалу (координатні лінії, що відповідають даній сітці вузлових точок, показані на рис.3). Задача при такій сітці вузлових точок вирішувалася з досить високою точністю. Так, подвоївши вказану кількість вузлових точок по координатним напрямкам t і r , прийшли до значень радіальних переміщень у внутрішній і зовнішній поверхнях труби при тиску в ній $p = 0,2$ МПа, що відрізняються від відповідних значень при початковій дискретизації в межах 0,15%.

На рис. 2 представлений графік відносного діаметрального розміру d^*/d труби в залежності від тиску в ній p . Діаметр труби, що роздувається внутрішнім тиском, визначали як

$$d^* = 2(b + u_{(3)|_{t=0}}) = 2(a + 3h + u_{(3)|_{t=0}}),$$

де $u_{(3)|_{t=0}}$ – радіальне переміщення в зовнішній поверхні труби за місцем центрального поперечного перерізу $t = 0$ мм. Вихідний діаметр

На рисунку представлена також крива залежності відносного діаметрального розміру однорідної (некомпозитної) труби в залежності від тиску p . Однорідна труба з того ж матеріалу,

$E_m = 4$ МПа, для параметра стисливості вважали $\nu_m = 0,40$, параметр β_m вважали рівним одиниці. Поведінку матеріалу волокон моделювали потенціалом Блейтца [11]

труби $d = 2b = 2(a + 3h) = 206$ мм. Кінцевий тиск $p = 0,273$ МПа є граничним по конфігурації труби.

При такому тиску діаметральний розмір труби починає самовільно розвиватися до руйнування (в умовах, коли тиск в ній не скидається). При масштабі зображення, що використовується, крива практично не залежить від поперечного перерізу всередині інтервалу $0 \leq t \leq 0,5$ мм. Дрібне гофрування (хвилеутворення) в граничній поверхні труби (див. рис. 3) не впливає на криву через малість відмінності радіальних переміщень в ній (прогинів) у порівнянні з величинами самих радіальних переміщень. Критичний діаметр труби

d_{cr}^* , що відповідає критичному (граничному) тиску в ній $p_{cr} = 0,273$ МПа, майже в 3 рази перевершує вихідний діаметр

$$d_{cr}^* / d = 2,915.$$

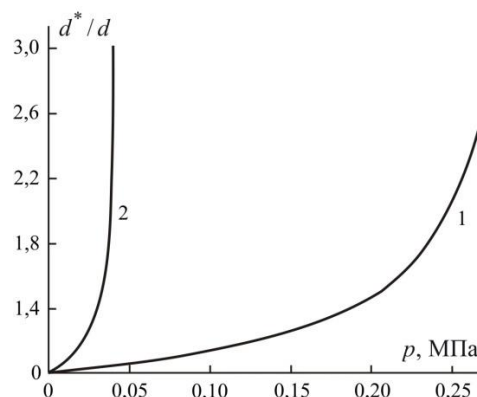


Рисунок 2. Залежності відносних діаметрів d^*/d тришарової труби з кільцевими волокнами (1) та однорідної труби із зв'язуючого матеріалу (2) від тиску p у них.

який використовується як зв'язуюче в трубі з кільцевими волокнами, має однакові з нею внутрішній і зовнішній діаметри. Граничний тиск $p_{cr} = 0,040$ МПа в цій трубі приблизно в 7 разів менше, ніж у

композитній, що досліджується. При цьому критичний діаметр однорідної труби, як і в разі композитної, помітно в 3 рази перевершує вихідний.

На рис. 3 зображені 4-и конфігурації осьового перерізу концентричної збірки з 3-х кільцевих елементів праворуч від поперечного перерізу $t = 0$. Конфігурації збірки представлені сітками матеріальних координатних ліній $t = t_i, z = z_i$, що проходять через вузлові точки (t_i, z_i) кінцево-різницевої схеми виконання задачі. Координатні лінії будували за інтерполяційним кубічними сплайнами в параметричній формі [13]. Перша конфігурація відноситься до недеформованої труби (збірки), наведена для зіставлення з нею інших трьох деформованих конфігурацій. Деформовані конфігурації на рис. 3, б, в, г створюються при значеннях внутрішнього тиску $p = 0,200$ МПа, $0,250$ МПа і $0,273$ МПа відповідно. Тиск $p = 0,273$ МПа є, нагадуємо, граничним, при якому конфігурація

труби починає самовільно розвиватися до її руйнування. (Можливо дослідження подальшого статичного розвитку конфігурації труби при відповідному падінні в ній тиску. Для цього слід від продовження рішення по тиску всередині труби перейти до продовження рішення по радіальному переміщенню однієї з точок в її осьовому перерізі. Зручно використовувати переміщення точки (подовження радіусу кола) у внутрішній або зовнішній поверхні труби за місцем центрального перетину $t = 0$ мм.)

Площа поперечного перерізу збірки зменшується разом зі збільшенням її діаметру при зростанні внутрішнього тиску. Зважаючи на тонкостінність еластоармованої труби конфігурація її стінки в деформованому стані залишається досить близькою до циліндрично симетричної відносно серединної циліндричної поверхні $r = a + 1,5h$ ($z = 1,5h$).

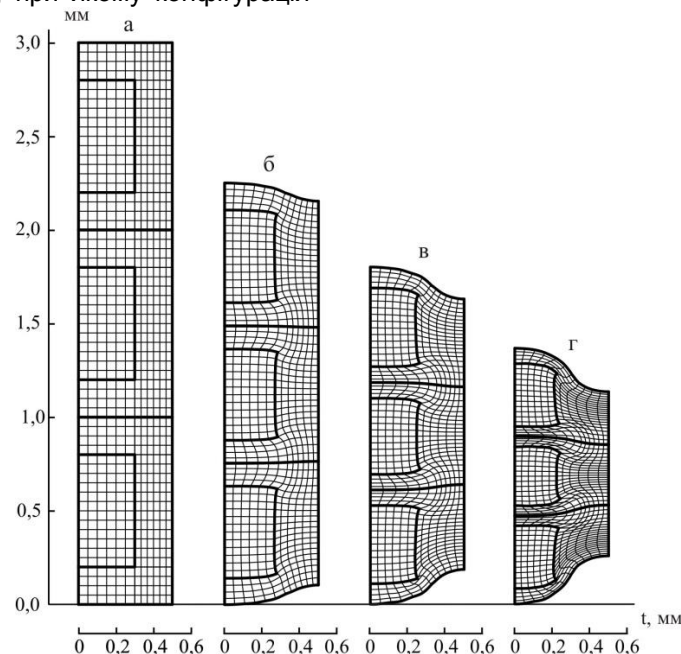


Рисунок 3. Конфігурації концентричної збірки з кільцевих елементів тришарової труби праворуч від центрального перетину $t = 0$ мм: а – збірка при відсутності тиску в трубі; б, в та г – збірка при тисках в трубі $p = 0,200$ МПа, $0,250$ МПа і граничному тиску $0,273$ МПа.

Обмежуючі поверхні труби набувають хвилеподібної форми (гофруються) з періодом уздовж твірної, що дорівнює періоду армування h . Стріли прогинів (подвійні амплітуди хвилеутворення) у внутрішній і зовнішній поверхнях труби, які визначаються як різниці по модулю переміщень в даних поверхнях за місцем центрального $t = 0$ мм і крайнього $t = 0,5$ мм перетинів

$$f_a = |u_{(3)}|_{t=0, r=a} - u_{(3)}|_{t=h/2, r=a}|,$$

$$f_b = |u_{(3)}|_{t=0, r=b} - u_{(3)}|_{t=h/2, r=b}|,$$

не надто суттєво відрізняються між собою. Так, в разі граничного стану при $p = 0,273$ МПа, для якого прогини в обмежуючих поверхнях найбільші, $f_a = |198,894 - 199,151| = 0,257$ мм і $f_b = |197,260 - 197,028| = 0,232$ мм, їх відмінність між собою дорівнює 10,2%, (відносимо до середнього значення прогинів між собою $(f_a + f_b)/2$). Для конфігурації при $p = 0,200$ МПа $f_a = |48,848 - 48,952| = 0,104$ мм, $f_b = |48,099 - 48,002| = 0,097$ мм з відмінністю між собою 7,0%.

Серединна поверхня збірки (і труби в цілому) залишається в деформованій конфігурації практично циліндричною. Прогини її малі в порівнянні з прогинами в обмежувачих поверхнях. Стріла прогину в серединній поверхні при $p = 0,273$ МПа

$$f = |u_{(3)}|_{r=0, r=(a+b)/2} - u_{(3)}|_{r=0,5, r=(a+b)/2}|$$

дорівнює лише

$$f = |198,076 - 198,082| = 0,006 \text{ мм.}$$

Площа поперечного перерізу збірки, так само як осьового перерізу труби, в граничному стані стає приблизно в 2,5 рази менше, ніж у вихідному. Площа поперечного перерізу волокна при цьому зменшується в 2,4 рази. При цьому обсяг, який займає матеріал труби в цілому, збільшується на 22% в порівнянні з вихідним – як наслідок стискання матеріалів зв'язуючого та волокон, що використовуються в ній.

В якості особливостей деформування матеріалу матриці відзначимо його видавлювання з областей волоконно-матричного шару між волокнами в область матричного шару. Обмежучі циліндричні поверхні кільцевих волокон в трубі, що деформується стають опуклими, а їх торцеві поверхні – увігнутими. Найбільші укорочення (по модулю) $\lambda_3 - 1$ виникають в областях матричного шару. Вони розташовані навпроти волокон за місцем крайнього перетину $t = 0,5$ мм і між волокнами за місцем центрального перетину $t = 0$ мм. Для навантаження $p = 0,250$ МПа в перетині $t = 0$ посередині між 1-м та 2-м волокнами ($z = 1$ мм) $\lambda_3 - 1 = 0,361 - 1 = -0,639$, а при $t = 0,5$ мм навпроти осьової лінії 2-го волокна ($z = 1,5$ мм) $\lambda_3 - 1 = 0,403 - 1 = -0,597$.

Відповідні значення радіального подовження при $p = 0,200$ МПа $\lambda_3 - 1 = 0,568 - 1 = -0,432$ і $\lambda_3 - 1 = 0,607 - 1 = -0,393$, при $p = 0,273$ МПа $\lambda_3 - 1 = 0,214 - 1 = -0,786$ і $\lambda_3 - 1 = 0,239 - 1 = -0,761$. Близькі значення радіальної деформації досягаються в циліндричних перетинах $z = 2$ мм при $t = 0$ мм і $z = 0,5$ мм та 2,5 мм при $t = 0,5$ мм. При навантаженні, що наближається до граничного, найбільша концентрація деформації радіального укорочення досягається при $t = 0,5$ мм в околиці поверхні $z = 0,5$ мм розташування серединної поверхні 1-го волокна. При $p = 0,250$ МПа та $0,273$ МПа $\lambda_3 = 0,357$ ($z = 0,35$ мм) і $0,200$ ($z = 0,30$ мм), де в дужках після значення деформації наводимо нормальну координату, при якій

значення досягається. У разі навантаження $p = 0,200$ МПа $\lambda_3 = 0,569$ ($z = 0,40$ мм).

Окружна кратність подовження λ_2 , досягаючи великих значень, через тонкі стінки труби порівняно мало змінюється з переходом по товщині труби від внутрішньої до зовнішньої поверхні. При $p = 0,200$ МПа, $0,250$ МПа і $0,273$ МПа дана деформація в перетині $t = 0,5$ мм змінюється в діапазонах $1,490 \geq \lambda_2 \geq 1,466$, $2,020 \geq \lambda_2 \geq 1,975$ і $2,992 \geq \lambda_2 \geq 2,913$.

Осьова деформація подовження $\lambda_1 - 1$ при фіксованій в процесі деформування труби відстані між перетинами $t = 0$ мм і $t = 0,5$ мм досягає також значних величин, хоча і не настільки великих в порівнянні з окружної деформацією подовження $\lambda_2 - 1$. Найбільший діапазон зміни цієї величини для навантажень $p = 0,200$ МПа і $0,250$ МПа має місце в циліндричному перетині посередині між 1-м та 2-м волокнами (при $z = 1$ мм). У цьому перетині досягаються найбільші подовження при $t = 0$ мм і найбільші укорочення в околиці краю $t = 0,5$ мм. При цих двох навантаженнях діапазони зміни осьової кратності подовження в зазначеному перерізі $1,183 \geq \lambda_1 \geq 0,797$ ($t = 0,5$ мм), $1,345 \geq \lambda_1 \geq 0,722$ ($t = 0,4333$ мм), де вказуємо значення осьової координати t , при якій вкорочення є найбільшим. Для граничного тиску $p = 0,273$ МПа циліндрична поверхня з найбільшим діапазоном зміни деформації осьового подовження виявиться трохи зміщеною щодо серединної поверхні між 1-м та 2-м волокнами. Найбільш дана деформація змінюється в поверхні $z = 0,95$ мм, для якої $1,532 < \lambda_1 \geq 0,724$ з найбільшим подовженням при $t = 0$ мм і найбільшим укороченням при $t = 0,3333$ мм.

На рис. 4, 5 та 6 наведено графіки розподілу лінійних деформацій λ_1, λ_2 та λ_3 і координатного кута ω_{13} як кутової деформації в циліндричних поверхнях $z = 0$ мм, $z = 0,2$ мм і $z = 1,5$ мм для випадку навантаження труби граничним тиском $p = 0,273$ МПа. Для внутрішньої поверхні $z = 0$ мм залежності представляються безперервними кривими. В силу тиску на даній поверхні як стежучого навантаження, поперечний зсув з неї $\gamma_{13} = \pi/2 - \omega_{13} = 0$ ($\omega_{13} = \pi/2$). Зважаючи на малість прогинів (гофрування) в поверхні $z = 0$ мм, графік залежності для окружної деформації

λ_2 через масштаб зображення, що застосовується не відображає її зміни в поверхні – є прямою лінією, паралельною осі t .

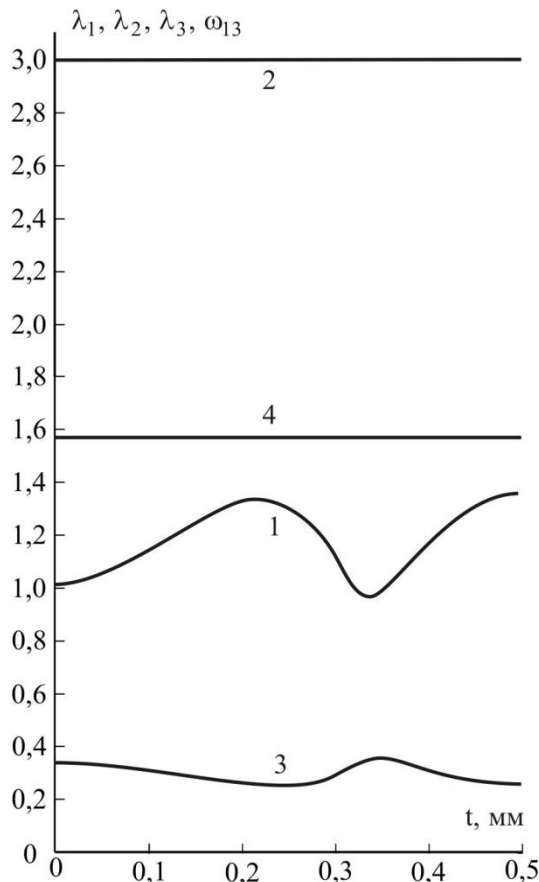


Рисунок 4. Розподіли кратності подовжень λ_1 (1), λ_2 (2), λ_3 (3) та координатного кута ω_{13} (4) у внутрішній поверхні $z = 0$ збірки з кільцевих елементів тришарової труби при граничному тиску $p = 0,273$ МПа.

У разі поверхні $z = 0,2$ мм, яка розділяє матрицю з першим волокном, деформації λ_3 і ω_{13} на сторонах цієї поверхні, що відносяться до матриці і волокна, відображаються різними кривими. Відстань між відповідними точками двох кривих, побудованих на різних сторонах поверхні поділу, являє собою стрибок, що випробується величиною з переходом від одного компонента матеріалу до іншого. Для кривих $\lambda_1, \lambda_3, \omega_{13}$ має місце ще і стрибок в кутовій точці ($t = 0,3$ мм, $z = 0,2$ мм) з переходом від торцевої поверхні волокна до зв'язуючого. Результати для кутової точки є певною мірою формальними в силу її нерегулярного характеру, як тій, що належить лінії порушення гладкості поверхні контакту різних матеріалів [14].

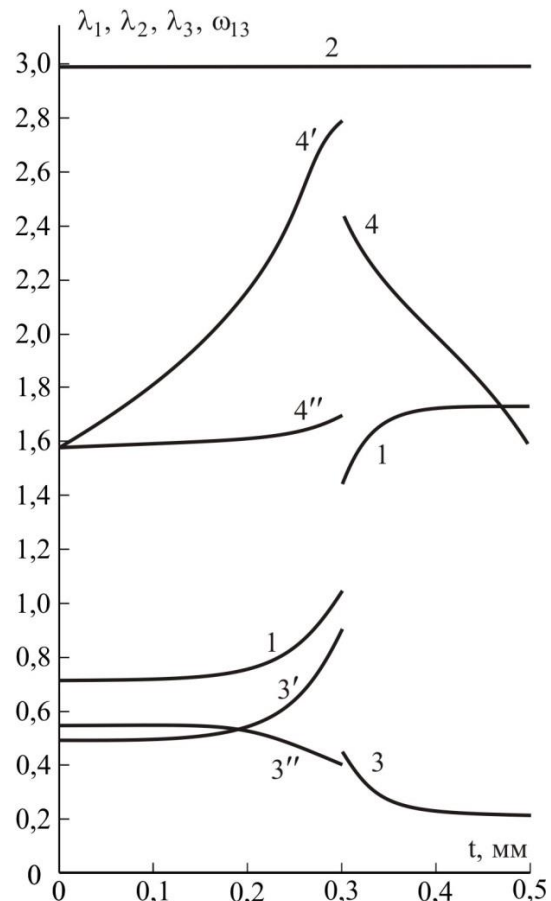


Рисунок 5. Те ж в поверхні $z = 0,2h$ розділу матриці та першого волокна в збірці з кільцевих елементів тришарової труби. Криві залежностей для матриці і волокна при зміні величини стрибком з переходом через межу розділу компонентів відзначені номерами з одним і двома штрихами відповідно

У серединній поверхні стінки труби $z = 1,5$ мм деформації λ_1 і ω_{13} зазнають скачки за місцем переходу від торцевої поверхні другого (серединного) волокна до зв'язуючого – у відповідність з різними пружними властивостями матеріалів, що контактують. Зростання всюди на інтервалі $0 \leq t \leq 0,5$ мм осьової деформації λ_1 супроводжується убаванням всюди на даному інтервалі радіальної деформації λ_3 .

ВИСНОВКИ

Провели дослідження еласткомполімерної труби з трьох шарів, армованих кільцевими волокнами квадратного перетину, під впливом внутрішнього тиску. Деформування труби вивчали при великих переміщеннях і деформаціях по моделі кусково-однорідного середовища. Виявили зміни матеріальної конфігурації труби разом з гофруванням у внутрішній і зовнішній поверхнях при зростанні внутрішнього тиску.

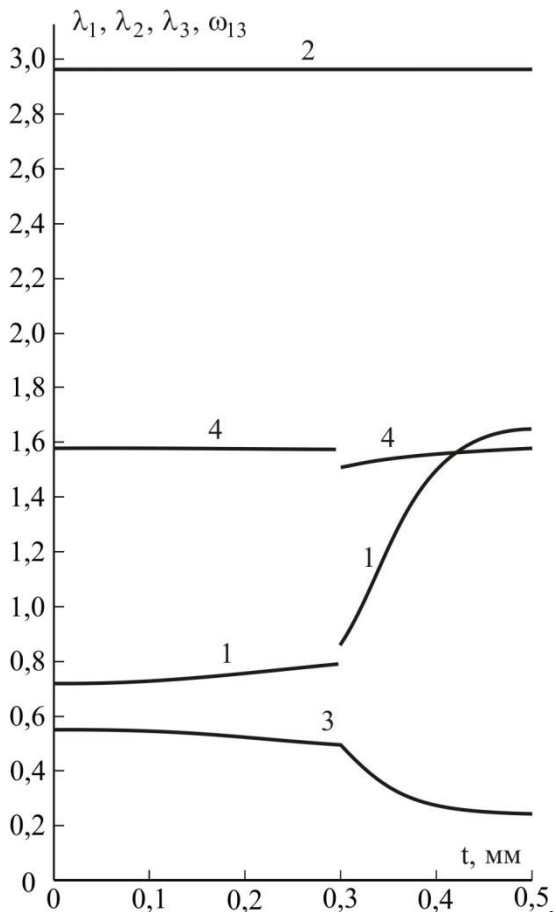


Рисунок 6. Те ж в серединній поверхні $z = 1,5h$ збірки з кільцевих елементів тришарової труби.

Виявили витіснення зв'язуючого з областей між концентрично розташованими волокнами в примикаючі області матричного шару. Побудували деформаційну характеристику труби, що задає зміну

її діаметральної розміру в залежності від тиску; визначили граничний в ній тиск, коли труба починає самовільно розвиватися по діаметральному розміру до руйнування. Цей тиск виявився в 7 разів більше граничного в неармованій трубі з тими ж розмірами.

Проведений аналіз деформацій труби призводить до висновку, що її руйнування відбуватиметься по осьового перерізу (для волокон є поперечним), – в силу домінуючих по окружним напрямкам подовженням. Зазвичай більш піддатливий еластичний матеріал руйнується при більших подовженнях в порівнянні з менш піддатливим. В цьому випадку руйнування труби станеться через розрив одного з кільцевих волокон. При погрішностях технології виготовлення волокнистого матеріалу і самих волокон разом з трубою початкове руйнування може відбутися за місцем будь-якого волокна – в силу досить малих відмінностей між деформаціями такого волокна та іншого з інших. При цьому руйнування труби буде безпечним (без хлопка, вибуху), оскільки його розвиток не відбувається миттєво, – через наявність в осьовому перерізі труби, що руйнується волокон і перерозподілу зусиль між ними.

Такі еластоармовані труби можуть застосовуватися для створення трубопроводів мобільного призначення, що застосовуються в т.ч. для транспортування речовин в розпиленому вигляді, ліквідації екологічного забруднення територій, наслідків техногенних аварій. Суттєвим є також безпечне застосування труб з еластичного матеріалу волокнистої будови через виключення їх миттєвого руйнування під впливом внутрішнього тиску.

Бібліографічний опис.

1. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1980. – 572 с.
2. Киричевский В.В. Метод конечных элементов в механике эластомеров. – К.: Наук. думка, 2002. – 655 с.
3. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л.: Машиностроение, 1986. – 336 с.
4. Holzapfel G.A., Gasser T.C., Ogden R.W. A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models // J. of Elasticity. – 2000. – Vol. 61. – P. 1 – 48.
5. Holzapfel G.A., Gasser T.C., Stadler M. A structural model for the viscoelastic behavior of arterial walls: Continuum formulation and finite element analysis // European J. of Mechanics A–Solids. – 2002. – Vol. 21. – P. 441 – 463.
6. Green A. E., Adkins J.E. Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics. – Oxford: At the Clarendon Press, 1960.
7. Akhundov V. M. Analysis of elastomeric composites based on fiber-reinforced systems. 1. Development of design methods for composite materials // Mechanics of Composite Materials. – 1998. – Vol. 34, No. 6. – P. 515–524.
8. Korn G.A. and Korn T.M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review. – N.Y.: General Publ. Company, 2000. – 1151 p.
9. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир, 1975. – 558 с.

10. Levinson M. and Burgess I.W. A comparison of some simple constitutive relations for slightly compressible rubber-like materials //Int. J. Mech. Sci. – 1971. – V. 13. – P. 563–572.
11. Blatz P.J. and Ko W.L. Application of finite elastic theory to the deformation of rubber materials //Trans. Soc. Rheology. – 1962. – V. 7, №6. – P. 223–251.
12. Энциклопедия полимеров. Т.3. / Под ред. В.А. Кабанова и др. – М.: Советская энциклопедия, 1977. – 1044 с.
13. Akhundov V.M., Kostrova M.M., Naumova I.Ju.. Graphic Visualization of Deformed Fibre-Reinforced Materials // Metallurgical and Mining Industry. – 2017. – No. 2. – P. 52–58.
14. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.

REFERENCES

1. Malmeyster A. K., Tamuzh V. P., Teters G. A. Strength of Polymer and Composite Materials. Riga: Zinatne, 1980. 572 p.
2. Kirichevskiy V. V. The finite element method in mechanic of elastomers. Kiev: Naukova dumka, 2002. 655 p.
3. Chernykh K. F. Nonlinear Elasticity Theory in Machine-Building Calculations. L.: Mashinostroenie, 1986. 336 p.
4. Holzapfel G. A., Gasser T. C., Ogden R. W. A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models. J. of Elasticity. 2000. Vol. 61. P. 1 – 48.
5. Holzapfel G. A., Gasser T. C., Stadler M. A structural model for the viscoelastic behavior of arterial walls: Continuum formulation and finite element analysis. European J. of Mechanics A–Solids. 2002. Vol. 21. P. 441 – 463.
6. Green A. E., Adkins J. E. Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics. Oxford: At the Clarendon Press, 1960.
7. Akhundov V. M. Analysis of elastomeric composites based on fiber-reinforced systems. 1. Development of design methods for composite materials. Mechanics of Composite Materials. 1998. Vol. 34, No. 6. P. 515–524.
8. Korn G. A. and Korn T. M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review. N.Y.: General Publ. Company, 2000. 1151 p.
9. Ortega Dzh., Rejnboldt V. Itegration Methods for Solving of Nonlinear Systems of Equations with Many Unknowns. M.: Mir, 1975. 558 p.
10. Levinson M. and Burgess I. W. A comparison of some simple constitutive relations for slightly compressible rubber-like materials. Int. J. Mech. Sci. 1971. Vol. 13. P. 563–572.
11. Blatz P. J. and Ko W. L. Application of finite elastic theory to the deformation of rubber materials. Trans. Soc. Rheology. 1962. Vol. 7, No 6. P. 223–251.
12. Encyclopedia of Polymers. Vol.3. / Ed. V. A. Kabanov et al. M.: Sovets Entsikl, 1977. 1044 p.
13. Akhundov V. M., Kostrova M. M., Naumova I. Ju.. Graphic Visualization of Deformed Fibre-Reinforced Materials. Metallurgical and Mining Industry. 2017. No. 2. P. 52–58.
14. Parton V. Z., Perlin P. I. Methods of the mathematical theory of elasticity. M.: Nauka, 1981. 688 p.

Стаття поступила 1.11.2018